

Apuntes de Cálculo I

Año académico 2026–2027

Tema 2 — Sucesiones de números reales

Índice general

2	Sucesiones de números reales	1
2.1	Sucesiones convergentes	3
2.2	Sucesiones monótonas	12
2.3	Sucesiones divergentes	18
	2.3.1 Curiosidad: una indeterminación que no se puede determinar	22
2.4	Criterios de convergencia de sucesiones	23

Capítulo 2

Sucesiones de números reales

En este tema aparece por primera vez una de las ideas centrales del Análisis Matemático: la *convergencia*. Nos centraremos primero en la convergencia de sucesiones de números reales, que más adelante servirá como herramienta esencial en el estudio de las funciones reales de variable real. Para formalizar la definición de sucesión, necesitaremos la noción de aplicación entre conjuntos, que introducimos brevemente a continuación.

Definición 2.1. Sean X y Y conjuntos. Una *aplicación* f con dominio X y codominio Y es una regla que asigna a cada $x \in X$ un único valor $f(x) \in Y$. Su *imagen* es

$$f(X) = \{f(x) : x \in X\}.$$

Fijada una aplicación $f : X \rightarrow Y$:

- f es **inyectiva** si $f(x_1) = f(x_2)$ implica $x_1 = x_2$;
- f es **sobreyectiva sobre** Y si $f(X) = Y$;
- f es **biyectiva entre** X **e** Y si es inyectiva y sobreyectiva.

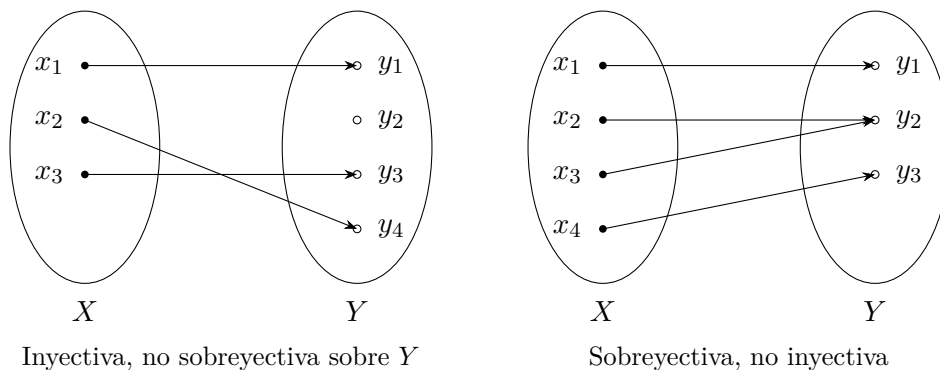
Observación: la sobreyectividad depende del codominio. Dada una aplicación $f : X \rightarrow Y$, la aplicación $f : X \rightarrow f(X)$ es siempre sobreyectiva.

Cuando hablemos de funciones reales ($Y = \mathbb{R}$), los elementos que definen a dichas funciones serán su dominio X y la regla $x \mapsto f(x)$. Bajo este punto de vista, la propiedad más interesante será la inyectividad, que es una propiedad intrínseca de la función y no depende del codominio fijado.

Con este lenguaje, podemos introducir la distinción entre conjuntos finitos e infinitos.

Definición 2.2. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un subconjunto de números reales. Decimos que A es **finito** si $A = \emptyset$ o existen un natural $N \in \mathbb{N}$ y una biyección $f : A \rightarrow \{n \in \mathbb{N} : n \leq N\}$.

Puede demostrarse que esta definición es equivalente a decir que A es finito si toda aplicación inyectiva $f : A \rightarrow A$ es también sobreyectiva, aunque la equivalencia entre las definiciones requiere argumentos de elección en los que preferimos no adentrarnos en esta asignatura.

**Ejemplo**

Problema. Consideremos la regla $f(x) = x^2$ con dominio $\mathbb{R}$.

Resolución. Si escribimos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la función no es sobreyectiva porque ningún número negativo pertenece a su imagen. En cambio, la misma función, con el mismo dominio y la misma regla,

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty), \quad f(x) = x^2,$$

sí es sobreyectiva. No es inyectiva, pues $f(x) = f(-x)$.

