

Apuntes de Cálculo I

Año académico 2026–2027

Tema 4 — Funciones reales de una variable real

Índice general

4	Funciones reales de una variable real	1
4.1	Introducción	1
4.2	Funciones continuas	11
4.3	Límite funcional	17
4.4	Límites en el infinito y divergencia de funciones	25
4.5	Propiedades de las funciones continuas	30

Capítulo 4

Funciones reales de una variable real

4.1 Introducción

En muchos contextos científicos es necesario describir la forma en que una magnitud depende de otra. Una manera sistemática de hacerlo es mediante el concepto de *función*.

Históricamente, la idea de función surgió en el siglo XVII al estudiar relaciones entre cantidades variables en física y geometría. Por ejemplo, Galileo describía la posición de un cuerpo en movimiento como dependiente del tiempo. Leibniz introdujo el término *función* a finales del siglo XVII, y Euler contribuyó a desarrollar el concepto en el siglo XVIII. La definición moderna como correspondencia entre conjuntos se precisó posteriormente.

Galileo y la descripción matemática del movimiento.

A comienzos del siglo XVII, la observación, la experimentación y las matemáticas adquirieron un papel cada vez mayor en el estudio de la naturaleza. Ya existían tradiciones de estudio cuantitativo, como la astronomía y la mecánica, pero Galileo Galilei (Pisa 1564 – Arcetri 1642) contribuyó decisivamente a describir el movimiento midiendo magnitudes y relacionándolas mediante leyes matemáticas. Uno de los descubrimientos más sorprendentes de la época fue la Ley de la Gravitación Universal de Newton, que mostró que fenómenos tan aparentemente distintos como el movimiento de los planetas y la caída de las hojas de los árboles obedecían a una misma ley.

La caída de los cuerpos.

Galileo cuestionó la idea, heredada de Aristóteles, de que los objetos más pesados caen más rápido. Mediante argumentos y estudios del movimiento, defendió que, en ausencia de resistencia del aire, los cuerpos caen con la misma aceleración. Una célebre anécdota cuenta que, en uno de sus experimentos, dejó caer dos esferas de idénticas dimensiones, una hecha de madera y otra de metal, desde la torre de Pisa, y observó que llegaron al suelo a la par. Sin embargo, comprobar el resultado de estos experimentos con precisión era difícil en una época en la que no existían cronómetros como los que conocemos, ya que la caída era demasiado rápida para poder medir los tiempos con exactitud.

Para superar esa dificultad, Galileo ideó un experimento más controlable en el que la fuerza de la gravedad quedaba diluida: hacer rodar una esfera por un plano inclinado. Así reducía la aceleración de la esfera y conseguía que el movimiento fuese más lento. Variando la inclinación del plano, podía comparar los resultados y extrapolarlos al caso de la caída vertical.

Galileo describió mediciones del movimiento en un plano inclinado utilizando una clepsidra, o reloj de agua. Una interpretación posterior de su experimento lo describe de la siguiente forma: colocó pequeñas campanillas a lo largo de la rampa y ajustó sus posiciones para que una esfera, soltada desde el reposo, las haga sonar a intervalos de tiempo iguales. Las distancias entre las campanillas representan entonces los espacios recorridos en esos intervalos.

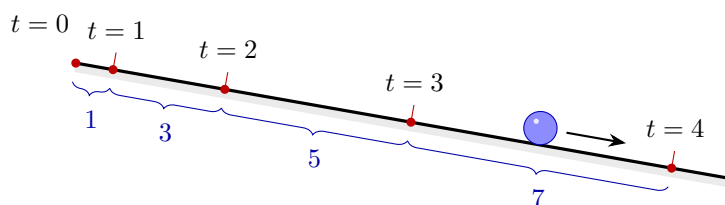
Según la ley de Galileo, esas distancias son proporcionales a los números 1, 3, 5, 7, ..., lo que indica que el cuerpo recorre espacios cada vez mayores, pero con una regularidad precisa. De hecho, la misma conclusión podía obtenerse cambiando la inclinación del plano y la masa de la esfera. Sumando esos incrementos y eligiendo unidades adecuadas, podemos escribir, con notación actual,

$$\begin{aligned}d(1) &= 1, \\d(2) &= 1 + 3 = 4, \\d(3) &= 1 + 3 + 5 = 9, \\d(4) &= 1 + 3 + 5 + 7 = 16,\end{aligned}$$

es decir, distancias proporcionales al cuadrado del tiempo transcurrido:

$$d(t) = C t^2.$$

Galileo había establecido una ley que relaciona dos magnitudes físicas: la distancia recorrida y el tiempo transcurrido, en un movimiento uniformemente acelerado por la gravedad. Esta relación, escrita aquí con notación moderna, ilustra un cambio decisivo en la forma de estudiar la naturaleza: las relaciones matemáticas entre magnitudes permiten describir fenómenos y hacer predicciones que pueden contrastarse con mediciones.



Las funciones permiten, por tanto, expresar de manera precisa la *dependencia* que existe entre dos magnitudes reales. Algunos ejemplos cotidianos son:

- (1) La altura de una persona en función de su edad.
- (2) El número de ejemplares de una especie en un determinado hábitat en función del tiempo.

De forma general, el concepto de función recoge la idea de que un conjunto de datos puede depender de otro. En su formulación moderna, una función es una ley o correspondencia que asocia a cada elemento de un conjunto un único elemento de otro.

Definición 4.1. Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ no vacíos. Llamamos *función real de variable real* a cualquier aplicación $f : A \rightarrow B$, esto es, una correspondencia que asigna a cada elemento $x \in A$ un **único** elemento $f(x) \in B$.

Para definir una función suele usarse la siguiente notación, que especifica el dominio de definición de una función f , así como la *ecuación* que nos permite obtener $f(x)$ a partir de x .

$$f : A \rightarrow B, \quad x \mapsto f(x) = \dots \quad \text{o} \quad f : A \rightarrow B, \quad f(x) = \dots$$

Si $f : A \rightarrow B$ es una función, decimos que A es su conjunto de definición o *dominio*.

Puesto que sólo vamos a trabajar con este tipo de funciones, cuando usemos la palabra *función*, nos referimos siempre a una función real de variable real.

Definición 4.2. El conjunto $f(A)$ de los valores que toma f se llama *imagen* o *recorrido* de f .

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\} = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x) \text{ para algún } x \in A\}$$

Dado que toda aplicación $f : A \rightarrow B$ es en particular una aplicación $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, siempre podemos escribir lo segundo. Especificar que una función f devuelve valores en B es una forma de enfatizar la propiedad $f(A) \subset B$. Por ejemplo, la función *parte entera de x* suele denotarse como $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$, ya que $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Nótese que si elegimos $B = f(A)$, f se convierte automáticamente en una aplicación **sobreyectiva**.

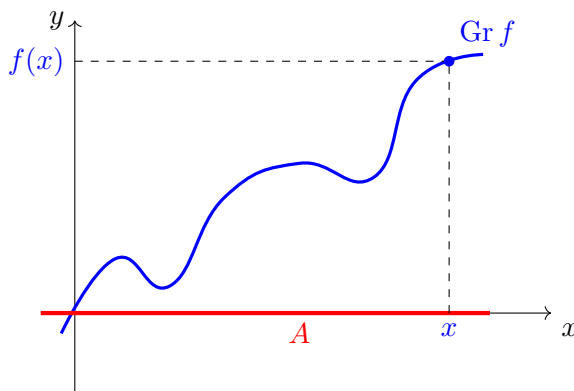
Toda función real queda completamente determinada por su *gráfica*, que es el siguiente subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\text{Gr } f = \{(x, f(x)) : x \in A\}$$

Si representamos este conjunto en el plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, los puntos (x, y) que forman $\text{Gr } f$ son aquellos que cumplen dos condiciones: la abscisa x es un punto de A y la ordenada y es su imagen por f . En resumidas cuentas:

$$\text{Gr } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in A, y = f(x)\}.$$

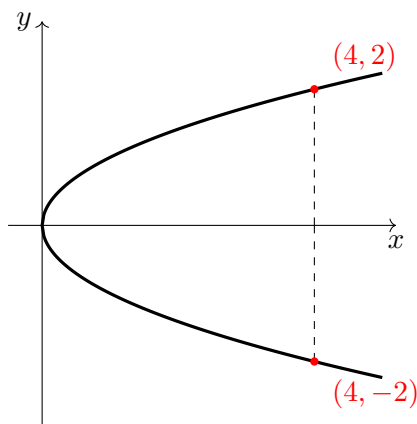
Por definición de función, para cada $x \in A$ la recta vertical que pasa por $(x, 0)$ contiene **un único punto de la gráfica**, el que verifica $y = f(x)$. Si $x \notin A$, dicha recta no corta a la gráfica de f .



Geométricamente, al proyectar $\text{Gr } f$ sobre el eje de abscisas se obtiene el conjunto A donde f está definida y, para cada $x \in A$, $f(x)$ es el único $y \in \mathbb{R}$ tal que $(x, y) \in \text{Gr } f$.

Esto motiva la notación $y = f(x)$ para $x \in A$ a la hora de definir funciones. Bajo ese punto de vista, a x se le llama *variable independiente*, e y se dice que es la *variable dependiente*. En términos de relaciones entre magnitudes, es conveniente pensar en x como en un *dato* y en y como en un *resultado*. La función f juega el papel del modelo que nos permite predecir el resultado y a partir del dato x .

Date cuenta: La relación $y^2 = x$ en $\mathbb{R}^2$ **no define** la gráfica de una función $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ya que existen valores de x con dos imágenes. Por ejemplo, para $x = 4$, tenemos $y = 2$ e $y = -2$.



En cambio, $x \mapsto \sqrt{x}$ y $x \mapsto -\sqrt{x}$ sí son funciones (definidas por ejemplo en $[0, +\infty)$).

Definición 4.3. Dada una expresión $f(x)$, llamamos *dominio natural* o *dominio maximal* al conjunto de los números reales x para los que dicha expresión está definida y toma un valor real. Lo denotamos por

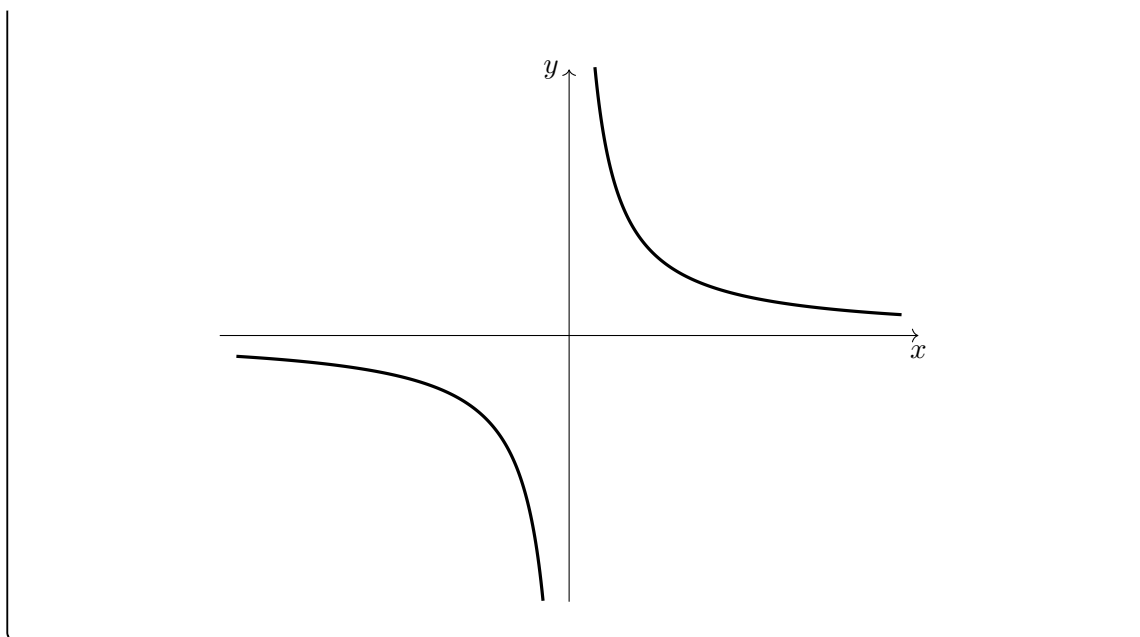
$$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \text{ está definido y es real}\}.$$

Ejemplos.

- (1) Si f es una función *polinómica*, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, ya que podemos sumar, multiplicar y elevar a potencias naturales cualquier número real.
- (2) Llamamos función racional a cualquier función f de la forma $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, siendo p y q funciones polinómicas. En tal caso, se tiene

$$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}.$$

La función racional $x \mapsto \frac{1}{x}$ puede definirse para todo $x \in \mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$. Su representación gráfica es una *hipérbola* de dos ramas.

