

Apuntes de Cálculo I

Año académico 2026–2027

Tema 3 — Series

Índice general

3	Series	1
3.1	Ejemplos de series	2
3.2	Criterios de convergencia para series de términos no negativos	6
3.3	Criterios de convergencia para series de signo variable	12
3.4	Convergencia incondicional	14

Capítulo 3

Series

Al estudiar una sucesión de números reales $\{x_n\}$ surge de forma natural una nueva idea: la de *sumar todos sus términos*. Para ello podemos considerar las sumas finitas

$$x_1, \quad (x_1 + x_2), \quad (x_1 + x_2 + x_3), \quad \dots, \quad (x_1 + x_2 + \dots + x_n), \quad \dots$$

Si esta nueva sucesión converge, es plausible interpretar su límite como la *suma infinita* de los términos de $\{x_n\}$ a la que queríamos dar sentido.

Definición 3.1. Dada una sucesión de números reales $\{x_n\}$, la *serie de término general* $\{x_n\}$ es la sucesión de *sumas parciales*

$$\{S_n\} = \left\{ \sum_{k=1}^n x_k \right\},$$

y la denotaremos simplemente $\sum_{n \geq 1} x_n$.

Con esta definición queda claro que las series no son un objeto nuevo; son sucesiones cuyo término general se obtiene sumando los términos de otra sucesión. Por tanto, podemos hablar de nociones como convergencia, acotación y monotonía de series simplemente trasladando las correspondientes definiciones para sucesiones.

Definición 3.2. Decimos que la serie $\sum_{n \geq 1} x_n$ es *convergente* si $\{S_n\}$ converge; en tal caso llamamos a su límite la *suma de la serie*, y lo denotamos por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n,$$

que recuerda la idea de que estamos sumando los infinitos términos de la sucesión $\{x_n\}$.

En el estudio de una serie intervienen dos sucesiones, así que conviene fijar una notación que indique claramente a cuál nos estamos refiriendo. La sucesión cuyos términos estamos sumando, $\{x_n\}$, la llamaremos *término general* de la serie, y los propios términos de la serie $\sum_{n \geq 1} x_n$ se denotarán las *sumas parciales* $\{S_n\}$. Como ya hemos mencionado, al límite de la serie lo llamaremos *suma* de la serie, también para diferenciarlo del posible límite de $\{x_n\}$, del que hablaremos enseguida.

Por tanto, si decimos que $\sum_{n \geq 1} x_n$ es una serie de términos no-negativos, nos referimos a que $x_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esta propiedad se traduce inmediatamente en que la sucesión de sumas parciales es creciente.

3.1 Ejemplos de series

Acabamos de ver que toda serie es, por definición, una sucesión. Además, el recíproco también es cierto: cualquier sucesión puede verse como una serie. Por tanto, series y sucesiones no son más que dos puntos de vista diferentes para estudiar el mismo concepto matemático. La utilidad del primero quedará de manifiesto más adelante.

Dada una sucesión $\{y_n\}$, adoptamos por convenio $y_0 = 0$ y definimos

$$x_n = y_n - y_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Entonces

$$S_n = \sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n (y_k - y_{k-1}) = y_1 + (y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + \cdots + y_n = y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Así, estudiar la sucesión y_n equivale a estudiar la serie $\sum_{n \geq 1} (y_n - y_{n-1})$.

Merece la pena dar un nombre a las series cuyo estudio se reduce a considerar una única sucesión en la forma que hemos discutido anteriormente.

Definición 3.3. Diremos que una serie $\sum_{n \geq 1} x_n$ es *telescópica* si su término general puede escribirse de la forma

$$x_n = y_{n+1} - y_n \quad \forall n \geq 1.$$

para alguna sucesión $\{y_n\}$. En ese caso, el estudio de $\sum_{n \geq 1} x_n$ equivale al de $\{y_{n+1} - y_1\}$.

Ejemplo

Problema. Estudiar la convergencia de la *serie de Mengoli*

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Resolución. Observamos que

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Por tanto, las sumas parciales son

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Luego $\{S_n\} \rightarrow 1$ y la serie es convergente con

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Si bien series y sucesiones son conceptos equivalentes, muchos de los ejemplos de sucesiones más importantes que aparecerán en el Análisis Matemático vienen en forma de series. A menudo, no hay una forma cómoda de obtener una fórmula general para la sucesión de sumas parciales de una serie, por lo que nos centraremos en la información sobre la serie $\sum_{n \geq 1} x_n$ que podamos obtener a través de su término general $\{x_n\}$.

Un primer hecho básico es que, si $\{x_n\}$ no converge a 0, la serie $\sum_{n \geq 1} x_n$ no puede ser convergente. De forma equivalente:

Proposición 3.4. Si la serie $\sum_{n \geq 1} x_n$ es convergente, entonces $\{x_n\} \rightarrow 0$.