Si restringimos también el dominio,

$$g : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty), \quad g(x) = x^2,$$

obtenemos una biyección cuya inversa es $g^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

Intuitivamente, una sucesión de números reales es una lista ordenada de números reales indexada en los naturales:

$$\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\}$$

Definición 2.3. Una sucesión es una aplicación

$$S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad n \mapsto S(n) = x_n.$$

A menudo identificamos la sucesión con su imagen $S(\mathbb{N}) = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, a la que denotamos $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ o simplemente $\{x_n\}$ si no hay lugar a confusión. La principal ventaja de esta notación es su brevedad: por ejemplo, la sucesión $\{\frac{1}{n}\}$ es la aplicación $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $S(n) = \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pero escribiendo $\{\frac{1}{n}\}$ ya sabemos a qué sucesión nos referimos.

Si $\{x_n\}$ es una sucesión, llamamos al n -ésimo término x_n el *término general* de la sucesión, pues nos permite reconstruirla completamente. En algunos casos, x_n viene dado mediante una *fórmula recursiva*.

Ejemplos:

$$(1) \quad x_n = \frac{n-1}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \{x_n\} = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots\right\}.$$

$$(2) \quad x_1 = 1, \quad x_n = \frac{1}{1+x_{n-1}} \quad \forall n \geq 2 \Rightarrow \{x_n\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \dots\right\}.$$

- (3) (Sucesión de Fibonacci) $x_1 = 1, x_2 = 1, x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \quad \forall n \geq 3,$
 $\Rightarrow \{x_n\} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots\}.$

La sucesión de Fibonacci y la razón áurea: La sucesión de Fibonacci se define mediante la recurrencia

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \quad n \geq 3, \quad \text{con } x_1 = 1 \text{ y } x_2 = 1.$$

El término general x_n puede expresarse en función de n gracias a la **fórmula de Binet**:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi} \right)^n \right),$$

donde φ es la *razón áurea*, que satisface $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$.

Idea de la demostración: buscamos soluciones de la forma $x_n = r^n$, con $r > 0$. Sustituyendo en la recurrencia se obtiene

$$r^n = r^{n-1} + r^{n-2} \Rightarrow r^2 = r + 1.$$

La llamada *ecuación característica* $r^2 - r - 1 = 0$ tiene por soluciones

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\varphi}.$$

Puede verse (con herramientas que escapan a los contenidos de este curso) que la solución general de la recurrencia es una combinación lineal

$$x_n = \alpha \varphi^n + \beta \psi^n, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Imponiendo las condiciones iniciales $x_1 = 1, x_2 = 1$, podemos determinar α y β :

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi^n - \psi^n).$$

2.1 Sucesiones convergentes

Definición 2.4. Decimos que una sucesión $\{x_n\}$ está **acotada** cuando su imagen $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$. Equivalentemente, si existe $M > 0$ tal que

$$|x_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (M \text{ no depende de } n).$$

Ejemplo

Problema. Demostrar que la sucesión $\left\{1 + \frac{(-1)^n}{n}\right\} = \{0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \dots\}$ es acotada.

Resolución. Usando las propiedades del valor absoluto, podemos ver que

$$|x_n| = \left| 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right| \leq 1 + \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = 1 + \frac{1}{n} \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La siguiente definición es una de las más importantes en matemáticas, y también una de las más difíciles de asimilar para quienes acaban de iniciarse en esta disciplina. La enunciamos formalmente, y después haremos comentarios con la esperanza de facilitar su comprensión.

Definición 2.5. Sea $\{x_n\}$ una sucesión y $L \in \mathbb{R}$. Decimos que $\{x_n\}$ **converge** a L si:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad [n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon].$$

En tal caso, se dice que L es el límite de $\{x_n\}$ y escribimos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = L, \quad \text{o bien} \quad \{x_n\} \rightarrow L \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Conviene subrayar que el número natural n_0 que aparece en la definición depende casi siempre del $\varepsilon > 0$ considerado. Para probar que $\{x_n\} \rightarrow L$ hay que dar una regla que, a cada $\varepsilon > 0$, le asigne un número natural n_0 tal que se cumpla $|x_n - L| < \varepsilon$ siempre que $n \geq n_0$.

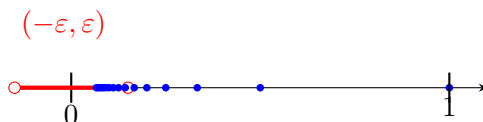
La condición $|x_n - L| < \varepsilon$ es más estricta cuanto más pequeño sea ε , y equivale a

$$L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon.$$

En otras palabras, por muy pequeño que sea ε , el intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ contiene a todos los términos de la sucesión a partir de cierto punto.