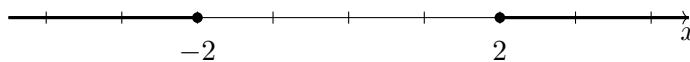


- (3) Para $n \in \mathbb{N}$, el dominio maximal de una *función radical* de la forma $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ son los puntos donde el radicando g es no negativo:

$$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \geq 0\}.$$

Si $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, entonces

$$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \geq 0\} = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty).$$

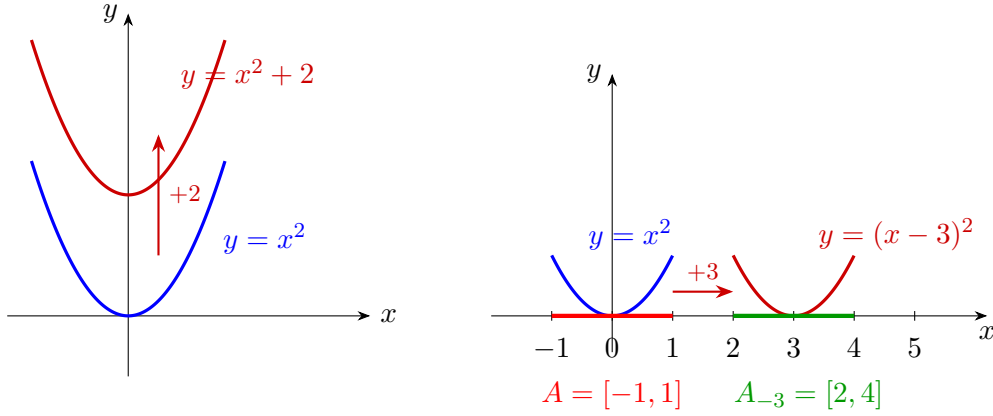


Conocida la gráfica de una función, es fácil obtener la de funciones similares obtenidas mediante *transformaciones elementales* de la original, como son las traslaciones, las dilataciones y las reflexiones.

Definición 4.4. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Dado $c \in \mathbb{R}$, llamamos

$$A_c = \{z \in \mathbb{R} : z + c \in A\} = \{x - c : x \in A\}.$$

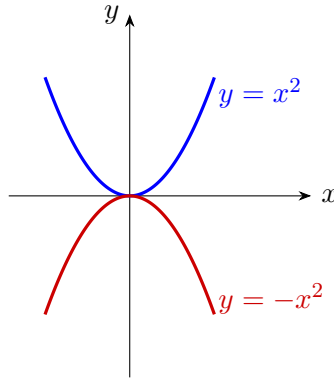
- (1) La **traslación horizontal** de c unidades de f es la función $g : A_c \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $g(x) = f(x + c)$. Si $c > 0$, se trata de una traslación a la izquierda, y si $c < 0$, una traslación a la derecha.
- (2) La **traslación vertical** de c unidades de f es la función $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $g(x) = f(x) + c$. Si $c > 0$, estamos trasladando la función f hacia arriba, y si $c < 0$, hacia abajo.



Definición 4.5. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Dado un $c \in \mathbb{R}^*$, llamamos

$$cA = \{cx : x \in A\}.$$

- (1) La **reflexión respecto al eje x** de f es la función $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $g(x) = -f(x)$.
- (2) La **reflexión respecto al eje y** de f es la función $g : -A \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $g(x) = f(-x)$.
- (3) La **reflexión respecto al origen** de f es la función $g : -A \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $g(x) = -f(-x)$.

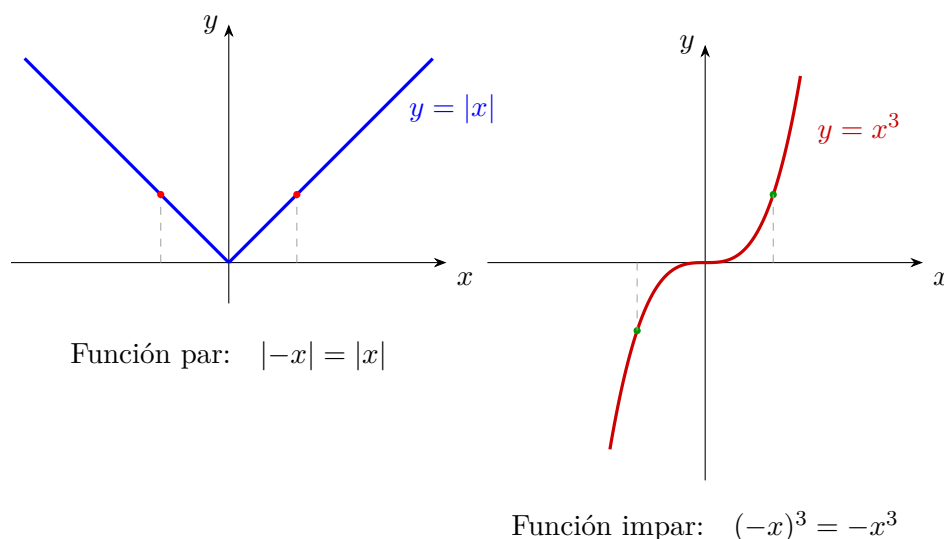


Reflexión respecto al eje x : cada punto $(x, y) \in \text{Gr}(f)$ se transforma en $(x, -y) \in \text{Gr}(g)$.

Las funciones que permanecen invariantes ante las transformaciones (1) o (3) tienen gráficas simétricas, lo que se traducirá en propiedades analíticas útiles a la hora de calcular sus integrales.

Definición 4.6. Sea $A \subset \mathbb{R}$ tal que $-A = A$. Se dice que una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es

- (1) **simétrica par** si $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in A$.
- (2) **simétrica impar** si $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in A$.



Las gráficas de las funciones pares tienen la propiedad de que al plegarlas a lo largo del eje y , las mitades a ambos lados del origen son coincidentes. Análogamente, si plegamos la gráfica de una función impar a lo largo de ambos ejes, las mitades a ambos lados del $(0, 0)$ resultan coincidentes.

Finalmente, discutimos las transformaciones que consisten en *modificar la escala* de la variable o de la función.

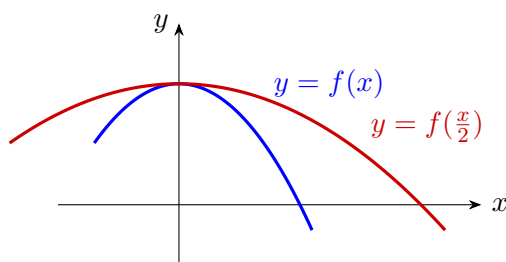
Definición 4.7. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $c > 0$.

Si $c > 1$:

- (1) La **contracción horizontal** de razón c es la función $g : \frac{1}{c}A \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(cx)$.
- (2) La **dilatación vertical** de razón c es la función $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = cf(x)$.

Si $c < 1$:

- (3) La **dilatación horizontal** de razón c es la función $g : \frac{1}{c}A \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(cx)$.
- (4) La **contracción vertical** de razón c es la función $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = cf(x)$.



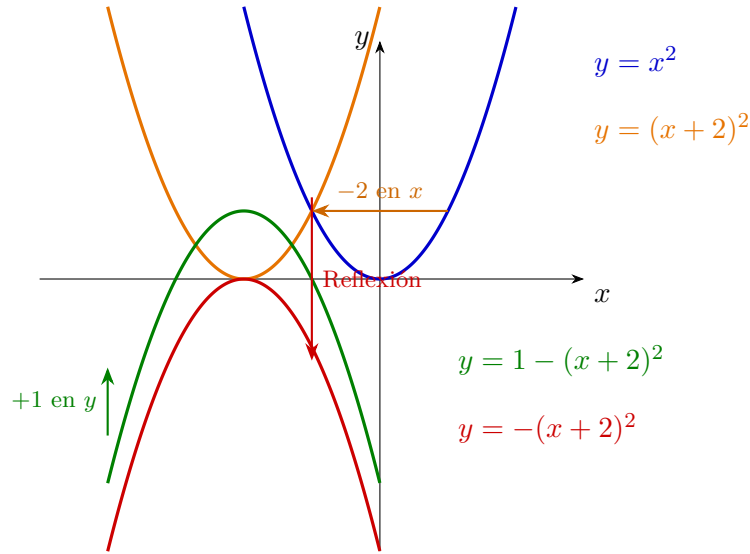
Dilatación horizontal de razón $1/2$.

En general, una función puede obtenerse combinando varias de las transformaciones anteriores. Por ejemplo, si partimos de $f(x) = x^2$, podemos representar la gráfica de la función

$$g(x) = 1 - (x + 2)^2,$$

su gráfica se obtiene aplicando sucesivamente:

- (1) una traslación 2 unidades a la izquierda ($x + 2$);
- (2) una reflexión respecto al eje x (signo negativo delante del cuadrado);
- (3) una traslación 1 unidad hacia arriba (el $+1$ final).



Composición de transformaciones: traslación, reflexión y traslación vertical.

Enumeramos a continuación las operaciones algebraicas que podemos hacer con dos funciones definidas en un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ no vacío. Para ello, definimos $\mathcal{F}(A)$ como el conjunto de todas las funciones $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

Definición 4.8. Para cualesquiera $f, g \in \mathcal{F}(A)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos las siguientes operaciones:

- (1) **Suma:** $f + g \in \mathcal{F}(A)$, siendo $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $\forall x \in A$.
- (2) **Producto:** $fg \in \mathcal{F}(A)$, siendo $(fg)(x) = f(x)g(x)$, $\forall x \in A$.
- (3) **Producto por escalares:** $\alpha f \in \mathcal{F}(A)$, siendo $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, $\forall x \in A$.
- (4) **Cociente:** Si $g(x) \neq 0$ para todo $x \in A$, entonces $f/g \in \mathcal{F}(A)$, con

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \forall x \in A.$$

Las propiedades de la suma y producto de números reales se traslada inmediatamente a la de funciones. La suma de funciones es asociativa y distributiva, y tiene como elemento neutro a la función $x \mapsto 0$ para todo $x \in A$. Además, toda $f \in \mathcal{F}(A)$ tiene una función opuesta, $-f$. El producto por su parte es asociativo, conmutativo y distributivo respecto de la suma, y además posee el elemento neutro $x \mapsto 1$ para todo $x \in A$. Así pues, $(\mathcal{F}(A), +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con unidad.

Para $\alpha \in \mathbb{R}$, a menudo interpretaremos α como la función que vale constantemente α , esto es, $f_\alpha : A \rightarrow \mathbb{R}$, $f_\alpha(x) = \alpha$. En particular, escribimos $f = 0$ para decir que $f(x) = 0$ para todo $x \in A$, y por $f \neq 0$ entendemos que existe un $x \in A$ tal que $f(x) \neq 0$.

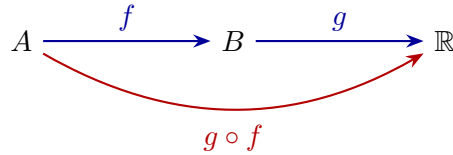
Entonces, el producto por escalares no es más que un caso particular del producto de funciones, aunque conviene resaltar que (1) y (3) dotan a $\mathcal{F}(A)$ de estructura de *espacio vectorial* (de dimensión infinita).

Si $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, f tiene una inversa para el producto; la función $1/f$. Sin embargo, salvo en el caso trivial en que A es un solo punto, esta condición es más fuerte que $f \neq 0$. Por tanto $\mathcal{F}(A)$, en general, no es un cuerpo.

Preferimos evitar la notación f^{-1} para referirnos a la función $1/f$, ya que esta se reserva para la función inversa respecto a la composición de funciones.

Definición 4.9. Sean $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ funciones tales que $f(A) \subset B$. Definimos la composición de f con g como la función $g \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad \forall x \in A.$$



Ejemplo: consideremos la función valor absoluto $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $V(x) = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Para cualquier función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ se tiene trivialmente que $f(A) \subset \mathbb{R}$, lo que nos permite considerar la función compuesta

$$(V \circ f)(x) = V(f(x)) = |f(x)|, \quad \forall x \in A,$$

que se suele denotar por $|f|$.

Ejemplo

Problema. Consideremos las funciones $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = |x|$, $g(x) = x^3 - x$. Comprobemos que $(f \circ g) \neq (g \circ f)$.

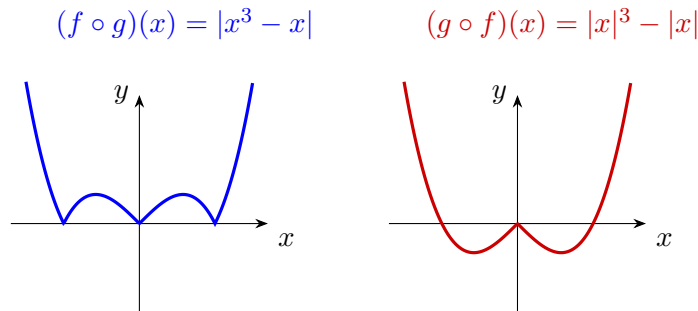
Resolución. Calculamos:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = |x^3 - x|, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = |x|^3 - |x|.$$

A primera vista las expresiones son parecidas, pero no coinciden. Por ejemplo, para $x = -\frac{1}{2}$:

$$(f \circ g)\left(-\frac{1}{2}\right) = \left|(-\frac{1}{2})^3 - \frac{1}{2}\right| = \frac{3}{8}, \quad (g \circ f)\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{8}.$$

Si representamos ambas composiciones vemos de forma más clara las diferencias:

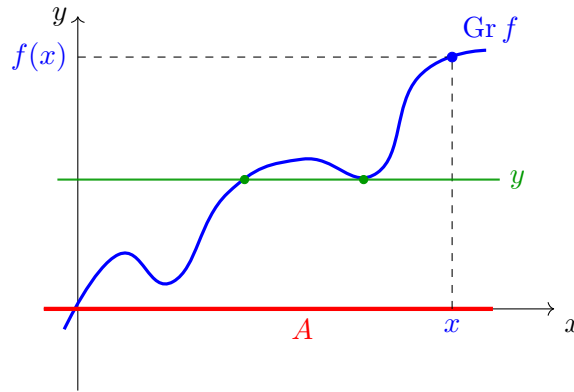


En conclusión, el orden en que se componen las funciones es esencial: aunque ambas composiciones tengan sentido, generalmente $(f \circ g) \neq (g \circ f)$.