Demostración

Sea $S_n = \sum_{k=1}^n x_k$ la sucesión de sumas parciales. Si la serie converge, entonces $\{S_n\} \rightarrow S \in \mathbb{R}$. Para $n \geq 1$, podemos escribir

$$x_{n+1} = S_{n+1} - S_n \rightarrow S - S = 0,$$

luego $\{x_n\} \rightarrow 0$. ■

En términos de sucesiones, tendríamos que necesariamente la sucesión de diferencias $\{y_n - y_{n-1}\} \rightarrow 0$ (o equivalentemente $\{y_{n+1} - y_n\} \rightarrow 0$). Es natural preguntarse por el recíproco, esto es, si $\{y_{n+1} - y_n\} \rightarrow 0$ implica que $\{y_n\}$ es convergente. Esta es una pregunta interesante sobre sucesiones que no nos habríamos hecho de no haber adoptado el punto de vista de las series.

Naturalmente, el recíproco es falso: $\{x_n\} \rightarrow 0$ no es suficiente para que $\sum_{n \geq 1} x_n$ sea convergente. Veremos enseguida un ejemplo importante.

Proposición 3.5. La serie armónica

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$$

diverge positivamente.

Demostración

Sea $\{H_n\}$ la sucesión de sumas parciales, esto es,

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Como $\frac{1}{k} > 0$, la sucesión $\{H_n\}$ es creciente. Probamos que no está acotada mostrando, por inducción en $n \in \mathbb{N}$, que

$$H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}.$$

Para $n = 1$ es claro:

$$H_2 = 1 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}.$$

Supuesto cierto para n , entonces

$$H_{2^{n+1}} = H_{2^n} + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geq \left(1 + \frac{n}{2}\right) + (2 \cdot 2^n - 2^n) \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = 1 + \frac{n+1}{2}.$$

Concluimos que $H_{2^n} \rightarrow +\infty$, por lo que $\{H_n\}$ no está acotada. Como además es $\{H_n\}$ creciente, tenemos también $H_n \rightarrow +\infty$. ■

Fijado $x_0 \in \mathbb{R}$, puede interesar que las sumas parciales de una serie arranquen en x_0 , esto es, en

$n = 0$. Denotamos por $\sum_{n \geq 0} x_n$ a la serie cuyas sumas parciales son

$$\tilde{S}_n = \sum_{k=0}^{n-1} x_k = \sum_{k=1}^n x_{k-1}, \quad n \geq 1.$$

En vista de la identidad anterior, está claro que $\sum_{n \geq 0} x_n = \sum_{n \geq 1} x_{n-1}$, y se cumple

$$\tilde{S}_{n+1} = x_0 + S_n, \quad n \geq 1,$$

de donde es claro que la convergencia de $\sum_{n \geq 0} x_n$ equivale a la de $\sum_{n \geq 1} x_n$, y si ambas son convergentes se tiene además

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{S}_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_{n-1} = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

Definición 3.6. Dado $a \in \mathbb{R}$, llamamos *serie geométrica de razón a* a

$$\sum_{n \geq 0} a^n = 1 + a + a^2 + \cdots$$

cuyo término general es $\{a^n\}$.

Como $a^n \rightarrow 0$ sólo si $|a| < 1$, una condición necesaria de convergencia es $|a| < 1$. Vemos inmediatamente que el recíproco también es cierto:

Proposición 3.7. Si $|a| < 1$, la serie geométrica de razón a es convergente y

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}.$$

Demostración

Para $n \in \mathbb{N}$ y $a \neq 1$, la fórmula de la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica es de sobra conocida, y puede demostrarse fácilmente por inducción:

$$\sum_{k=0}^{n-1} a^k = \frac{1 - a^n}{1 - a}.$$

Si $|a| < 1$ entonces $\{a^n\} \rightarrow 0$, y por tanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} a^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - a^n}{1 - a} = \frac{1}{1 - a}.$$

■

También resulta útil poder cortar los primeros términos de una serie. Fijado $p \in \mathbb{N}$, la serie $\sum_{n \geq p+1} x_n$ no es más que la sucesión de sumas parciales

$$\hat{S}_n = \sum_{k=p+1}^{p+n} x_k = \sum_{k=1}^n x_{k+p},$$

de modo que estamos considerando la serie $\sum_{n \geq 1} x_{n+p}$. Las sumas parciales de $\sum_{n \geq p+1} x_n$ y $\sum_{n \geq 1} x_n$ satisfacen la relación

$$\hat{S}_n = \sum_{k=p+1}^{p+n} x_k = S_{p+n} - S_p,$$

de donde es evidente que $\sum_{n \geq p+1} x_n$ converge si, y sólo si, converge $\sum_{n \geq 1} x_n$, y en tal caso, sus sumas verifican

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{k=1}^p x_k + \sum_{n=p+1}^{\infty} x_n.$$

En resumidas cuentas, el carácter de una serie (convergente o divergente) no cambia al eliminar un número finito de términos.

Una sencilla consecuencia del álgebra de sucesiones convergentes nos permite ampliar fácilmente nuestro catálogo de series convergentes.