Interpretación gráfica:

L es el límite de $\{x_n\}$ si, por pequeño que sea $\varepsilon > 0$, existe un n_0 tal que todos los términos de la sucesión con $n \geq n_0$ quedan dentro del intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.



Desde el punto de vista geométrico, la desigualdad $|x_n - L| < \varepsilon$ expresa que la distancia entre x_n y L en la recta real es menor que ε . De este modo, la convergencia $\{x_n\} \rightarrow L$ significa que podemos acercar los términos de la sucesión a L tanto como queramos, basta con tomar n suficientemente grande (dependiendo de ε). Así, los términos de la sucesión se aproximan a L de forma cada vez más precisa.

Definición 2.6. Decimos que $\{x_n\}$ es **convergente** cuando tiene un límite $L \in \mathbb{R}$.

Proposición 2.7. El límite de una sucesión, si existe, es único.

Demostración

Supongamos que $\{x_n\} \rightarrow L_1$ y $\{x_n\} \rightarrow L_2$, y veamos que necesariamente se tiene $L_1 = L_2$. Sea $\varepsilon > 0$. Por la definición de convergencia, existen $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ tales que

$$|x_n - L_1| < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq m_1, \quad |x_n - L_2| < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq m_2.$$

Tomando $n \geq m = \max\{m_1, m_2\}$, se tiene

$$|L_1 - L_2| = |L_1 - x_n + x_n - L_2| \leq |L_1 - x_n| + |x_n - L_2| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, la propiedad arquimediana nos permite concluir que $|L_1 - L_2| \leq 0$, lo cual implica que $|L_1 - L_2| = 0$, es decir, $L_1 = L_2$. ■

Ejemplo

Problema. Demostrar que la sucesión $\{1/n\}$ converge a $L = 0$.

Resolución. Sea $\varepsilon > 0$. Por la propiedad arquimediana, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > 1/\varepsilon$. Entonces, para todo $n \geq m$ se cumple

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{m} < \varepsilon.$$

Ejemplo

Problema. Probar que la sucesión $\{n\}$ no es convergente.

Resolución. Supongamos, por contradicción, que $\{n\} \rightarrow L$ para algún $L \in \mathbb{R}$. Tomamos $\varepsilon = 1$. Entonces existiría $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq m$,

$$|n - L| < 1 \Rightarrow n < L + 1.$$

Esto implica que $L + 1$ sería un mayorante de $\mathbb{N}$, lo cual contradice la propiedad arquimediana. Por tanto, $\{n\}$ no converge.

Proposición 2.8. Si $\{x_n\}$ es convergente, entonces $\{x_n\}$ está acotada.

Demostración

Sea $\{x_n\} \rightarrow L$. Por la definición de convergencia, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - L| < 1 \quad \text{para todo } n \geq m.$$

Entonces, para $n \geq m$,

$$|x_n| \leq |x_n - L| + |L| < 1 + |L|.$$

Por otra parte, el conjunto $\{|x_n| : n < m\}$ tiene máximo por ser finito. Sea pues $M = \max\{|x_n| : n < m\}$, que depende de m pero no de n . En consecuencia,

$$|x_n| \leq \max\{1 + |L|, M\} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

y la sucesión $\{x_n\}$ está acotada. ■

La implicación recíproca es falsa: la sucesión $\{(-1)^n\}$ está acotada pero no es convergente.

Para ver esto, basta observar que los términos consecutivos de una sucesión convergente se acercan entre sí cuando el valor de $n \in \mathbb{N}$. En efecto, si $\{x_n\} \rightarrow L$, entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que $|x_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces,

$$|x_{n-1} - x_n| = |x_{n-1} - L + L - x_n| \leq |x_{n-1} - L| + |x_n - L| < \varepsilon.$$

Sin embargo, $|(-1)^{n+1} - (-1)^n| = 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego no puede ser convergente.