Definición 4.10. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Recordamos que f es **inyectiva** si nunca toma el mismo valor en dos puntos distintos del conjunto A , es decir, si se verifica que

$$x, y \in A, \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

Si $f : A \rightarrow B$ es una función inyectiva, entonces la ecuación $y = f(x)$ tiene una única solución (en x), lo que se traduce gráficamente en que cada recta horizontal a altura $y \in f(A)$ interseca a $\text{Gr } f$ en un solo punto.



Gráfica de una función no inyectiva.

Definición 4.11. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función inyectiva. Entonces f puede considerarse como una aplicación biyectiva de A sobre $f(A)$, y podemos definir su **función inversa**

$$f^{-1} : f(A) \rightarrow A,$$

asociando a cada $y \in f(A)$ el único $x \in A$ que cumple $f(x) = y$, es decir,

$$f^{-1}(y) = x \quad \text{tal que} \quad f(x) = y.$$

Obsérvese que tiene sentido considerar las composiciones $f^{-1} \circ f$ y $f \circ f^{-1}$, y se verifica, por definición:

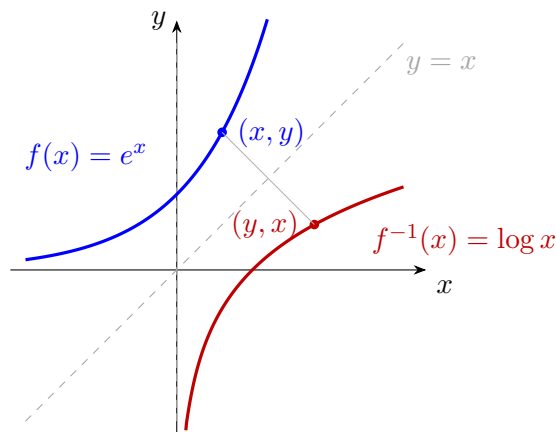
$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \forall x \in A, \quad \text{y} \quad (f \circ f^{-1})(y) = y \quad \forall y \in f(A).$$

Las igualdades anteriores suelen leerse diciendo que $f^{-1} \circ f$ es la **función identidad** en A , y $f \circ f^{-1}$ la identidad en $f(A)$. Además, f^{-1} también es inyectiva y su inversa es la función original, es decir,

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

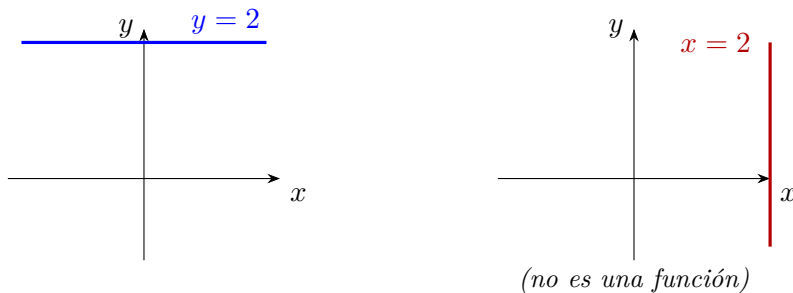
Cuando f^{-1} existe, su gráfica es la imagen especular de la gráfica de f respecto a la bisectriz del primer cuadrante de $\mathbb{R}^2$, esto es, la recta de ecuación $y = x$.

Para comprobarlo, basta darse cuenta de que $y = f(x) \iff f^{-1}(y) = x$. En particular, si el punto (x, y) pertenece a la gráfica de f , entonces el punto (y, x) pertenece a la gráfica de f^{-1} .



Las gráficas de f y f^{-1} son simétricas respecto a la recta $y = x$.

La simetría deja claro que la inversa no siempre existe como función. Por ejemplo, si $f(x) = 2$, su gráfica es la recta horizontal $y = 2$; reflejada respecto a $y = x$ se obtiene la recta vertical $x = 2$, que no es la gráfica de ninguna función $y = h(x)$.



4.2 Funciones continuas

Intuitivamente, una función f será continua en un punto x cuando, al acercarnos a x , los valores de la función se acerquen a $f(x)$. Como veremos, esta noción admite varias formulaciones equivalentes, siendo la más manejable la de acercarnos a x a través de una sucesión $\{x_n\} \rightarrow x$.

Definición 4.12. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función $x \in A$. Decimos que f es *continua* en x si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, si $y \in A$ verifica $|y - x| < \delta$, entonces $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$. Es decir,

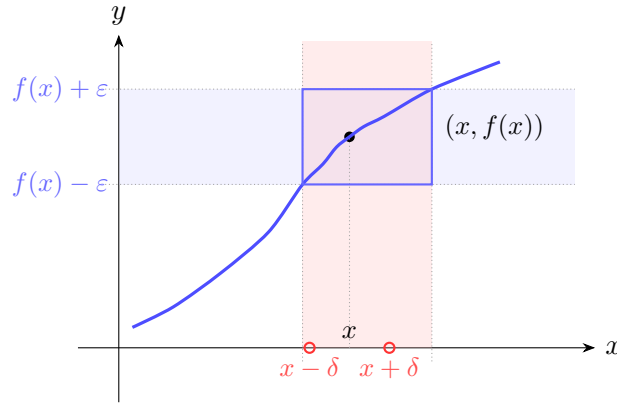
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : y \in A, |y - x| < \delta \implies |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Obsérvese que **no tiene sentido hablar de la continuidad de una función en puntos que no están en A .**

Si $\emptyset \neq B \subset A$, diremos que f es *continua en B* si f es continua todo punto de B . En particular, diremos simplemente que f es *continua* cuando sea continua en A .

Interpretación geométrica de la continuidad.

Fijados $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $x \in A$, para cada $\varepsilon > 0$ consideramos la *banda horizontal* entre las rectas $y = f(x) - \varepsilon$ y $y = f(x) + \varepsilon$. La condición de continuidad afirma que, por estrecha que sea esa banda, existe un $\delta > 0$ tal que la parte de la gráfica de f correspondiente a los puntos $y \in A$ con $|y - x| < \delta$ queda *entera* dentro de la banda. Es decir, el trozo de gráfica sobre el intervalo $(x - \delta, x + \delta) \cap A$ se mantiene entre $f(x) - \varepsilon$ y $f(x) + \varepsilon$.



Proposición 4.13 (Caracterización secuencial de la continuidad). Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y fijemos $x \in A$. Son equivalentes:

- (i) f es continua en el punto x .
- (ii) Para toda sucesión $\{x_n\}$ con $x_n \in A$ y $\{x_n\} \rightarrow x$, se tiene $\{f(x_n)\} \rightarrow f(x)$. A esta propiedad se le suele dar el nombre de *continuidad secuencial*.
- (iii) Para toda sucesión *monótona* $\{x_n\}$ de puntos de A , con $\{x_n\} \rightarrow x$, se tiene $\{f(x_n)\} \rightarrow f(x)$.

Demostración

(i) $\Rightarrow$ (ii). Sea $\{x_n\} \subset A$ con $x_n \rightarrow x$. Debemos ver que $f(x_n) \rightarrow f(x)$. Sea $\varepsilon > 0$; por (i) existe $\delta > 0$ tal que $|y - x| < \delta$ implica $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$. Como $x_n \rightarrow x$, existe $m \in \mathbb{N}$ con $|x_n - x| < \delta$ para todo $n \geq m$. En consecuencia, para $n \geq m$,

$$|f(x_n) - f(x)| < \varepsilon.$$

Esto prueba que $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Es inmediato: si (i) vale para *toda* sucesión de puntos de A que converge a x , entonces en particular vale para las sucesiones monótonas.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Demostraremos el contrarrecíproco: si (i) *no* se verifica, entonces tampoco puede cumplirse (iii).

Si (i) es falso, entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$, se puede encontrar $y \in A$ con $|y - x| < \delta$ y, sin embargo, $|f(y) - f(x)| \geq \varepsilon_0$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos $\delta = \frac{1}{n}$ y obtenemos un $y_n \in A$ tal que

$$|y_n - x| < \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad |f(y_n) - f(x)| \geq \varepsilon_0.$$

Entonces $\{y_n\} \rightarrow x$. Sea $\{x_n\}$ una subsucesión monótona de $\{y_n\}$, que existe por el lema del sol naciente. Se sigue que $\{x_n\} \rightarrow x$ y

$$|f(x_n) - f(x)| \geq \varepsilon_0 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, $\{f(x_n)\}$ *no* converge a $f(x)$. ■

La caracterización de la continuidad (ii) nos permite dar de forma inmediata los primeros ejemplos de funciones continuas.

Primeros ejemplos.

- Las *funciones constantes* $f(x) = \alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, son continuas.
- La *función identidad* en A , dada por $f(x) = x$ para todo $x \in A$, también es continua.
- La función *valor absoluto* es continua. Si $\{x_n\} \rightarrow x$, entonces $\{|x_n|\} \rightarrow |x|$.

Proposición 4.14. Sean $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas en un conjunto no vacío $B \subset A$. Entonces $f + g$ y fg son continuas en B . Si además $g(x) \neq 0$ para todo $x \in A$, el cociente f/g es continuo en B .

Demostración

Sea $x \in B$ y $\{x_n\} \subset A$ una sucesión tal que $x_n \rightarrow x$. Por la continuidad de f y g en x ,

$$f(x_n) \rightarrow f(x) \quad \text{y} \quad g(x_n) \rightarrow g(x).$$

Entonces:

(1) Para la suma,

$$\{(f + g)(x_n)\} = \{f(x_n) + g(x_n)\} \rightarrow f(x) + g(x) = (f + g)(x).$$

(2) Para el producto,

$$\{(fg)(x_n)\} = \{f(x_n)g(x_n)\} \rightarrow f(x)g(x) = (fg)(x).$$

(3) Para el cociente,

$$\left\{\frac{f}{g}(x_n)\right\} = \left\{\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\right\} \rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f}{g}(x).$$

■

Este resultado nos permite construir numerosas funciones continuas:

Ejemplos:

- Toda función polinómica $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, con $n \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{R}$ para todo $k = 0, \dots, n$ y $a_n \neq 0$, es continua en $\mathbb{R}$.
- Si p y q son funciones polinómicas con $q \neq 0$, entonces la función racional $f = \frac{p}{q}$ es continua en su dominio natural de definición $\{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$.

Comprobamos ahora la continuidad de la composición.

Proposición 4.15. Sean $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: C \rightarrow \mathbb{R}$ funciones tales que $f(A) \subset C$. Si f es continua en $x \in A$ y g es continua en $f(x) \in f(A)$, la composición $g \circ f$ es continua en x .

En particular, si f es continua en un subconjunto no vacío $B \subset A$ y g es continua en $g(B)$, entonces $g \circ f$ es continua en B .

Demostración

Sea $x \in B$ y $\{x_n\} \subset A$ una sucesión con $x_n \rightarrow x$. Por ser f continua en x , tenemos $f(x_n) \rightarrow f(x)$; por tanto $\{f(x_n)\}$ es una sucesión de puntos de C que converge a $f(x)$. Como g es continua en $f(x) \in f(B)$, concluimos que

$$\{g(f(x_n))\} \rightarrow g(f(x)).$$

Esto prueba que $g \circ f$ es continua en x , y como $x \in B$ era arbitrario, en todo B . ■

El recíproco **no es cierto en general**: puede ocurrir que $g \circ f$ sea continua y, sin embargo, f o g no lo sean.

Para verlo, construimos una función extremadamente discontinua: definimos $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & x \in \mathbb{I}. \end{cases} \quad (4.1)$$

Dado $x \in \mathbb{R}$, la densidad de $\mathbb{Q}$ y de $\mathbb{I}$ en $\mathbb{R}$ nos permiten construir sucesiones $\{q_n\} \subset \mathbb{Q}$ y $\{r_n\} \subset \mathbb{I}$ con $\{q_n\} \rightarrow x$ y $\{r_n\} \rightarrow x$ (esto puede verificarse como **ejercicio**).

Entonces $\{f(q_n)\} \rightarrow -1$ y $\{f(r_n)\} \rightarrow 1$; si f fuese continua en x tendríamos necesariamente $-1 = 1$, contradicción. Así, f no es continua en ningún punto de $\mathbb{R}$.

Podemos observar que $|f| = 1$, lo que nos da una composición continua sin que f lo sea.

Función de Thomae. Definimos $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$T(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \text{ con } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \text{ y } \text{mcd}(|p|, q) = 1, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

(Obsérvese que la condición $\text{mcd}(0, q) = 1$ implica necesariamente que $T(0) = 1$).

Se tiene que T es continua en $\mathbb{I}$ y discontinua en $\mathbb{Q}$.