Proposición 3.8. Sean $\sum_{n \geq 1} x_n$ y $\sum_{n \geq 1} y_n$ series convergentes y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces la serie $\sum_{n \geq 1} (\alpha x_n + \beta y_n)$ es convergente y

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} y_n.$$

Demostración

Para $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$X_n = \sum_{k=1}^n x_k, \quad Y_n = \sum_{k=1}^n y_k, \quad Z_n = \sum_{k=1}^n (\alpha x_k + \beta y_k) = \alpha X_n + \beta Y_n.$$

Como $\{X_n\}$ y $\{Y_n\}$ convergen, también converge $\{Z_n\}$ y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} X_n + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n.$$

Esto prueba la convergencia de $\sum_{n \geq 1} (\alpha x_n + \beta y_n)$ y la identidad anunciada. ■

Ejemplo

Problema. Demostrar que la siguiente serie es convergente y calcular su suma

$$\sum_{n \geq 1} \frac{2^{n-1} + 3^{n+1}}{5^n}.$$

Resolución. Por linealidad de las series y la fórmula de la geométrica:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{2^{n-1} + 3^{n+1}}{5^n} = \frac{1}{5} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} + \frac{9}{5} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{5}} + \frac{9}{5} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{5}} = \frac{1}{3} + \frac{9}{2} = \frac{29}{6}.$$

3.2 Criterios de convergencia para series de términos no negativos

En lo que sigue trabajaremos con series de la forma $\sum_{n \geq 1} a_n$ con $a_n \geq 0$. Este tipo de series son sucesiones crecientes, ya que $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo que simplifica su estudio. De hecho, hemos visto que una sucesión creciente solo puede ser convergente o divergir a $+\infty$, dependiendo de si está mayorada o no.

$$\sum_{n \geq 1} a_n \text{ converge} \iff \{S_n\} \text{ está mayorada.}$$

Por tanto, de la convergencia de una serie podemos deducir la de muchas otras a las que esta mayorada.

Proposición 3.9 (Criterio de comparación). Sean $\sum_{n \geq 1} a_n$ y $\sum_{n \geq 1} b_n$ dos series con $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$. Supongamos que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \leq b_n$ para todo $n \geq p$. Entonces,

$$\sum_{n \geq 1} b_n \text{ convergente} \implies \sum_{n \geq 1} a_n \text{ convergente.}$$

Demostración

Por ser $\sum_{n \geq 1} b_n$ convergente, está mayorada, es decir, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sum_{k=1}^n b_k \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sumando término a término la desigualdad $0 < a_{k+p} \leq b_{k+p}$ para $k = 1, \dots, n$, se tiene

$$\sum_{k=1}^n a_{k+p} \leq \sum_{k=1}^n b_{k+p} \leq \sum_{k=1}^{n+p} b_k \leq M.$$

Al estar mayorada, la serie $\sum_{n \geq 1} a_{n+p} = \sum_{n \geq p+1} a_n$ es convergente, lo que equivale a la convergencia de la serie $\sum_{n \geq 1} a_n$. ■

Si bien el anterior criterio de comparación tiene utilidad en sí mismo, su principal función es permitirnos demostrar el siguiente, que es más potente y práctico.

Proposición 3.10 (Criterio de comparación por paso al límite). Sean $a_n \geq 0$ y $b_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y supongamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L \geq 0.$$

- (1) Si $L > 0$, $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge $\iff \sum_{n \geq 1} b_n$ converge.
- (2) Si $L = 0$ y $\sum_{n \geq 1} b_n$ converge $\implies \sum_{n \geq 1} a_n$ converge.

Demostración

- (1) Tomando $\varepsilon = L/2$, encontramos un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq n_0$,

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - L \right| < \frac{L}{2} \implies \frac{L}{2} b_n \leq a_n \leq \frac{3L}{2} b_n.$$

Aplicamos el criterio de comparación entre $\sum_{n \geq 1} \frac{L}{2} b_n$ y $\sum_{n \geq 1} a_n$, y luego entre $\sum_{n \geq 1} a_n$ y $\sum_{n \geq 1} \frac{3L}{2} b_n$, teniendo en cuenta que multiplicar una sucesión por una constante positiva no afecta a su convergencia.

- (2) Tomemos $\varepsilon = 1$. Entonces existe n_0 tal que, para $n \geq n_0$, $\frac{a_n}{b_n} < 1$, es decir, $0 \leq a_n \leq b_n$. Si $\sum_{n \geq 1} b_n$ converge, también lo hace $\sum_{n \geq 1} a_n$ por el primer criterio de comparación. ■

Nota: Si $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\} \rightarrow +\infty$, entonces $\left\{ \frac{b_n}{a_n} \right\} \rightarrow 0$. Aplicando el punto (2) intercambiando los papeles de $\sum_{n \geq 1} a_n$ y $\sum_{n \geq 1} b_n$, tenemos:

$$\text{si } \sum_{n \geq 1} a_n \text{ converge} \implies \sum_{n \geq 1} b_n \text{ converge.}$$

Por contrarrecíproco, esta afirmación es equivalente a

$$\text{si } \sum_{n \geq 1} b_n \text{ diverge} \implies \sum_{n \geq 1} a_n \text{ diverge.}$$

Ejemplo

Problema. Estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n}{n^2 + 3n + 4}.$$

Resolución. Tomamos $b_n = \frac{1}{n}$. Entonces

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{n}{n^2+3n+4}}{\frac{1}{n}} = \frac{n^2}{n^2 + 3n + 4} \rightarrow 1 (> 0).$$

Por el criterio de comparación por paso al límite, la serie dada converge si y sólo si lo hace $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$, que es la armónica y diverge. Luego $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{n^2+3n+4}$ diverge positivamente.

Ejemplo

Problema. Para $p \in \mathbb{N}$ con $p \geq 2$, la *serie armónica con exponente p* es convergente.