Idea útil (colas acotadas). Si para cierto $m \in \mathbb{N}$ el conjunto $\{x_n : n \geq m\}$ es acotado, entonces la sucesión completa $\{x_n\}$ es acotada. En efecto, si $|x_n| \leq M_1$ para $n \geq m$ y $M_2 = \max\{|x_1|, \dots, |x_{m-1}|\}$, entonces

$$|x_n| \leq \max\{M_1, M_2\} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La sucesión $(-1)^n$ no converge, pero al fijarnos solo en sus términos de índice par o, alternativamente, en los de índice impar, obtenemos sucesiones que sí lo hacen. Este ejemplo muestra la idea de que, seleccionando ciertos términos de una sucesión, podemos construir una nueva, llamada *subsucesión* o *sucesión parcial* de la original.

Definición 2.9. Sea $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ una sucesión y sea $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una aplicación estrictamente creciente, esto es, para $n, m \in \mathbb{N}$ con $n < m$ se tiene $\sigma(n) < \sigma(m)$. Llamamos a la sucesión $S \circ \sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $n \mapsto S(\sigma(n))$, una **subsucesión** o **sucesión parcial** de S .

Si $S = \{x_n\}$, entonces denotamos $\{x_{\sigma(n)}\}$ a la subsucesión.

Ejemplo:

Las aplicaciones $n \mapsto 2n$, $n \mapsto 2n - 1$ y $n \mapsto 2^n$ son estrictamente crecientes, lo que nos da tres subsucesiones notables:

$$\begin{aligned} \{x_{2n}\} &= \{x_2, x_4, x_6, \dots\} && \text{(subsucesión de los términos en posición par),} \\ \{x_{2n-1}\} &= \{x_1, x_3, x_5, \dots\} && \text{(subsucesión de los términos en posición impar),} \\ \{x_{2^n}\} &= \{x_2, x_4, x_8, \dots\} && \text{(subsucesión de los términos en posición potencia de 2).} \end{aligned}$$

Vemos ahora que la convergencia de una sucesión implica la convergencia de todas sus parciales.

Proposición 2.10. Si $\{x_n\} \rightarrow L$ y $\{x_{\sigma(n)}\}$ es una subsucesión, entonces $\{x_{\sigma(n)}\} \rightarrow L$.

Lema 2.11. Si $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ es estrictamente creciente, entonces $\sigma(n) \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración

Procedemos por inducción. Para $n = 1$, como $\sigma(1) \in \mathbb{N}$, se tiene necesariamente $\sigma(1) \geq 1$. Supongamos ahora que $\sigma(n) \geq n$. Como σ es estrictamente creciente, se cumple

$$\sigma(n+1) > \sigma(n) \geq n,$$

luego $\sigma(n+1) \geq n+1$. Por inducción, concluimos que $\sigma(n) \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Demostración de la Proposición 2.10

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\{x_n\} \rightarrow L$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - L| < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq m.$$

Además, por el Lema 2.11, si $n \geq m$ entonces

$$\sigma(n) \geq n \geq m.$$

Por tanto, para $n \geq m$ se verifica

$$|x_{\sigma(n)} - L| < \varepsilon.$$

Nótese que para cada $\varepsilon > 0$ podemos usar el mismo m que proporciona la convergencia de la sucesión de partida. ■

Como consecuencia de este resultado y de la unicidad del límite, si existen dos subsucesiones tales que

$$\{x_{\sigma_1(n)}\} \rightarrow L_1, \quad \{x_{\sigma_2(n)}\} \rightarrow L_2, \quad L_1 \neq L_2,$$

entonces $\{x_n\}$ no tiene límite.

Ejemplo

Problema. Estudiar la convergencia de $\{x_n\} = \{2 + (-1)^n\}$.

Resolución. Estudiemos las subsucesiones:

$$\{x_{2n}\} = \{2 + (-1)^{2n}\} = \{3, 3, 3, \dots\} \Rightarrow \{x_{2n}\} \rightarrow 3,$$

$$\{x_{2n-1}\} = \{2 + (-1)^{2n-1}\} = \{1, 1, 1, \dots\} \Rightarrow \{x_{2n-1}\} \rightarrow 1.$$

Dado que los límites de las dos subsucesiones difieren, concluimos que $\{x_n\}$ no tiene límite.

En general, la convergencia de unas pocas subsucesiones de $\{x_n\}$ a un mismo límite no implica que $\{x_n\}$ sea convergente o que tenga el mismo límite. Basta pensar en una sucesión del tipo

$$\{x_n\} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es potencia de 2} \\ 0 & \text{si } n \text{ es potencia de 3} \\ n & \text{en otro caso} \end{cases} = \{1, 0, 0, 0, 5, 6, 7, 0, 0, 10, \dots\}.$$

Es fácil comprobar que $\{x_{2^n}\}$ y $\{x_{3^n}\}$ convergen a 0, pero $\{x_n\}$ no es convergente.