Continuidad en los irracionales. Sea $x \in \mathbb{I}$ y $\varepsilon > 0$. Elegimos un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Puede comprobarse sin dificultad que en el intervalo $(x - 1, x + 1)$ hay, como mucho, una cantidad finita de racionales de la forma p/q con $0 < q \leq n_0$. Esto nos permite tomar un $\delta > 0$, suficientemente pequeño, de forma que

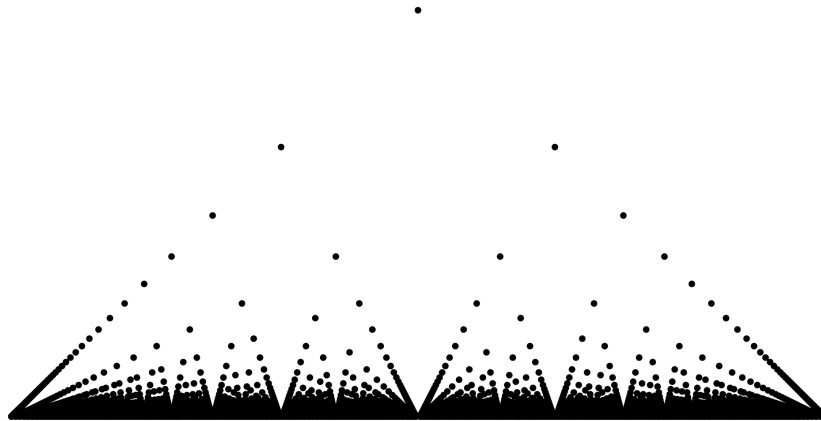
$$(x - \delta, x + \delta) \cap \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} : 0 < q \leq n_0 \right\} = \emptyset.$$

(En efecto, podemos tomar como δ la mitad de la distancia al racional más cercano a x de la forma p/q con $0 < q \leq n_0$.) Sea entonces $y \in \mathbb{R}$ con $|y - x| \leq \delta$. Si y es irracional, entonces $|T(y) - T(x)| = 0 < \varepsilon$ trivialmente. Si $y = \frac{p}{q}$ es racional, tenemos necesariamente $q > n_0$, lo que nos da

$$|T(y) - T(x)| = \frac{1}{q} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Esto demuestra que T es continua en x .

Discontinuidad en los racionales. Sea $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ en forma irreducible. Tomando cualquier sucesión de irracionales $\{x_n\} \rightarrow x$, se tiene $T(x_n) = 0$ para todo n , luego $\{T(x_n)\} \rightarrow 0 \neq \frac{1}{q} = T(x)$. Por la caracterización secuencial de la continuidad, T no es continua en x .



Fuente: Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Thomae%27s_function.

El matemático inglés John H. Conway dotó a esta función del nombre *Estrellas sobre Babilonia* debido a la forma de su gráfica.

La continuidad de una función f es una característica de las que llamaremos *locales*, es decir, para estudiar si f es continua en x , solo nos interesan los valores que toma f cerca de x . Para formalizar esto, necesitamos la siguiente definición:

Definición 4.16. Sean $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $\emptyset \neq B \subset A$. La *restricción* de f a B es la función $f|_B : B \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$(f|_B)(x) = f(x), \quad \forall x \in B.$$

En este contexto, también suele decirse que f es una *extensión* de g .

Proposición 4.17 (Carácter local de la continuidad). Sean $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $\emptyset \neq B \subset A$ y $x \in B$.

- (1) Si f es continua en x , entonces $f|_B$ también es continua en x .
- (2) Si existe $\delta > 0$ tal que $(x - \delta, x + \delta) \cap A \subset B$, y $f|_B$ es continua en x , entonces f es continua en x .

Demostración

- (1) Sea $\{x_n\} \subset B$ con $x_n \rightarrow x$. Entonces $\{x_n\} \subset A$ y, por la continuidad de f en x , se tiene $f(x_n) \rightarrow f(x)$. Como $(f|_B)(x_n) = f(x_n)$, concluimos $(f|_B)(x_n) \rightarrow (f|_B)(x)$.
- (2) Sea ahora $\{x_n\} \subset A$ con $x_n \rightarrow x$. Por la definición de convergencia, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq m$ se cumple $|x_n - x| < \delta$, luego $x_n \in (x - \delta, x + \delta) \cap A \subset B$. Usando la continuidad de $f|_B$ en x , obtenemos

$$n \geq m, \quad f(x_n) = (f|_B)(x_n) \longrightarrow (f|_B)(x) = f(x).$$

Así, f es continua en x . ■

Nota: La hipótesis adicional en (2) no puede eliminarse; dicho de otro modo, el recíproco de (1) es falso en general.

Para comprobar esto, basta considerar la función f definida en (4.1) y $B = \{x\}$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$. $f|_B$ es trivialmente continua, pero f no es continua en x para ningún $x \in \mathbb{R}$.

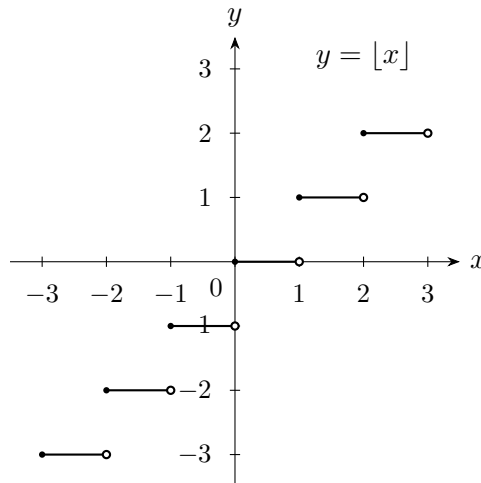
Este resultado es especialmente útil para estudiar funciones cuya definición $f(x)$ cambia a lo largo de su conjunto de definición.

Ejemplo

Problema. Estudiar la continuidad de la función *parte entera*

$$\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$$



Resolución. En primer lugar, veamos que $\lfloor \cdot \rfloor$ es discontinua en todo $x \in \mathbb{Z}$. Para esto, basta considerar la sucesión $x_n = x - \frac{1}{2n}$, ya que $\{x_n\} \rightarrow x$ y $\lfloor x_n \rfloor = x - 1$ para todo n , luego $\{\lfloor x_n \rfloor\} \rightarrow x - 1 \neq \lfloor x \rfloor$.

Sea ahora $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, y definamos $B = (\lfloor x \rfloor, \lfloor x + 1 \rfloor)$. Claramente $x \in B$ y si tomamos $0 < \delta < \min\{\lfloor x + 1 \rfloor - x, x - \lfloor x \rfloor\}$, se tiene

$$(x - \delta, x + \delta) \cap \mathbb{R} \subset B.$$

Por el carácter local de la continuidad, si $\lfloor \cdot \rfloor|_B$ es continua en x , lo será también $\lfloor \cdot \rfloor$. La primera lo es, ya que es constantemente igual a $\lfloor x \rfloor$, esto es:

$$\lfloor y \rfloor = \lfloor x \rfloor \quad \forall y \in B.$$

Por tanto, $\lfloor \cdot \rfloor$ es continua en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Ejemplo

Problema. Sean $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $g(0) = h(0)$. Definimos

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x \leq 0, \\ h(x), & x \geq 0. \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de f en $\mathbb{R}$.

Resolución. Notamos primero que $f|_{\mathbb{R}_0^+} = h$ y $f|_{\mathbb{R}_0^-} = g$, por lo que f es continua en $\mathbb{R}^+$ y en $\mathbb{R}^-$ por el carácter local de la continuidad.

Queda $x = 0$. Tomemos una sucesión $\{x_n\} \rightarrow 0$. Por la caracterización secuencial con sucesiones monótonas, podemos suponer que $\{x_n\}$ es monótona.

Si $\{x_n\}$ es creciente, entonces $x_n \leq 0 \forall n$, y por tanto $\{f(x_n)\} = \{g(x_n)\} \rightarrow g(0) = f(0)$.

Si $\{x_n\}$ es decreciente, entonces $x_n \geq 0 \forall n$, y $\{f(x_n)\} = \{h(x_n)\} \rightarrow h(0) = f(0)$.

En ambos casos $\{f(x_n)\} \rightarrow f(0)$, luego f es continua en 0. Concluimos que f es continua en todo $\mathbb{R}$.

4.3 Límite funcional

En esta sección estudiaremos el comportamiento de una función al acercarnos a un punto de la recta real, que no necesariamente pertenecerá al dominio de la función. Solo necesitaremos que, desde el conjunto en el que trabajamos, podamos acercarnos a dicho punto sin pasar por él.

Definición 4.18. Sea $A \subset \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Diremos que α es *punto de acumulación* de A (o que A se acumula en α) si para todo $\delta > 0$ se verifica

$$(\alpha - \delta, \alpha + \delta) \cap (A \setminus \{\alpha\}) \neq \emptyset.$$

Intuitivamente, $\alpha \in \mathbb{R}$ es un punto de acumulación de A si existen puntos de A distintos de α arbitrariamente cerca de α .

Denotaremos $A' = \{\alpha \in \mathbb{R} : A \text{ se acumula en } \alpha\}$.

Los puntos de acumulación de A se caracterizan por ser puntos de $\mathbb{R}$ a los que se puede llegar mediante sucesiones de A que no pasen por dicho punto.

Proposición 4.19. Sea $A \subset \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\alpha \in A' \iff \exists \{x_n\} \subset A \setminus \{\alpha\} \text{ tal que } \{x_n\} \rightarrow \alpha.$$

Demostración

($\Rightarrow$) Supongamos $\alpha \in A'$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos $\delta = \frac{1}{n}$. Por la definición, existe $x_n \in (\alpha - \frac{1}{n}, \alpha + \frac{1}{n}) \cap (A \setminus \{\alpha\})$, luego $0 < |x_n - \alpha| < \frac{1}{n}$, y por tanto $\{x_n\} \rightarrow \alpha$.

($\Leftarrow$) Si existe $\{x_n\} \subset A \setminus \{\alpha\}$ con $\{x_n\} \rightarrow \alpha$, dado $\delta > 0$ podemos escoger m tal que $|x_m - \alpha| < \delta$. Entonces $x_m \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta) \cap (A \setminus \{\alpha\})$, luego la intersección es no vacía para todo $\delta > 0$. Así, $\alpha \in A'$. ■

Pasamos a calcular los puntos de acumulación de un intervalo real.

Proposición 4.20. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Entonces:

- (1) Si $I = \emptyset$ o $I = \{a\}$ es un punto, entonces $I' = \emptyset$.
- (2) Si I es un intervalo no trivial (contiene al menos dos puntos), entonces:

$$\begin{aligned} (a, b)' &= (a, b]' = [a, b)' = [a, b]' &= [a, b] \\ (a, +\infty)' &= [a, +\infty)' &= [a, +\infty) \\ (-\infty, b)' &= (-\infty, b]' &= (-\infty, b] \\ \mathbb{R}' & &= \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Demostración

Esta demostración no se vio en clase.

(1) Es claro: si $I = \emptyset$ no hay puntos en I ; si $I = \{a\}$, ningún punto $\alpha \neq a$ puede ser de acumulación, ya que todas las sucesiones de puntos de I convergen a a . Además, $a \notin I'$, ya que $I \setminus \{a\} = \emptyset$.

(2) Sea I un intervalo no trivial, esto es, un intervalo que contiene al menos dos puntos. Empezaremos probando que todos los puntos de I son de acumulación, esto es, $I \subset I'$.

Dado $x \in I$, existe $y \in I$ con $y \neq x$. Para $0 < \delta < |y - x|$ se tiene

$$(x - \delta, x + \delta) \cap (I \setminus \{x\}) \neq \emptyset,$$

ya que todos los puntos entre x e y pertenecen a I . Esto nos da que $x \in I'$. Como consecuencia inmediata tenemos $\mathbb{R}' = \mathbb{R}$.

A continuación, demostraremos que si I está acotado y $a = \inf I$, $b = \sup I$, entonces $a, b \in I'$. Por tanto, tendremos $[\alpha, \beta] \subset I'$.

Por definición de intervalo, $(a, b) \subset I$, lo que nos da que para $0 < \delta < \beta - \alpha$ se tiene

$$(a, a + \delta) \cap I \neq \emptyset,$$

luego $\alpha \in I'$. Un razonamiento análogo nos da $\beta \in I'$.

Recíprocamente, probemos que $I' \subset [a, b]$.

Sea $x \in I'$, y $\{x_n\} \subset I \setminus \{x\}$ una sucesión con $\{x_n\} \rightarrow x$. Puesto que $a \leq x_n \leq b$ para todo n , pasando al límite tenemos $a \leq x \leq b$, luego $x \in [a, b]$, como queríamos.

Si I es una semirrecta (abierta o cerrada), un argumento análogo muestra que I' está contenido en la correspondiente semirrecta cerrada. ■

Una regla sencilla que nos permite simplificar el cálculo de los puntos de acumulación de un conjunto es la siguiente:

Proposición 4.21. Para $A, B \subset \mathbb{R}$ se tiene $(A \cup B)' = A' \cup B'$. ■

El ejemplo de los intervalos muestra que, en general, no existe una relación de inclusión entre A y A' . Pueden existir puntos de acumulación de A que no sean elementos de A y puntos de A

que no sean de acumulación. A los segundos se les da el nombre de *puntos aislados*, que describe de forma muy clara a qué tipo de puntos de A nos referimos.

Definición 4.22. Dado $A \subset \mathbb{R}$ no vacío, decimos que $x \in A$ es un *punto aislado* de A si $x \notin A'$.

De forma manifiesta, toda función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en todo punto aislado $x \in A \setminus A'$, ya que la única forma de acercarnos arbitrariamente a x es a través de la sucesión constantemente igual a x .

Proposición 4.23. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $x \in A \setminus A'$. Entonces f es continua en x .