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^p}.$$

Resolución. En primer lugar, veamos que podemos reducirnos al caso $n = 2$: si $p \geq 2$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces de $n^p \geq n^2$ se sigue que

$$0 < \frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Por el *criterio de comparación*, si $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge entonces también lo harán las de exponente p para todo $p \geq 2$.

Sea $b_n = \frac{1}{n(n+1)}$. Sabemos que la serie de Mengoli $\sum_{n \geq 1} b_n$ es convergente, y se verifica

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \frac{n(n+1)}{n^2} = 1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1 (> 0).$$

Por el *criterio de comparación por paso al límite*, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

Observación. Que la convergencia de dos series sea *equivalente* no significa en absoluto que tengan la misma *suma*. Los criterios de comparación miran el comportamiento *asintótico* (para n grandes), mientras que la suma depende de *todos* los sumandos, incluidos los primeros. En particular, por comparación, las series

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \quad \text{y} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$$

son asintóticas la una a la otra (su carácter es equivalente), pero sus sumas no coinciden:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

(La segunda igualdad requiere herramientas más avanzadas; por ejemplo, series de Fourier.)

Teorema 3.11 (Criterio de la raíz para series). Sea $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que $\{\sqrt[n]{a_n}\} \rightarrow L \geq 0$.

- (1) Si $L > 1$, entonces $\{a_n\} \nrightarrow 0$, y la serie $\sum_{n \geq 1} a_n$ diverge positivamente.
- (2) Si $L < 1$, entonces la serie $\sum_{n \geq 1} a_n$ es convergente.

Demostración

- (1) Comprobemos que si $\{a_n\} \rightarrow 0$, entonces necesariamente $L \leq 1$. En efecto, si $a_n \rightarrow 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq m$, se tiene $0 \leq a_n < 1$, luego

$$\sqrt[n]{a_n} < 1 \quad \forall n \geq m.$$

Pasando al límite, tenemos $L \leq 1$, como se buscaba.

- (2) Tomando $\varepsilon > 0$ de forma que $0 \leq L + \varepsilon < 1$ (por ejemplo, $\varepsilon = \frac{1-L}{2}$), encontramos un $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq m$, se tiene

$$|\sqrt[n]{a_n} - L| < \varepsilon \implies \sqrt[n]{a_n} < (L + \varepsilon) \implies a_n < (L + \varepsilon)^n.$$

La serie geométrica $\sum_{n \geq 1} (L + \varepsilon)^n$ converge, ya que $0 < L + \varepsilon < 1$, de modo que también lo hace $\sum_{n \geq 1} a_n$ por el primer criterio de comparación. ■

Nota: Si $L = 1$, el criterio anterior no decide:

$$\left\{ \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \right\} \rightarrow 1 \text{ y } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \text{ diverge,} \quad \left\{ \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} \right\} \rightarrow 1 \text{ y } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \text{ converge.}$$

La combinación del criterio anterior junto al criterio de la raíz para sucesiones nos da el siguiente:

Proposición 3.12 (Criterio del cociente o de d'Alembert). Sea $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que

$$\left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\} \rightarrow L \geq 0.$$

- (1) Si $L > 1$, entonces $a_n \not\rightarrow 0$, luego la serie $\sum_{n \geq 1} a_n$ diverge.
- (2) Si $L < 1$, entonces la serie $\sum_{n \geq 1} a_n$ es convergente.

Ejemplo

Problema. Fijados $q \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$ con $x > 1$, la serie

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n^q}{x^n}.$$

es convergente.

Resolución. Sea $a_n = \frac{n^q}{x^n}$. Entonces

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^q}{n^q x} = \frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^q \rightarrow \frac{1}{x} < 1.$$

Por el *criterio del cociente*, la serie $\sum_{n \geq 1} a_n$ es convergente.

En particular, $\{a_n\} = \left\{ \frac{n^q}{x^n} \right\} \rightarrow 0$, que es un resultado de sucesiones que tuvimos que demostrar por inducción usando el criterio de Stolz.

Aunque *a priori* puedan parecernos criterios equivalentes, no es difícil comprobar que el *criterio de la raíz* puede decidir casos en los que el del *cociente* no lo hace. Consideremos

$$\sum_{n \geq 1} a_n, \quad a_n = \frac{3 + (-1)^n}{2^n}.$$

Para $n \in \mathbb{N}$,

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{3 + (-1)^n}}{2} = \begin{cases} \frac{\sqrt[n]{2}}{2} & \text{si } n \text{ es impar,} \\ \frac{\sqrt[n]{4}}{2} & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

En ambos casos $\left\{ \sqrt[n]{a_n} \right\} \rightarrow \frac{1}{2} < 1$, luego, por el *criterio de la raíz*, la serie es convergente. Sin embargo,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3 + (-1)^{n+1}}{2(3 + (-1)^n)} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es impar,} \\ \frac{1}{4} & \text{si } n \text{ es par,} \end{cases}$$

de modo que el *criterio del cociente* no puede aplicarse.

Ejemplo

Problema. Estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

Resolución. Sea $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$. Claramente $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y podemos considerar el cociente

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^2 (2n)!}{(2n+2)! (n!)^2} = \frac{(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{n^2 + 2n + 1}{4n^2 + 6n + 2} \rightarrow \frac{1}{4} < 1.$$

Por el criterio del cociente, la serie es convergente.

Proposición 3.13 (Criterio de condensación de Cauchy). Sea $\{a_n\}$ una sucesión *decreciente* con $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\sum_{n \geq 1} a_n \quad \text{converge} \iff \sum_{n \geq 0} 2^n a_{2^n} \quad \text{converge}$$

Demostración

Consideramos las sumas parciales de cada serie:

$$A_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad B_n = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k a_{2^k} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Empezamos mostraremos por inducción que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$A_{2^n-1} \leq B_n \leq 2 A_{2^n-1}. \quad (1)$$

A partir de esta cadena de desigualdades deduciremos fácilmente que $\{A_n\}$ está mayorada si y solo si lo está $\{B_n\}$.

Etap base $n = 1$. Se tiene $A_1 = a_1 \leq a_1 = B_1 \leq 2a_1 = 2A_1$.

Paso inductivo. Supongamos que 1 es cierta para n . Por ser $\{a_n\}$ decreciente, se tiene que $j \leq 2^n \leq k \Rightarrow a_k \leq a_{2^n} \leq a_j$, y deducimos que:

$$\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_k \leq 2^n a_{2^n} = 2 \cdot 2^{n-1} a_{2^n} \leq 2 \sum_{j=2^{n-1}+1}^{2^n} a_j, \quad (2)$$

donde hemos usado que la suma del primer miembro tiene 2^n sumandos, y la del último tiene 2^{n-1} . Usando la hipótesis de inducción y (2) tenemos

$$A_{2^{n+1}-1} = A_{2^n-1} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_k \leq A_{2^n-1} + 2^n a_{2^n} \leq B_n + 2^n a_{2^n} = B_{n+1},$$

y también

$$B_{n+1} = B_n + 2^n a_{2^n} \leq 2A_{2^n-1} + 2^n a_{2^n} \leq 2 \left(A_{2^n-1} + \sum_{j=2^{n-1}+1}^{2^n} a_j \right) = 2A_{2^n}.$$

Como $\{A_n\}$ y $\{B_n\}$ son crecientes, $A_n \leq A_{2^n-1} \leq B_n$, luego $\{A_n\}$ está mayorada si lo está $\{B_n\}$. Recíprocamente, si $\{A_n\}$ está mayorada, entonces también lo está su subsucesión A_{2^n-1} , y por tanto B_n . ■

Idea de la demostración anterior

Esta demostración no se vio en clase.

La clave son las dos estimaciones que se obtienen de la monotonía decreciente de $\{a_n\}$:

$$\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_k \leq 2^n a_{2^n}, \quad 2^n a_{2^n} \leq 2 \sum_{j=2^{n-1}+1}^{2^n} a_j.$$

La primera *condensa*: en el bloque de 2^n sumandos sustituimos cada uno por el mayor del bloque, a_{2^n} . La segunda *descondensa*: repartimos el único término $2^n a_{2^n}$ en una suma de 2^{n-1} términos, cada uno $\geq a_{2^n}$.

El mecanismo se visualiza comprobando el caso $n = 4$:

$$\begin{aligned} A_{15} &= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + (a_8 + a_9 + \cdots + a_{15}) \\ &\leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 = B_4 \\ &\leq 2(a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8)) = 2A_8. \end{aligned}$$

En la primera desigualdad cada bloque se *condensa* mayorando por su primer término; en la segunda, $8a_8$ se *descondensa* mayorando por $a_5 + a_6 + a_7 + a_8$ (y análogamente $4a_4$ por $(a_3 + a_4)$ y $2a_2$ por $a_1 + a_2$).

Esto ejemplifica por qué $A_{2^n-1} \leq B_n \leq 2A_{2^n-1}$ y, por tanto, la equivalencia de convergencia. ■

La convergencia de la serie armónica de exponente $p \in \mathbb{N}$ podría haberse estudiado aplicando un único criterio, de la siguiente manera:

Ejemplo

Problema. Estudiar la convergencia de la serie armónica con exponente p ,

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^p}, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Resolución. Aplicamos la condensación a $a_n = \frac{1}{n^p}$ (sucesión decreciente y positiva):

$$\sum_{n \geq 0} 2^n a_{2^n} = \sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{(2^n)^p} = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2^{p-1}} \right)^n.$$

Es una geométrica de razón $1/2^{p-1}$. Converge si $p > 1$ y diverge si $p = 1$. Por el criterio de condensación, la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^p}$ converge para $p > 1$ y diverge (positivamente) para $p = 1$.

Ejemplo

Problema. Para $q \in \mathbb{N}$, estudiar la convergencia de

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n \sqrt[q]{n}}.$$

Resolución. Sea $a_n = \frac{1}{n \sqrt[q]{n}}$. Entonces $a_n > 0$ y $\{a_n\}$ es decreciente, por lo que podemos aplicar el *criterio de condensación*. Calculamos

$$2^n a_{2^n} = 2^n \cdot \frac{1}{2^n \sqrt[q]{2^n}} = \frac{1}{\sqrt[q]{2^n}} = \left(\frac{1}{2^{1/q}} \right)^n.$$

La serie condensada $\sum_{n \geq 0} 2^n a_{2^n}$ es geométrica de razón $2^{-1/q} < 1$, luego es convergente. Por el criterio de condensación, también converge la serie inicial

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n \sqrt[q]{n}}.$$

(Equivalente a la serie armónica de exponente $1 + \frac{1}{q} > 1$.)