Demostración

Puesto que $x \notin A'$, existe $\delta > 0$ tal que $(x - \delta, x + \delta) \cap A = \{x\}$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, es claro que si $y \in A$ es tal que $|y - x| < \delta$, entonces $y = x$. Por tanto,

$$|f(y) - f(x)| = 0 < \varepsilon.$$

■

Definición 4.24. Sea $A \subset \mathbb{R}$ y $\alpha \in A'$. Decimos que f tiene límite $L \in \mathbb{R}$ en el punto α si para todo $\varepsilon > 0$ puede encontrarse un $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in A \setminus \{\alpha\}$ con $|x - \alpha| < \delta$ se tiene $|f(x) - L| < \varepsilon$. Simbólicamente,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : (x \in A, 0 < |x - \alpha| < \delta) \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

En tal caso escribimos

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = L, \quad \text{o} \quad f(x) \rightarrow L \quad (x \rightarrow \alpha).$$

Nota: Esta definición de límite no es buena si $\alpha \notin A'$, ya que en ese caso existe un $\delta_0 > 0$ tal que

$$\{x \in A : 0 < |x - \alpha| < \delta_0\} = \emptyset.$$

Por lo tanto, para **cualquier** valor $L \in \mathbb{R}$, δ_0 hace cierta la condición de límite ($0 < |x - \alpha| < \delta_0 \implies |f(x) - L| < \varepsilon$), pues esta debe ser verificada para un conjunto vacío de puntos. Esta observación se apoya en un hecho básico de la lógica proposicional, a saber,

$$p \rightarrow q \iff \neg p \vee q,$$

y en este caso siempre tenemos $\neg p$. Esto puede resultar extraño, pues en matemáticas acostumbramos a probar la implicación $p \rightarrow q$ partiendo de que p es cierta, y rara vez contemplamos la posibilidad de que la premisa sea falsa.

Aceptando esta definición para $\alpha \notin A'$, podríamos probar atrocidades contra el sentido común como

$$\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{x} = 27, \quad \text{o también que} \quad \lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{x} = -8,$$

perdiendo de vista la noción intuitiva de acercarnos al punto α a través de puntos de $A \setminus \{\alpha\}$, además de propiedades fundamentales como la unicidad del límite.

Nótese las diferencias con la definición de continuidad en x : en primer lugar, podemos calcular el valor del límite de f en puntos que no están en el dominio de definición de f . Aunque

tuviéramos definido $f(\alpha)$, este no influye en la existencia del límite ni en su valor. Por otro lado, no tiene sentido hablar de límite en los puntos aislados de A , pero sí de continuidad. De hecho, como vimos anteriormente, toda función es continua en los puntos aislados de su dominio.

Al igual que la continuidad, el límite puede caracterizarse mediante sucesiones monótonas. La demostración es completamente análoga a la que se hizo para la continuidad, y la omitiremos en aras de la brevedad.

Proposición 4.25 (Caracterización secuencial del límite funcional). Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función, $\alpha \in A'$ y $L \in \mathbb{R}$. Son equivalentes:

- (i) $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = L$.
- (ii) Para toda sucesión $\{x_n\} \subset A \setminus \{\alpha\}$ con $\{x_n\} \rightarrow \alpha$, se tiene $\{f(x_n)\} \rightarrow L$.
- (iii) Para toda sucesión *monótona* $\{x_n\} \subset A \setminus \{\alpha\}$ tal que $\{x_n\} \rightarrow \alpha$, se tiene $\{f(x_n)\} \rightarrow L$.

La similitud entre las definiciones de continuidad y de límite se concreta en el siguiente hecho elemental.

Proposición 4.26. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $a \in A \cap A'$. Entonces f es continua en a si, y sólo si,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Demostración

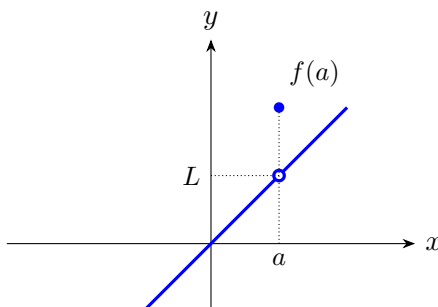
($\Rightarrow$) Si f es continua en a , para cualquier sucesión $\{x_n\} \subset A \setminus \{a\}$ con $\{x_n\} \rightarrow a$ se tiene $\{f(x_n)\} \rightarrow f(a)$. Por la caracterización secuencial del límite, esto es equivalente a decir que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

($\Leftarrow$) Recíprocamente, si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$. La desigualdad sigue siendo cierta si permitimos $x = a$, luego f es continua en a . ■

Esta equivalencia nos permite identificar un primer tipo de discontinuidades: aquellas en las que existe el valor del límite en $a \in A \cap A'$ pero no coincide con $f(a)$. En este caso, redefiniendo $f(a)$ puede hacerse que la función f sea continua, lo que les da el nombre de discontinuidades evitables.

Definición 4.27. Decimos que f tiene una *discontinuidad evitable* en $a \in A \cap A'$ cuando existe el límite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ pero $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$.



Queda por ver el caso en que $\alpha \in A' \setminus A$. Aunque no tengamos f definida en α , la existencia de límite nos permite extender su definición a dicho punto, y la función resultante, además, es continua en α .

Proposición 4.28. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $\alpha \in A' \setminus A$. Son equivalentes:

- (i) $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$ existe.
- (ii) La extensión

$$\tilde{f} : A \cup \{\alpha\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A, \\ \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) & \text{si } x = \alpha. \end{cases}$$

es continua en α .

Demostración

(i) $\Rightarrow$ (ii). Basta aplicar la proposición anterior en α , ya que

$$\tilde{f}(\alpha) = \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} \tilde{f}(x).$$

(ii) $\Rightarrow$ (i). Sea $\{x_n\} \subset A$ (no hace falta eliminar α porque $\alpha \notin A$) con $\{x_n\} \rightarrow \alpha$. Por continuidad de $\tilde{f}$ en α ,

$$\{f(x_n)\} = \{\tilde{f}(x_n)\} \rightarrow \tilde{f}(\alpha),$$

y la caracterización secuencial del límite da que $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$ existe y es $\tilde{f}(\alpha)$. ■

A modo de resumen de lo probado anteriormente, enunciamos una proposición que recoge la relación que existe entre límites y continuidad.

Proposición 4.29. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función e $y \in A \cup A'$.

- Si $y \in A \cap A'$, f es continua en $y \iff \lim_{x \rightarrow y} f(x) = f(y)$.
- Si $y \in A \setminus A'$, f siempre es continua en $f(y)$.
- Si $y \in A' \setminus A$, existe $\lim_{x \rightarrow y} f(x) \iff f$ puede extenderse de forma continua a y . ■

Al igual que la continuidad, el límite es una propiedad local de f . Esta establece que la existencia y el valor del límite de una función en un punto $\alpha \in A'$ solo dependen de los puntos de

$$(\alpha - \delta, \alpha + \delta) \cap (A \setminus \{\alpha\}),$$

para $\delta > 0$ arbitrario.

Proposición 4.30 (Carácter local del límite). Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $B \subset A$ y $\beta \in B'$. Entonces:

- (i) Si f tiene límite en β , también lo tiene $f|_B$ en β y ambos coinciden:

$$\lim_{x \rightarrow \beta} (f|_B)(x) = \lim_{x \rightarrow \beta} f(x).$$

- (ii) Si existe $\delta > 0$ tal que $(\beta - \delta, \beta + \delta) \cap (A \setminus \{\beta\}) \subset B$, y $f|_B$ tiene límite en β , entonces f tiene límite en β y ambos coinciden.

Demostración

Esta demostración no se vio en clase.

(i) Sea $L = \lim_{x \rightarrow a} f$. Dado $\varepsilon > 0$, si $(0 < |x - \beta| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$ se cumple para todo punto $x \in A$, entonces en particular también para todo punto $x \in B$.

(ii) Sea $L = \lim_{x \rightarrow \beta} (f|_B)(x)$. Dado $\varepsilon > 0$, por la definición del límite de $f|_B$ existe $\eta > 0$ tal que

$$x \in B, 0 < |x - \beta| < \eta \implies |(f|_B)(x) - L| < \varepsilon.$$

Tomamos $r = \min\{\eta, \delta\}$. Si $x \in A$ y $0 < |x - \beta| < r$, entonces

$$x \in (\beta - r, \beta + r) \cap (A \setminus \{\beta\}) \subset B,$$

y además $|x - \beta| < \eta$; por tanto $|f(x) - L| = |(f|_B)(x) - L| < \varepsilon$. ■

Ejemplo

Problema. Calcular

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}.$$

Resolución. En primer lugar, aunque no sea necesario, discutimos por qué tiene sentido este límite. En efecto, si $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$, está claro que

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty).$$

Por tanto,

$$1 \in \text{Dom}(f)' = (-\infty, 1] \cup [1, +\infty) = \mathbb{R}.$$

Sea $\{x_n\} \subset \mathbb{R} \setminus \{1\}$ con $\{x_n\} \rightarrow 1$. Para todo n ,

$$\frac{x_n^2 + x_n - 2}{x_n - 1} = \frac{(x_n - 1)(x_n + 2)}{x_n - 1} = x_n + 2,$$

donde el último paso (dividir por $x_n - 1$ numerador y denominador) puede hacerse ya que $x_n \neq 1$. Al pasar al límite,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2 + x_n - 2}{x_n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + 2) = 1 + 2 = 3.$$

Como el valor del límite a lo largo de cualquier sucesión $\{x_n\} \rightarrow 1$ con $x_n \neq 1$ es 3, concluimos que

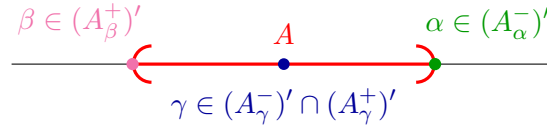
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = 3.$$

Al igual que cuando estudiábamos la continuidad usando sucesiones monótonas, para estudiar el comportamiento de una función al acercarnos a un punto de la recta real, podemos analizar por separado lo que ocurre al aproximarnos por la izquierda o por la derecha. Esto motiva las definiciones de límites a izquierda y a derecha, que veremos enseguida que no son sino casos particulares de la noción de límite que ya conocemos.

Dado $A \subset \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, introducimos la notación

$$A_{\alpha}^{-} = \{x \in A : x < \alpha\}, \quad A_{\alpha}^{+} = \{x \in A : x > \alpha\}.$$

Razonando por contrarrecíproco, nos damos cuenta inmediatamente de que si $\alpha \in A'$, entonces $\alpha \in (A_{\alpha}^{+})' \cup (A_{\alpha}^{-})'$, ya que si A no se acumula ni a la izquierda ni a la derecha de α , entonces no se acumula en α .



Definición 4.31 (Límites laterales). Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

- Si $\alpha \in (A_{\alpha}^{-})'$ (esto es, A se acumula a la *izquierda* de α), decimos que f tiene *límite por la izquierda* en α cuando $f|_{A_{\alpha}^{-}}$ tiene límite L en α . En tal caso escribimos

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^{-}} f(x) = L.$$

- Si $\alpha \in (A_{\alpha}^{+})'$ (esto es, A se acumula a la *derecha* de α), decimos que f tiene *límite por la derecha* en α cuando $f|_{A_{\alpha}^{+}}$ tiene límite L en α . En tal caso escribimos

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^{+}} f(x) = L.$$

Por supuesto, las propiedades del límite ordinario se trasladan a los límites laterales, lo que nos da una triple definición equivalente para los mismo.

Proposición 4.32. Para $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha \in (A_{\alpha}^{-})'$ y $L \in \mathbb{R}$, son equivalentes:

- (i) $\lim_{x \rightarrow \alpha^{-}} f(x) = L$.
- (ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : (x \in A, \alpha - \delta < x < \alpha) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.
- (iii) Para toda sucesión $\{x_n\} \subset A$ con $x_n < \alpha$ y $\{x_n\} \rightarrow \alpha$, se tiene $\{f(x_n)\} \rightarrow L$.
- (iv) Para toda sucesión *creciente* $\{x_n\} \subset A \setminus \{\alpha\}$ con $x_n < \alpha$ y $\{x_n\} \rightarrow \alpha$, se tiene $\{f(x_n)\} \rightarrow L$.

■

La versión para el límite por la derecha se obtiene sustituyendo en (iv) “creciente” por “decreciente”, $x < \alpha$ por $x > \alpha$ en (iii) y, en (ii), la condición $\alpha - \delta < x < \alpha$ por $\alpha < x < \alpha + \delta$.

La principal utilidad de los límites laterales es su relación con el límite ordinario. Cuando A se acumula solo a un lado de un punto $\alpha \in A'$, está claro que las nociones de límite y límite lateral son equivalentes, por lo que el resultado más interesante se tiene cuando A se acumula a ambos lados de un punto $\alpha \in A'$.

Proposición 4.33. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha \in A'$ y $L \in \mathbb{R}$. Entonces:

- (a) Si A se acumula a la *izquierda* de α pero no a la derecha, entonces

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow \alpha^{-}} f(x) = L.$$

(b) Si A se acumula a la *derecha* de α pero no a la izquierda, entonces

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = L.$$

(c) Si A se acumula a la izquierda y a la derecha de α , entonces

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow \alpha^-} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x).$$

Demostración

Las implicaciones hacia la derecha ($\Rightarrow$) son todas inmediatas, pues siempre podemos pasar del límite de f al límite de una restricción cualquiera usando el carácter local del límite funcional.