3.3 Criterios de convergencia para series de signo variable

Hasta ahora hemos estudiado series de términos no negativos. Pasamos al caso general, y consideramos series $\sum_{n \geq 1} x_n$ con $x_n \in \mathbb{R}$.

En primer lugar, nos damos cuenta de que el caso realmente nuevo es cuando aparecen infinitos términos positivos e infinitos términos negativos, ya que:

- (1) Si el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n < 0\}$ es finito, existe $m \in \mathbb{N}$ de forma que $x_n \geq 0$ para $n \geq m$, y sabemos que la convergencia de $\sum_{n \geq 1} x_n$ equivale entonces a la de

$$\sum_{n \geq m} x_n,$$

que es de términos no negativos.

- (2) De forma análoga, si $\{n \in \mathbb{N} : x_n > 0\}$ es finito, estudiamos entonces la $\sum_{n \geq 1} (-x_n)$, que se encuentra en las condiciones del punto (1).

Cuando $\sum_{n \geq 1} x_n$ tiene infinitos términos positivos e infinitos negativos, resulta natural comparar la serie con $\sum_{n \geq 1} |x_n|$, lo que nos lleva a la siguiente noción:

Definición 3.14. Dada una serie de números reales $\sum_{n \geq 1} x_n$, diremos que es *absolutamente convergente* cuando la serie de valores absolutos

$$\sum_{n \geq 1} |x_n|$$

es convergente.

Como la nomenclatura sugiere, toda serie absolutamente convergente es convergente. Este hecho es una consecuencia del Teorema de completitud de $\mathbb{R}$.

Teorema 3.15. Toda serie absolutamente convergente es convergente. Más aún, si $\sum_{n \geq 1} |x_n|$ converge, entonces $\sum_{n \geq 1} x_n$ también converge y

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|.$$

Demostración

Consideremos las sumas parciales de ambas series: $S_n = \sum_{k=1}^n x_k$ y $\sigma_n = \sum_{k=1}^n |x_k|$ para $n \in \mathbb{N}$. Para $p, q \in \mathbb{N}$ con $q < p$,

$$|S_p - S_q| = \left| \sum_{k=q+1}^p x_k \right| \leq \sum_{k=q+1}^p |x_k| = \sigma_p - \sigma_q = |\sigma_p - \sigma_q|.$$

Nótese que la desigualdad anterior es obvia cuando $p = q$ y, si $p < q$, basta intercambiar las etiquetas de p y q . Por tanto, es válida para todo $p, q \in \mathbb{N}$.

Sabemos que $\{\sigma_n\}$ converge, luego es de Cauchy. Por la desigualdad anterior, $\{S_n\}$ también es de Cauchy y, por completitud de $\mathbb{R}$, converge. Es decir, la serie $\sum_{n \geq 1} x_n$ es convergente.

Finalmente, como $|S_n| \leq \sigma_n$ para todo n y $\sigma_n \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$, pasamos al límite y obtenemos

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|.$$

■

El recíproco no es cierto, y para entender por qué estudiaremos las *series alternadas* y el *criterio de Leibniz*, que proporciona numerosos ejemplos de series convergentes que no lo son absolutamente.

Definición 3.16. Llamamos *serie alternada* a cualquier serie de la forma

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^n a_n \quad \text{o} \quad \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} a_n,$$

donde $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por ejemplo, la serie

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

recibe el nombre de *serie armónica alternada*. Claramente, esta serie no es absolutamente convergente, ya que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge, pero veremos enseguida que sí es convergente.

Proposición 3.17 (Criterio de Leibniz). Sea $\{a_n\}$ una sucesión decreciente con $\{a_n\} \rightarrow 0$. Entonces la serie alternada

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^n a_n$$

es convergente.

Demostración

Sea $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k a_k$. Vamos a demostrar que S_n es convergente probando que S_{2n-1} y S_{2n} convergen al mismo límite.

Usando que a_n es decreciente y $a_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\begin{aligned} S_{2n-1} &\leq S_{2n-1} + \underbrace{a_{2n} - a_{2n+1}}_{\geq 0} = S_{2n+1} \\ &\leq S_{2n+1} + a_{2n+2} = S_{2n+2} = S_{2n} - \underbrace{a_{2n+1} + a_{2n+2}}_{\leq 0} \leq S_{2n}. \end{aligned}$$

En resumidas cuentas, hemos visto que $S_{2n-1} \leq S_{2n+1} \leq S_{2n+2} \leq S_{2n}$. Por tanto, $\{S_{2n-1}\}$ es creciente y $\{S_{2n}\}$ es decreciente. En particular,

$$S_1 \leq S_{2n-1} \leq S_{2n} < S_2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por ser sucesiones monótonas y acotadas, son convergentes, pero es claro que

$$\{S_{2n} - S_{2n-1}\} = \{a_{2n}\} \longrightarrow 0.$$

Esto nos da que S_{2n} y S_{2n-1} tienen el mismo límite, y por tanto S_n también converge a dicho límite (recuérdese el ejercicio de la página 28). ■

3.4 Convergencia incondicional

Complementamos este capítulo discutiendo sobre la pregunta que nos hicimos al principio: ¿es realmente correcto interpretar la suma de una serie convergente como la suma de todos los términos de una sucesión?