Para las implicaciones a la izquierda ($\Leftarrow$), tomemos una sucesión monótona $\{x_n\} \subset A \setminus \{\alpha\}$ con $\{x_n\} \rightarrow \alpha$:

- (a) $\{x_n\}$ no puede ser decreciente por tanto es creciente y $x_n < \alpha$ para todo n , de modo que $\{f(x_n)\} \rightarrow L$ por el límite por la existencia de límite a la izquierda.
- (b) Se sigue de un razonamiento análogo al de (a).
- (c) Si $\{x_n\}$ es creciente, usamos el punto (a), y si $\{x_n\}$ es decreciente, el (b). En ambos casos obtenemos $\{f(x_n)\} \rightarrow L$.

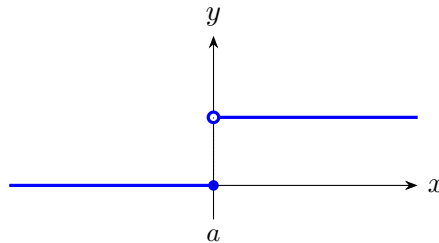
La caracterización secuencial del límite ordinario por sucesiones monótonas concluye la prueba. ■

Como consecuencia del ítem (c), si los límites laterales a izquierda y a derecha de α no coinciden, f no puede tener límite en el punto α . En particular, si f presenta este comportamiento en un punto $a \in A \cap A'$, no puede ser continua en a , independientemente del valor de $f(a)$.

Definición 4.34. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $a \in A \cap A'$ tal que $a \in (A_a^+)' \cap (A_a^-)'$. Si existen los límites laterales a izquierda y a derecha de a pero

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x),$$

entonces f no es continua en a , y decimos que f tiene una *discontinuidad de salto finito* en a .



Ejemplo

Problema. Determinar si es posible elegir $f(1)$ para que la función

$$f(x) = \frac{x-1}{|x-1|}, \quad x \neq 1,$$

sea continua en $x = 1$.

Resolución. El dominio de f es $A = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ y $1 \in A'$, luego para poder extender f de forma continua a 1 debe existir el límite de f en 1. Dado que A se acumula a izquierda y derecha de 1, esto es equivalente a que existan y coincidan los límites laterales.

Límite por la izquierda. Tomemos cualquier sucesión $\{x_n\} \subset A$ con $x_n < 1$ para todo n y $\{x_n\} \rightarrow 1$. Para $x < 1$ se tiene $|x - 1| = 1 - x$, luego

$$\frac{x_n - 1}{|x_n - 1|} = \frac{x_n - 1}{1 - x_n} = -1 \quad \text{para todo } n,$$

y por tanto $\{f(x_n)\} \rightarrow -1$. Así, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$.

Límite por la derecha. Tomemos ahora $\{x_n\} \subset A$ con $x_n > 1$ para todo n y $\{x_n\} \rightarrow 1$. Para $x > 1$ se tiene $|x - 1| = x - 1$, luego

$$\frac{x_n - 1}{|x_n - 1|} = \frac{x_n - 1}{x_n - 1} = 1 \quad \text{para todo } n,$$

y por tanto $\{f(x_n)\} \rightarrow 1$. Así, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$.

Como los límites laterales existen pero no coinciden, no existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$. En consecuencia, no hay elección posible de $f(1)$ que haga a f continua en $x = 1$.

4.4 Límites en el infinito y divergencia de funciones

Nuestro objetivo ahora es extender la noción de límite funcional en dos direcciones. Por un lado, estudiaremos cómo se comporta una función cuando la variable crece o decrece sin cota, introduciendo el límite en el infinito. Por otro, en paralelo con las sucesiones divergentes, veremos también la *divergencia de funciones* en puntos de $\mathbb{R}$. Cerraremos con reglas básicas que permiten interpretar los límites en el infinito como límites ordinarios.

Definición 4.35. Sea $A \subset \mathbb{R}$ no mayorado, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $L \in \mathbb{R}$. Diremos que f tiene límite L en $+\infty$ si para todo $\varepsilon > 0$, existe $K > 0$ tal que

$$x \in A, x > K \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

En tal caso, escribimos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \quad \text{o} \quad f(x) \rightarrow L \quad (x \rightarrow +\infty).$$

De forma análoga tenemos la definición de límite en $-\infty$.

Definición 4.36. Sea $A \subset \mathbb{R}$ no minorado, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $L \in \mathbb{R}$. Diremos que f tiene límite L en $-\infty$ si para todo $\varepsilon > 0$, existe $K < 0$ tal que

$$x \in A, x < K \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

En tal caso, escribimos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \quad \text{o} \quad f(x) \rightarrow L \quad (x \rightarrow -\infty).$$

Por supuesto, estas nuevas nociones de límite pueden caracterizarse mediante sucesiones que divergen a $+\infty$ o $-\infty$. Omitimos la demostración porque sigue la misma idea que la que hicimos para la continuidad.

Proposición 4.37. Sea $A \subset \mathbb{R}$ no mayorado, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $L \in \mathbb{R}$. Son equivalentes:

- (i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$.
- (ii) Para toda sucesión $\{x_n\} \subset A$ con $\{x_n\} \rightarrow +\infty$, se tiene $\{f(x_n)\} \rightarrow L$.
- (iii) Para toda sucesión *creciente* y no mayorada $\{x_n\} \subset A$, se tiene $\{f(x_n)\} \rightarrow L$.

■

Ejemplo

Problema. Calcular

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}).$$

Resolución. Racionalizamos con el conjugado:

$$\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x} = \frac{(x + \sqrt{x}) - x}{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x}}.$$

Como $x \rightarrow +\infty$, podemos restringirnos a considerar valores de $x > 0$, lo que nos permite dividir numerador y denominador por $\sqrt{x}$:

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} + 1}.$$

Como $\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow +\infty$, se obtiene

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{1 + 0} + 1} = \frac{1}{2}.$$

El siguiente resultado nos demuestra que el concepto de límite funcional generaliza al de límite de una sucesión. Para ver esto basta recordar que una sucesión $\{x_n\}$ no es más que una función $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ con $s(n) = x_n$. Dado que $\mathbb{N}$ no está mayorado, tiene sentido hablar de límite (funcional) en $+\infty$ de la función S :

Proposición 4.38. Sea $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ y $L \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = L \iff \{S(n)\} \rightarrow L.$$

Demostración

Esta demostración no se vio en clase.

($\Rightarrow$) Basta tomar la sucesión $\{n\}$, que diverge positivamente: por caracterización secuencial del límite en $+\infty$, $\{S(n)\} \rightarrow L$.

($\Leftarrow$) Supongamos $\{S(n)\} \rightarrow L$. Sea $\{y_n\} \subset \mathbb{N}$ una sucesión con $\{y_n\} \rightarrow +\infty$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|S(k) - L| < \varepsilon$ para todo $k \geq n_0$. Como $\{y_n\} \rightarrow +\infty$, existe $m \in \mathbb{N}$ con $y_n > n_0$ para todo $n \geq m$, y entonces $|S(y_n) - L| < \varepsilon$ para $n \geq m$.

Por tanto, $\{S(y_n)\} \rightarrow L$ y, por la caracterización secuencial, $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = L$. ■

El carácter local del límite en $+\infty$ se enuncia diciendo que para estudiar el límite de una función en $+\infty$, basta considerar valores de la variable suficientemente grandes.

Proposición 4.39. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y supongamos que A no está mayorado. Fijado $\rho > 0$, sea $B = \{x \in A : x > \rho\}$. Entonces, para cualquier $L \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow +\infty} (f|_B)(x) = L.$$

Demostración

Esta demostración no se vio en clase.

($\Rightarrow$) Puesto que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$, dado $\varepsilon > 0$ encontramos $K > 0$ tal que si $x > K$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$. En particular, esto vale para $x \in B$ con $x > K$.

($\Leftarrow$) Sea $\{x_n\} \subset A$ con $\{x_n\} \rightarrow +\infty$. Por definición de divergencia a $+\infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que, si $n \geq n_0$, entonces $x_n > \rho$, luego $x_n \in B$. Entonces, para $n \geq n_0$:

$$\{f(x_n)\} = \{f|_B(x_n)\} \rightarrow L.$$

■

Pasamos ahora al estudio de un tipo concreto de sucesiones que no tienen límite en un punto de acumulación de su dominio de definición: aquellas en las que las imágenes se hacen arbitrariamente grandes o pequeñas al acercarnos a dicho punto.

Definición 4.40. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $\alpha \in A'$.

(i) Diremos que f *diverge a $+\infty$* en α (y escribiremos $f(x) \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow \alpha$)) si

$$\forall K > 0 \exists \delta > 0 : x \in A, 0 < |x - \alpha| < \delta \implies f(x) > K.$$

(ii) Análogamente, f *diverge a $-\infty$* en α (y escribiremos $f(x) \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow \alpha$)) si

$$\forall K < 0 \exists \delta > 0 : x \in A, 0 < |x - \alpha| < \delta \implies f(x) < K.$$

La divergencia de una función en un punto puede caracterizarse mediante sucesiones. Por supuesto, en este caso se tendrá que la sucesión de imágenes es una sucesión que diverge a $+\infty$. Damos el resultado para divergencia hacia $+\infty$, pues el otro caso es análogo. La demostración a estas alturas debería ser un ejercicio sencillo.

Proposición 4.41. Son equivalentes:

- (i) $f(x) \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow \alpha$).
- (ii) Para toda sucesión $\{x_n\} \subset A \setminus \{\alpha\}$ con $\{x_n\} \rightarrow \alpha$, se tiene $\{f(x_n)\} \rightarrow +\infty$.
- (iii) Para toda sucesión *monótona* $\{x_n\} \subset A \setminus \{\alpha\}$ con $\{x_n\} \rightarrow \alpha$, se tiene $\{f(x_n)\} \rightarrow +\infty$.

■

Nota: Como en el caso de sucesiones, una función que diverge a $\pm\infty$ en un punto está muy lejos de tener límite allí. No es aconsejable decir que una función tiene límite $+\infty$ en α ni escribir $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = +\infty$; la formulación que debemos seguir para evitar confusiones es $f(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow \alpha$.

Por supuesto, la divergencia a $\pm\infty$ en α es una propiedad local cuyo enunciado puede trasladarse directamente del de límite en α .

Dado $\alpha \in A'$, podemos hablar de *divergencia lateral* a $\pm\infty$ cuando las correspondientes restricciones de f a izquierda o derecha de α presenten este tipo de divergencia.

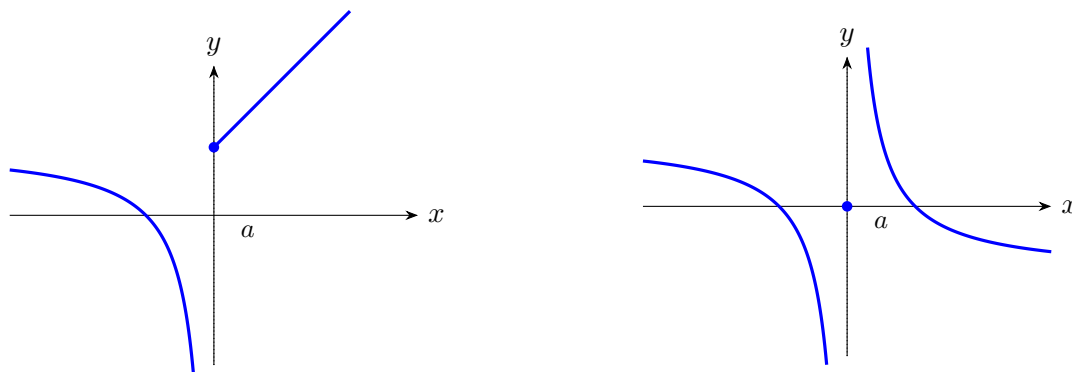
Definición 4.42. Sean $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $\alpha \in A'$. Entonces:

- (i) Si $\alpha \in (A_\alpha^+)'$, decimos que f diverge a $+\infty$ por la derecha en α si $f|_{A_\alpha^+} \rightarrow +\infty$ cuando $(x \rightarrow \alpha)$. En tal caso, escribimos $f(x) \rightarrow +\infty \quad (x \rightarrow \alpha^+)$.
- (ii) Si $\alpha \in (A_\alpha^-)'$, decimos que f diverge a $+\infty$ por la izquierda en α si $f|_{A_\alpha^-} \rightarrow +\infty$ cuando $(x \rightarrow \alpha)$. En tal caso, escribimos $f(x) \rightarrow +\infty \quad (x \rightarrow \alpha^-)$.

Como cabe esperar, esta noción admite una caracterización $K - \delta$ y mediante sucesiones monótonas, que omitimos por cuestiones de brevedad.

Definición 4.43. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $a \in A \cap A'$ con $a \in (A_a^+)' \cap (A_a^-)'$.

- Decimos que f tiene en a una *discontinuidad de salto infinito* si uno de los límites laterales existe pero la función diverge a $+\infty$ o $-\infty$ al otro lado de a .
- Decimos que f tiene en a una *discontinuidad asintótica* en a si f diverge a $+\infty$ o $-\infty$ a ambos lados de a .



Para completar el esquema, describimos ahora la divergencia de una función en $+\infty$ y en $-\infty$.

Definición 4.44. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ con A no mayorado.