Hemos visto que en algunos casos la suma de una serie presenta ciertas propiedades de distributividad y de asociatividad. Nos preguntamos ahora por la posible conmutatividad en un sentido muy general: si permutamos de cualquier forma los sumandos de una serie, ¿se mantiene la convergencia y la suma de la serie sigue siendo la misma? Vamos a comentar algunos resultados acerca de esta cuestión, sin entrar en las demostraciones.

Definición 3.18. Una *permutación* de los números naturales es una aplicación biyectiva $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Dadas una sucesión $\{x_n\}$ y una permutación π de los números naturales, podemos formar la sucesión $\{x_{\pi(n)}\}$, que consiste en reordenar los términos de $\{x_n\}$ según π .

Pues bien, si la serie $\sum_{n \geq 1} x_n$ es convergente y la suma de series verificase la propiedad conmutativa, la serie *reordenada* $\sum_{n \geq 1} x_{\pi(n)}$ debería ser convergente y tener la misma suma que la serie de partida. En principio esto no está nada claro, ya que es difícil relacionar las sumas parciales de ambas series.

Definición 3.19. Se dice que una serie de números reales $\sum_{n \geq 1} x_n$ es *incondicionalmente convergente* cuando, para cualquier permutación π de los números naturales, la serie reordenada

$$\sum_{n \geq 1} x_{\pi(n)}$$

es convergente.

Es claro que toda serie incondicionalmente convergente es convergente, pues basta tomar $\pi(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De hecho, se tiene la siguiente equivalencia:

Teorema 3.20. Sea $\sum_{n \geq 1} x_n$ una serie de números reales. Entonces, $\sum_{n \geq 1} x_n$ es incondicionalmente convergente si, y solo si, es absolutamente convergente. En tal caso:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

para toda permutación $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

Como se ha dicho, no vamos a exponer con detalle la demostración de esta equivalencia, pero sí vamos profundizar en un hecho que aparece tácitamente en el resultado anterior: si $\sum_{n \geq 1} x_n$ converge pero no lo hace absolutamente, podemos reordenar sus términos para formar una sucesión divergente. Pero peor aún, incluso para las reordenaciones que dan lugar a series convergentes, la suma que se obtiene depende de la permutación de los números naturales que usemos. Este resultado se debe al matemático alemán Bernhard Riemann y puede enunciarse como sigue.

Teorema 3.21 (Teorema de Riemann). Sea $\sum_{n \geq 1} x_n$ una serie convergente, que no converja absolutamente, y fijemos $s \in \mathbb{R}$. Entonces existen permutaciones π_+ , π_- y π_s de los números naturales, tales que $\sum_{n \geq 1} x_{\pi_+(n)} \rightarrow +\infty$, $\sum_{n \geq 1} x_{\pi_-(n)} \rightarrow -\infty$ y la serie $\sum_{n \geq 1} x_{\pi_s(n)}$ converge, con

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi_s(n)} = s.$$

Dicho de forma más intuitiva, toda serie convergente que no converja absolutamente, puede reordenarse para que diverja positivamente, para que diverja negativamente, y también para que converja a cualquier número real que queramos.

Curiosidad: demostración del Teorema de Riemann para $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Empezamos escribiendo sus términos positivos y negativos por separado.

$$p_k = \frac{1}{2k-1}, \quad q_k = \frac{-1}{2k} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Claramente $\{p_k\}_k \rightarrow 0$ y $\{q_k\} \rightarrow 0$. Llamemos $\{P_k\}$ y $\{Q_k\}$ a las correspondientes sumas parciales de k términos, esto es,

$$P_k = \sum_{j=1}^k \frac{1}{2j-1}, \quad Q_k = \sum_{j=1}^k \frac{-1}{2j}, \quad j \in \mathbb{N}$$

Es fácil ver que

$$Q_k = \frac{-1}{2} \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \rightarrow -\infty, \quad \text{y} \quad P_k \geq -Q_k,$$

luego $\{P_k\} \rightarrow +\infty$.

Fijemos $s \geq 0$ por simplicidad. Como $\{P_k\} \rightarrow +\infty$ y $\{Q_k\} \rightarrow -\infty$, podemos definir

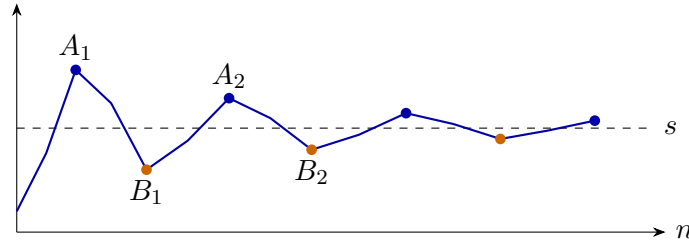
$$a_1 = \min \left\{ N \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^N p_k > s \right\}, \quad A_1 = \sum_{k=1}^{a_1} p_k,$$

$$b_1 = \min \left\{ N \in \mathbb{N} : A_1 + \sum_{k=1}^N q_k < s \right\}, \quad B_1 = A_1 + \sum_{k=1}^{b_1} q_k.$$