- Diremos que f *diverge a $+\infty$* en $+\infty$ y escribiremos $f(x) \rightarrow +\infty \quad (x \rightarrow +\infty)$ si

$$\forall K > 0 \exists M \in \mathbb{R} : x \in A, x > M \implies f(x) > K.$$

- Diremos que f *diverge a $-\infty$* en $+\infty$ y escribiremos $f(x) \rightarrow -\infty \quad (x \rightarrow +\infty)$ si

$$\forall K < 0 \exists M \in \mathbb{R} : x \in A, x > M \implies f(x) < K.$$

Proposición 4.45. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ con A no mayorado. Son equivalentes:

- (i) $f(x) \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow +\infty$).
- (ii) Para toda sucesión $\{x_n\} \subset A$ con $\{x_n\} \rightarrow +\infty$, se tiene $\{f(x_n)\} \rightarrow +\infty$.
- (iii) Para toda sucesión $\{x_n\} \subset A$ *creciente y no mayorada*, se tiene $\{f(x_n)\} \rightarrow +\infty$.

■

La noción de divergencia a $\pm\infty$ en $-\infty$ se obtiene de forma análoga, al igual que la caracterización mediante sucesiones.

Definición 4.46. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ con A no está minorado.

- $f(x) \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$) si $\forall K \in \mathbb{R} \exists M \in \mathbb{R} : x \in A, x < M \implies f(x) > K$.
- $f(x) \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow -\infty$) si $\forall K \in \mathbb{R} \exists M \in \mathbb{R} : x \in A, x < M \implies f(x) < K$.

Proposición 4.47. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ con A no está minorado. Son equivalentes:

- (i) $f(x) \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$).
- (ii) Para toda sucesión $\{x_n\} \subset A$ con $\{x_n\} \rightarrow -\infty$, se tiene $\{f(x_n)\} \rightarrow +\infty$.
- (iii) Para toda sucesión $\{x_n\} \subset A$ *decreciente y no minorada*, se tiene $\{f(x_n)\} \rightarrow +\infty$.

Nuevamente, cambiamos “ $> K$ ” por “ $< K$ ” para la divergencia hacia $-\infty$.

■

Finalmente, vemos que podemos transformar un límite en $+\infty$ con uno en $-\infty$ y viceversa, además de transformar cualquiera de ellos en un límite lateral en 0.

Proposición 4.48. Sean $A \subset \mathbb{R}$ no mayorado, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $L \in \mathbb{R}$. Admitimos también que L pueda ser el símbolo $+\infty$ o $-\infty$.

- (a) Consideramos $g : -A \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(-x)$ para todo $x \in -A$. Entonces

$$f(x) \rightarrow L \ (x \rightarrow +\infty) \iff g(x) \rightarrow L \ (x \rightarrow -\infty).$$

Esto suele escribirse de forma más directa como

$$f(x) \rightarrow L \ (x \rightarrow -\infty) \iff f(-x) \rightarrow L \ (x \rightarrow +\infty).$$

- (b) Sean $B = \{y \in \mathbb{R}^+ : 1/y \in A\}$ y $h : B \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(y) = f(1/y)$. Entonces $0 \in B'$ y

$$f(x) \rightarrow L \ (x \rightarrow +\infty) \iff h(y) \rightarrow L \ (y \rightarrow 0^+),$$

es decir,

$$f(x) \rightarrow L \ (x \rightarrow +\infty) \iff f(1/y) \rightarrow L \ (y \rightarrow 0^+).$$

Combinando (a) y (b) podemos transformar un límite en $-\infty$ en un límite en 0 por la izquierda.

Demostración

Esta demostración no se vio en clase.

- (a) Sea $\{x_n\} \subset A$ con $\{x_n\} \rightarrow +\infty$, entonces $\{-x_n\} \subset -A$ y $\{-x_n\} \rightarrow -\infty$. Así, $\{f(x_n)\} \rightarrow L$ equivale a $\{g(x_n)\} \rightarrow L$. El otro sentido se hace de forma idéntica.

(b) ($\Rightarrow$) Sea $\{y_n\} \subset B$ una sucesión con $\{y_n\} \rightarrow 0$. Entonces, $\frac{1}{y_n} \in A$ y $\{y_n\} \rightarrow +\infty$. Por tanto $\left\{f\left(\frac{1}{y_n}\right)\right\} = h(y_n) \rightarrow L$.
 ($\Leftarrow$) Recíprocamente, si $\{x_n\} \subset A$ con $x_n \rightarrow +\infty$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ de forma que $x_n > 0$ para $n \geq m$. Entonces, para $n \geq m$ se tiene $\{\frac{1}{x_n}\} \subset A$, $\{\frac{1}{x_n}\} \rightarrow 0$. Por tanto, $\{f(x_n)\} = \{h(\frac{1}{x_n})\} \rightarrow L$. ■

Ejemplo

Problema. Determinar razonadamente si existe

$$\lim_{x \rightarrow 0} x e^{1/x}.$$

Resolución. Tenemos que $\text{Dom}(x e^{1/x}) = \mathbb{R}^*$, que se acumula a la izquierda y a la derecha de 0. Por tanto, podemos estudiar los límites laterales $x \rightarrow 0^+$ y $x \rightarrow 0^-$. Usamos el cambio $y = 1/x$, de modo que

$$x e^{1/x} = \frac{e^y}{y}.$$

Límite por la izquierda. Si $x \rightarrow 0^-$ entonces $y = 1/x \rightarrow -\infty$ y

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x e^{1/x} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{e^y}{y} = 0.$$

Límite por la derecha. Si $x \rightarrow 0^+$ entonces $y = 1/x \rightarrow +\infty$ y

$$\frac{e^y}{y} \rightarrow +\infty,$$

lo que nos da $x e^{1/x} \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow 0^+$.

Como uno de los límites laterales no existe, el límite no existe.

Nota. En el ejemplo anterior hemos usado que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p}{a^x} = 0 \quad (a > 1, p > 0).$$

Hasta ahora solo hemos justificado esta afirmación cuando $x = n \in \mathbb{N}$ y $p \in \mathbb{N}$. La versión general con $x \in \mathbb{R}$ se demostrará más adelante, cuando dispongamos de una definición rigurosa de las funciones exponencial, logaritmo y potencia. Mientras tanto, la daremos por conocida para poder presentar ejemplos no triviales de la utilidad del cambio de variable.

4.5 Propiedades de las funciones continuas

Estudiaremos dos resultados fundamentales sobre funciones continuas en intervalos reales. El primero afirma que si una función continua toma dos valores dentro de un intervalo, entonces

toma también todos los valores intermedios; dicho de otro modo, las funciones continuas transforman intervalos en intervalos. El segundo identifica un caso especialmente importante: si el intervalo de partida es cerrado y acotado, su imagen también lo es; en particular, la función alcanza un máximo y un mínimo. Este puede considerarse el primer resultado de optimización que se verá en el curso de cálculo.

Empezamos con una sencilla observación: si una función continua es positiva en un punto, se mantiene positiva en un pequeño entorno de dicho punto. A esto se le llama **propiedad de conservación del signo**.

Proposición 4.49. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en un punto $x \in A$. Si $f(x) > 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que, para todo $y \in A$ con $|y - x| < \delta$, se tiene $f(y) > 0$. Análogamente, si $f(x) < 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $|y - x| < \delta \Rightarrow f(y) < 0$.

Demostración

Si $f(x) > 0$, tomando $\varepsilon = f(x)$ en la caracterización $(\varepsilon - \delta)$ de la continuidad, existe $\delta > 0$ tal que $|y - x| < \delta$, entonces:

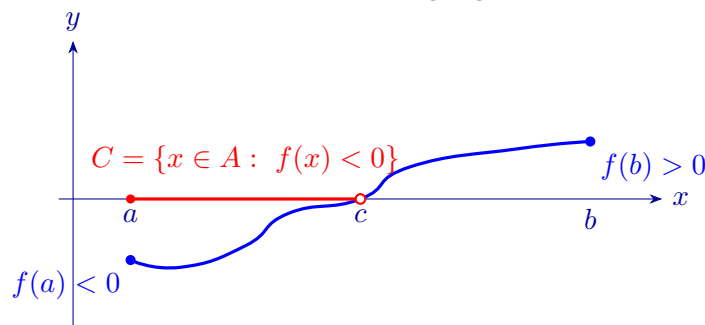
$$|f(y) - f(x)| < f(x) \Rightarrow -f(x) < f(y) - f(x) \Rightarrow f(y) > 0.$$

El caso $f(x) < 0$ se reduce al anterior aplicándolo a $-f$, que es continua en x y verifica $(-f)(x) > 0$. ■

Teorema 4.50 (de los ceros de Bolzano). Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$. Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Demostración

Sea $C = \{x \in [a, b] : f(x) < 0\}$. El conjunto C es no vacío (contiene a a) y está acotado, luego podemos considerar $c = \sup C \in [a, b]$. La idea es probar que $f(c) = 0$.



Razonamos por reducción al absurdo: si $f(c) < 0$, entonces por conservación del signo existe un $\delta > 0$ tal que si $x \in [a, b]$ y $|x - c| < \delta \Rightarrow f(x) < 0$. Nos damos cuenta de que $c + \delta \leq b$, pues si se tuviera $c \leq b < c + \delta$ entonces $f(b) < 0$, que contradice nuestra hipótesis $f(b) > 0$. Si tomamos $x \in (c, c + \delta)$ obtenemos un $x \in [a, b]$, $x > c$, con $f(x) < 0$, que contradice que c sea el supremo de C .

Supongamos ahora que $f(c) > 0$, de nuevo por conservación del signo existiría $\delta > 0$ tal que $|x - c| < \delta \Rightarrow f(x) > 0$. Entonces, todos los puntos de $x \in C$ deben cumplir $|x - c| \geq \delta$. Además, como c es el supremo de C , también ha de darse $x \leq c$, es decir,

$|x - c| = c - x$. Combinando esta información tenemos que

$$x \in C \Rightarrow x \leq c - \delta.$$

Esta desigualdad nos dice que $c - \delta$ es un mayorante de C , lo cual es imposible porque $c - \delta < c$.

Concluimos $f(c) = 0$. ■

Por supuesto, el teorema sigue siendo cierto si $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$, ya que basta con aplicar la versión anterior a $-f$.

Además, el teorema de Bolzano puede trasladarse para encontrar valores de f entre $f(a)$ y $f(b)$, siempre que estos sean distintos. La forma clásica de enunciar esta propiedad es la que sigue:

Teorema 4.51 (del Valor Intermedio). Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Si $I \subset A$ es un intervalo, entonces $f(I)$ es un intervalo. Esto es, si $\alpha, \beta \in f(I)$ con $\alpha < \beta$ entonces $[\alpha, \beta] \subset f(I)$.

Demostración

Basta comprobar que si $\alpha, \beta \in f(I)$ con $\alpha < \beta$ y $\lambda \in (\alpha, \beta)$, entonces $\lambda \in f(I)$.

Sean $x, y \in I$ tales que $f(x) = \alpha$ y $f(y) = \beta$. Como $f(x) \neq f(y)$, no puede darse $x = y$. Así pues, distinguimos casos según el orden de x e y .

Si $x < y$, consideramos $[x, y] \subset I$ y la función continua $g(t) = f(t) - \lambda$ en $[x, y]$. Se tiene $g(x) = \alpha - \lambda < 0$ y $g(y) = \beta - \lambda > 0$. Por el teorema de Bolzano, existe $c \in (x, y)$ con $g(c) = 0$, es decir, $f(c) = \lambda \in f(I)$.

El caso $y < x$ es idéntico usando $[y, x]$ y la función $g(t) = \lambda - f(t)$. ■

El teorema anterior motiva la siguiente definición:

Definición 4.52. Sea I un intervalo no trivial y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Decimos que f tiene la propiedad del valor intermedio si, para todo subintervalo $J \subset I$, $f(J)$ es un intervalo.

Por supuesto, si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua e $I \subset A$ es un intervalo no trivial, entonces $f|_I$ satisface la propiedad del valor intermedio, ya que $f|_J$ sigue siendo continua para todo $J \subset I$, y por tanto $f|_I(J) = f|_J(J)$ es un intervalo por el teorema del valor intermedio.

Lo interesante de esta distinción es que el recíproco no es cierto; existen funciones que satisfacen la propiedad del valor intermedio sin ser continuas, aunque en estos momentos no disponemos de las herramientas necesarias para definir las de forma sencilla. Queda pues prometido este contraejemplo para capítulos posteriores del curso.

Lo que sí podemos ver sin apenas esfuerzo es que no es suficiente con que $f(I)$ sea un intervalo para que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ tenga la propiedad del valor intermedio:

Contraejemplo. Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \in (0, 1], \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Tenemos de forma clara $f([0, 1]) = [0, 1)$, que es un intervalo, Sin embargo, tomando $J = [0, \frac{1}{2}] \subset I$, se tiene $f(J) = \{0\} \cup [\frac{1}{2}, 1)$, que no es un intervalo.

Por otro lado, la hipótesis de que I sea un intervalo es fundamental para garantizar que $f(I)$ es un intervalo para una función continua f , como ilustra el siguiente resultado:

Proposición 4.53. Si $A \subset \mathbb{R}$ no es un intervalo, existe una función continua $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(A)$ tiene exactamente dos elementos.

Demostración

Esta demostración no se vio en clase.