Para cada $q \in \mathbb{N}$, las series $\sum_{k \geq q+1} p_k$ y $\sum_{k \geq q+1} q_k$ tienen el mismo carácter que las originales, lo cual nos permite definir la ley de recurrencia

$$a_{n+1} = \min \left\{ N \in \mathbb{N}, N > a_n : B_n + \sum_{k=a_n+1}^N p_k > s \right\}, \quad A_{n+1} = B_n + \sum_{k=a_n+1}^{a_{n+1}} p_k,$$

$$b_{n+1} = \min \left\{ N \in \mathbb{N}, N > b_n : A_{n+1} + \sum_{k=b_n+1}^N q_k < s \right\}, \quad B_{n+1} = A_{n+1} + \sum_{k=b_n+1}^{b_{n+1}} q_k$$



Por definición, $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son sucesiones estrictamente crecientes. Además, $a_n, b_n \in \mathbb{N}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $a_n \geq n$ y $b_n \geq n$, lo que nos da que $\{a_n\} \rightarrow +\infty$ y $\{b_n\} \rightarrow +\infty$. Por tanto, en la reordenación

$$p_1, \dots, p_{a_1}, q_1, \dots, q_{b_1}, p_{a_1+1}, \dots, p_{a_2}, q_{b_1+1}, \dots, q_{b_2}, \dots$$

aparecen todos los términos de $(-1)^{n+1}/n$ exactamente una vez. Por la elección de a_n y b_n como mínimos, la suma inmediatamente anterior a A_n aún está por debajo de s , y la inmediatamente anterior a B_n está por encima de s . Esto es:

$$A_n - p_{a_n} \leq s < A_n, \quad B_n < s \leq B_n - q_{b_n}.$$

Por tanto,

$$0 < A_n - s \leq p_{a_n}, \quad 0 < s - B_n \leq -q_{b_n}.$$

Como $\{p_{a_n}\}$ y $\{q_{b_n}\}$ son subsucesiones de $\{p_n\}$ y $\{q_n\}$, también convergen a 0, lo que nos da que $\{A_n\} \rightarrow s$ y $\{B_n\} \rightarrow s$.

Sean ahora $\{S_m\}_m$ las sumas parciales de la reordenación que hemos construido, y pongamos $B_0 = 0$ para hacer más cómoda la notación. Si m está en el n -ésimo bloque positivo, entonces

$$B_{n-1} \leq S_m \leq A_n.$$

En cambio, si está en el n -ésimo bloque negativo, entonces

$$B_n \leq S_m \leq A_n.$$

En ambos casos,

$$\min\{B_{n-1}, B_n\} \leq S_m \leq A_n,$$

donde n depende de m , y aumenta según aumenta m . Teniendo en cuenta que

$$\min\{a, b\} = \frac{(a+b) - |a-b|}{2},$$

tenemos inmediatamente que $\min\{B_{n-1}, B_n\} \rightarrow \frac{s+s-|s-s|}{2} = s$, luego $\{S_m\} \rightarrow s$ por el teorema del sándwich, como queríamos probar.

Idea para construir una reordenación cuyas sumas parciales tienden a $+\infty$.

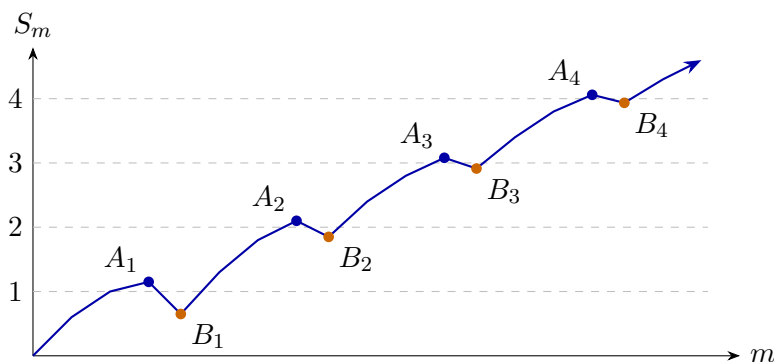
Empezamos sumando términos positivos, en su orden y sin repetirlos, hasta superar 1, y añadimos después q_1 . Continuamos sumando los términos positivos no utilizados hasta superar 2, añadimos q_2 , y así sucesivamente. Exigimos que cada bloque positivo contenga al menos un término, aunque la suma ya supere el objetivo al comenzar, para tener una sucesión estrictamente creciente.

Si A_n es la suma al terminar el bloque positivo de la etapa n , y $B_n = A_n + q_n$, entonces

$$A_n > n, \quad B_n > n + q_n \rightarrow +\infty.$$

Durante el bloque positivo siguiente, las sumas parciales son mayores o iguales que B_n , y al añadir q_{n+1} la suma es B_{n+1} . Por tanto, todas las sumas parciales de esa etapa satisfacen

$$S_m \geq \min\{B_n, B_{n+1}\} \rightarrow +\infty.$$



Como conclusión general, podemos decir que si la serie *converge absolutamente*, está justificado pensar que la suma de la serie responde a la idea intuitiva de sumar todos los términos de $\{x_n\}$. En particular, este es el caso de las series convergentes de términos no negativos. Sin embargo, cuando $\sum_{n \geq 1} x_n$ es convergente, pero no absolutamente convergente, esa idea intuitiva debe manejarse con precaución.