Como A no es un intervalo, existen $x, y \in A$ y $z \in \mathbb{R} \setminus A$ con $x < z < y$. Definimos $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(t) = \frac{t - z}{|t - z|} \quad \forall t \in A.$$

El denominador no se anula (porque $z \notin A$) y f es cociente de funciones continuas, luego es continua en A . Además $|f(t)| = 1$, así que $f(t) \in \{-1, 1\}$ para todo $t \in A$, y como $f(y) = 1$ y $f(x) = -1$, resulta $f(A) = \{-1, 1\}$. ■

Como motivación para la segunda propiedad fundamental de las funciones continuas, nos preguntamos si, en el teorema del valor intermedio, puede conocerse el tipo de intervalo $f(I)$ a partir del tipo de I . En general no hay relación: por ejemplo, una función constante transforma cualquier intervalo en un intervalo cerrado y acotado formado por un único punto, por lo que la acotación de $f(I)$ no nos da ninguna información sobre la de I .

Un ejemplo menos trivial es la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}.$$

No es difícil demostrar que f es continua e inyectiva con $f(\mathbb{R}) = (-1, 1)$, y su inversa, que es la función $f^{-1} : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{1 - |y|}$$

también es continua y envía el intervalo acotado $(-1, 1)$ en $\mathbb{R}$, que no está ni mayorado ni minorado.

Tampoco se conserva ser abierto o cerrado: el valor absoluto lleva $(-1, 1)$ a $[0, 1)$, y con $I = [1, +\infty)$ y $f(x) = 1/x$ aparece $f(I) = (0, 1]$, que no es cerrado.

Sin embargo, hay un caso que sí se preserva: cuando I es cerrado y acotado, también lo es $f(I)$. Esto es precisamente el contenido del teorema de Weierstrass.

Teorema 4.54 (de Weierstrass). Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces, el intervalo $f([a, b])$ es cerrado y acotado.

Demostración

Empezamos probando que $f([a, b])$ es un conjunto acotado, es decir, que el conjunto $\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$ está mayorado.

Razonamos por contradicción: si no está mayorado, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in [a, b]$ tal que $|f(x_n)| > n$. Como $\{x_n\}$ es una sucesión acotada, el teorema de Bolzano-Weierstrass nos proporciona una sucesión parcial convergente: $\{x_{\sigma(n)}\} \rightarrow x \in \mathbb{R}$.

Como $a \leq x_n \leq b$ para todo n , es claro que $x \in [a, b]$, lo que nos permite usar que f es continua en x , para concluir que $\{f(x_{\sigma(n)})\} \rightarrow f(x)$. Pero esto es una contradicción, ya que $|f(x_{\sigma(n)})| > \sigma(n) \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $\{f(x_{\sigma(n)})\} \rightarrow +\infty$.

Sabido que el intervalo $J = f([a, b])$ está acotado, tomamos $\alpha = \inf J$, $\beta = \sup J$ y tenemos $(\alpha, \beta) \subset J \subset [\alpha, \beta]$, luego bastará probar que $\alpha, \beta \in J$ para concluir que $J = [\alpha, \beta]$, un intervalo cerrado y acotado.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, puesto que $\alpha + 1/n$ no es minorante del conjunto $f([a, b])$, por definición de ínfimo existirá un $y_n \in [a, b]$ verificando que $\alpha < f(y_n) < \alpha + 1/n$. Obtenemos así una sucesión $\{y_n\}$ de puntos de $[a, b]$ tal que $\{f(y_n)\} \rightarrow \alpha$.

Aplicando aquí una vez más el teorema de Bolzano-Weierstrass, obtenemos una sucesión parcial $\{y_{\tau(n)}\} \rightarrow y \in [a, b]$. Puesto que f es continua en el punto y , deducimos que $\{f(y_{\tau(n)})\} \rightarrow f(y)$. Ahora bien, $\{f(y_{\tau(n)})\}$ es una sucesión parcial de $\{f(y_n)\}$, luego $\{f(y_{\tau(n)})\} \rightarrow \alpha$ y concluimos que $\alpha = f(y) \in f([a, b])$, como queríamos.

Para comprobar que también $\beta \in f([a, b])$ se razona de manera completamente análoga. ■

Al igual que hicimos con sucesiones, definimos a continuación la monotonía de una función de la forma que cabría esperarse. Veremos entonces dos resultados que relacionan la monotonía de una función y su continuidad, y como consecuencia, un tercero que nos permite deducir la continuidad de la función inversa de una función inyectiva.

Definición 4.55. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Diremos que f es

- **creciente** si: $x, y \in A, x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
- **estrictamente creciente** si: $x, y \in A, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
- **decreciente** si: $x, y \in A, x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.
- **estrictamente decreciente** si: $x, y \in A, x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.
- **monótona** si f es creciente o decreciente.
- **estrictamente monótona** si f es estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

Es fácil observar que las únicas funciones crecientes y decrecientes a la vez son las constantes. Nótese también que una función es estrictamente monótona si es monótona e inyectiva.

Para trabajar con comodidad, dado $B \subset A$, decimos que f es creciente en B si $f|_B$ es una función creciente, con idéntica definición para las otras 5 propiedades vistas.

Por ejemplo, la función valor absoluto $x \mapsto |x|$ es decreciente en $(-\infty, 0]$ y creciente en $[0, +\infty)$, pero no es monótona en $\mathbb{R}$.

Sabemos que toda función estrictamente monótona es inyectiva. A poco que se piense, el recíproco es falso en general. Sin embargo, podemos obtenerlo bajo ciertas condiciones adicionales.

Teorema 4.56. Sea I un intervalo y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua e inyectiva. Entonces f es estrictamente monótona.

La demostración de este resultado es técnica, y conviene dividirla en varios pasos para que sea más fácil de leer y comprender.

Lema 4.57 (Lema 1). Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua e inyectiva, tal que $f(a) < f(b)$, entonces $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ para todo $x \in [a, b]$.

Demostración del lema

Razonemos por reducción al absurdo:

Si $f(x) < f(a)$, aplicamos el teorema del valor intermedio a $f|_{[x,b]}$ que es continua y toma los valores $f(x)$ y $f(b)$, luego debe tomar también el valor intermedio $f(a)$. Por tanto, existe $z \in [x, b]$ tal que $f(z) = f(a)$, pero esto contradice la inyectividad de f , ya que $a \neq z$.

Análogamente, si fuese $f(x) > f(b)$ aplicaremos el teorema del valor intermedio a $f|_{[a,x]}$, obteniendo $z \in [a, x]$ con $f(z) = f(b)$, contradiciendo otra vez la inyectividad de f . ■

Lema 4.58 (Lema 2). La función del Lema 4.57 es creciente.

Demostración

Dados $x, y \in [a, b]$ con $x < y$, por el primer lema tenemos $f(x) \leq f(b)$, de hecho $f(x) < f(b)$, ya que $x < b$ y f es inyectiva. Pero ahora podemos aplicar el mismo lema a $f|_{[x,b]}$, que es continua e inyectiva, con $f(x) < f(b)$, obteniendo $f(x) \leq f(y)$, como queríamos. ■

Demostración del teorema

Esta demostración no se vio en clase.

Basta probar que f es monótona, pues de la inyectividad se deduce que la monotonía es estricta. Empezamos observando que el Lema 4.58 nos resuelve directamente el caso en que I es un intervalo no trivial cerrado y acotado $[a, b]$.

En efecto, si $f(a) < f(b)$, entonces aplicamos el resultado al pie de la letra. Si en cambio $f(a) > f(b)$, aplicamos dicho lema a la función $-f$. Por supuesto, $f(a) = f(b)$ no puede tenerse ya que f es inyectiva.

Vamos al caso general: I es un intervalo arbitrario y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es continua e inyectiva. Razonando por reducción al absurdo, si f no es monótona, existen $x_1, y_1, x_2, y_2 \in I$ tales que:

$$x_1 < y_1, \quad x_2 < y_2, \quad f(x_1) > f(y_1), \quad f(x_2) < f(y_2).$$

Escribiendo $a = \min\{x_1, x_2\} < \max\{y_1, y_2\} = b$, por ser I un intervalo, tenemos $[a, b] \subset I$, lo que permite considerar $f|_{[a, b]}$, que es continua e inyectiva. Como $x_1, y_1, x_2, y_2 \in [a, b]$, dicha función no puede ser monótona, lo cual contradice directamente lo demostrado en el paso anterior. ■

De la monotonía de una función también puede pasarse a la continuidad. El siguiente resultado no requiere que f esté definida en un intervalo, pero sí que lo sea su imagen.

Teorema 4.59. Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es una función monótona, y $f(A)$ es un intervalo, entonces f es continua.

Demostración

Esta demostración no se vio en clase.

Podemos evidentemente suponer que f es creciente, pues en otro caso bastaría usar la función $-f$, cuya imagen también es un intervalo.

Fijado $x \in A$, para probar que f es continua en el punto x , tomamos una sucesión monótona $\{x_n\}$ de puntos de A tal que $\{x_n\} \rightarrow x$ y bastará ver que $\{f(x_n)\} \rightarrow f(x)$. Cubriremos solo el caso en que $\{x_n\}$ es una sucesión creciente, pues el otro se sigue de un razonamiento enteramente análogo.

Por ser $\{x_n\}$ creciente, para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos $x_n \leq x_{n+1} \leq x$, luego $f(x_n) \leq f(x_{n+1}) \leq f(x)$, ya que f es creciente. Por tanto, la sucesión $\{f(x_n)\}$ es creciente y mayorada por $f(x)$, luego convergente. Escribimos

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n).$$

En principio tenemos que $L \leq f(x)$, pero en seguida vemos que suponer que $L < f(x)$ nos lleva a una contradicción.

En efecto, si tomamos un $y \in \mathbb{R}$ tal que $L < y < f(x)$, tenemos $f(x_1) < y < f(x)$ y, usando que $f(A)$ es un intervalo, deberá existir $a \in A$ tal que $f(a) = y$.

Si fuese $x < a$ el crecimiento de f nos daría $f(x) \leq f(a) = y$, que no es cierto. Pero si se tuviese $a < x$, como $\{x_n\} \rightarrow x$, podríamos tomar $m \in \mathbb{N}$ tal que $a < x_m$, con lo que $y = f(a) \leq f(x_m) < L$, que tampoco puede ser cierto.

Hemos demostrado que $L = f(x)$, es decir, $\{f(x_n)\} \rightarrow f(x)$ como queríamos. ■

Conviene resaltar que, en el teorema anterior, el conjunto A no tiene por qué ser un intervalo.

Para una función continua e inyectiva, es natural preguntarse si la inversa también será continua. Usando la relación entre las gráficas de f y de f^{-1} es fácil convencerse de que esto no tiene por qué ser siempre así.

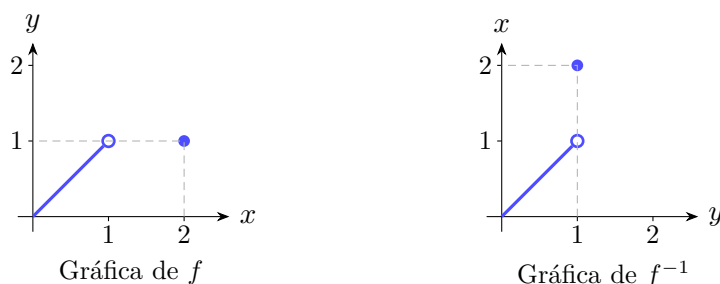
Sean $A = [0, 1[\cup \{2\}$ y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1[, \\ 1, & x = 2. \end{cases}$$

El carácter local de la continuidad nos dice inmediatamente que f es continua, y también es fácil comprobar que f es inyectiva, con $f(A) = [0, 1]$. La inversa $f^{-1} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ viene dada por

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y, & y \in [0, 1[, \\ 2, & y = 1. \end{cases}$$

Tomando la sucesión $\{y_n\}$ con $y_n = 1 - \frac{1}{n}$ se tiene $\{y_n\} \rightarrow 1$ pero $\{f^{-1}(y_n)\} = \{y_n\} \rightarrow 1 \neq 2 = f^{-1}(1)$. Por tanto, f^{-1} no es continua en 1. Las gráficas ayudan a visualizar que f es continua mientras que f^{-1} no lo es:



Como podemos adivinar, esta situación es posible porque A no es un intervalo. El resultado al que queremos llegar afirma que, siempre que A sea un intervalo y f continua e inyectiva, f^{-1} también será continua. Para ello, necesitamos un resultado preliminar que es interesante por sí mismo.

Proposición 4.60. Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es una función estrictamente creciente, entonces $f^{-1} : f(A) \rightarrow \mathbb{R}$ también es estrictamente creciente. Si f es estrictamente decreciente, f^{-1} también lo es.

Demostración

Esta demostración no se vio en clase.

Supongamos que f es estrictamente creciente. Tomamos $u, v \in f(A)$ con $u < v$ y sean $x = f^{-1}(u)$, $y = f^{-1}(v)$. Si fuese $y \leq x$, aplicando que f es creciente tendríamos $v = f(y) \leq f(x) = u$, que es una contradicción, luego deberá ser $x < y$, es decir, $f^{-1}(u) < f^{-1}(v)$. Esto prueba que f^{-1} es estrictamente creciente, como queríamos. En el caso de que f sea estrictamente decreciente, se razona de forma enteramente análoga. ■

Teorema 4.61. Si I es un intervalo y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es estrictamente monótona, entonces f^{-1} es continua. En particular, si f es continua e inyectiva, entonces f^{-1} es continua.

Demostración

Esta demostración no se vio en clase.

En efecto, acabamos de ver que $f^{-1} : f(I) \rightarrow \mathbb{R}$ también es estrictamente monótona, pero su imagen es un intervalo, ya que $f^{-1}(f(I)) = I$, luego f^{-1} es continua. ■