Sin embargo, existen excepciones notables que podemos utilizar:

Recogemos en el siguiente resultado las principales propiedades de las operaciones que podemos realizar con sucesiones convergentes, que serán reglas básicas para el cálculo de límites.

Proposición 2.12. Sean $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ sucesiones de números reales y $L, L_1, L_2 \in \mathbb{R}$.

- (1) $\{x_n\} \rightarrow L \iff \{|x_n - L|\} \rightarrow 0$. En particular, $\{x_n\} \rightarrow 0 \iff \{|x_n|\} \rightarrow 0$.
- (2) Si $\{x_n\} \rightarrow L$, entonces $\{|x_n|\} \rightarrow |L|$.
- (3) (Suma) Si $\{x_n\} \rightarrow L_1$ y $\{y_n\} \rightarrow L_2$, entonces $\{x_n + y_n\} \rightarrow L_1 + L_2$.
- (4) Si $\{x_n\}$ está acotada e $\{y_n\} \rightarrow 0$, entonces $\{x_n y_n\} \rightarrow 0$.
- (5) (Producto) Si $\{x_n\} \rightarrow L_1$ y $\{y_n\} \rightarrow L_2$, entonces $\{x_n y_n\} \rightarrow L_1 L_2$.

- (6) (Inverso) Si $x_n \in \mathbb{R}^*$ para todo n y $\{x_n\} \rightarrow L \in \mathbb{R}^*$, entonces $\{1/x_n\} \rightarrow 1/L$.
- (7) (Cociente) Si $\{y_n\} \rightarrow L_2$, $x_n \in \mathbb{R}^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{x_n\} \rightarrow L_1 \neq 0$, entonces $\{y_n/x_n\} \rightarrow L_2/L_1$.

Demostración

- (1) Es inmediato de la definición de límite: $\{x_n\} \rightarrow L$ significa que $|x_n - L| \rightarrow 0$.
- (2) Por la desigualdad triangular inversa, se cumple

$$||x_n| - |L|| \leq |x_n - L|.$$

Si el segundo tiende a 0, también lo hace el primero, y por tanto $|x_n| \rightarrow |L|$. El recíproco es falso (ejemplo: $x_n = (-1)^n$).

- (3) Si $\{x_n\} \rightarrow L_1$ y $\{y_n\} \rightarrow L_2$, dado $\varepsilon > 0$ se encuentran $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ tales que, si $n \geq \max\{m_1, m_2\}$, entonces

$$|x_n - L_1| < \varepsilon/2 \quad \text{y} \quad |y_n - L_2| < \varepsilon/2$$

Entonces

$$|(x_n + y_n) - (L_1 + L_2)| \leq |x_n - L_1| + |y_n - L_2| < \varepsilon.$$

- (4) Si $\{x_n\}$ está acotada, existe $K \geq 0$ tal que $|x_n| \leq K$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado que $\{y_n\} \rightarrow 0$, entonces existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq m$, se cumple $|y_n| < \varepsilon/K$. Por tanto, si $n \geq m$:

$$|x_n y_n| \leq K |y_n| < \varepsilon.$$

Esto demuestra que $\{x_n y_n\} \rightarrow 0$.

- (5) Para el producto, escribimos

$$x_n y_n - L_1 L_2 = (x_n - L_1)(y_n - L_2) + (x_n - L_1)L_2 + (y_n - L_2)L_1.$$

El primer término tiende a 0 por el punto anterior (producto de acotada y convergente a 0), y los otros dos tienden a 0 directamente. Concluimos $x_n y_n \rightarrow L_1 L_2$.

- (6) Puesto que

$$\left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{L} \right| = \frac{|x_n - L|}{|x_n||L|},$$

bastará ver que $1/x_n$ es acotada y aplicar el punto (4). En efecto, dado que $\{x_n\} \rightarrow L \neq 0$, podemos tomar $\varepsilon = |L|/2 > 0$ para encontrar un $m \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq m$, entonces $|x_n - L| < |L|/2$. Esto nos da:

$$\begin{aligned} |x_n| &= |L - (L - x_n)| \geq ||L| - |x_n - L|| = |L| - |x_n - L| \\ &\geq |L| - \frac{|L|}{2} = \frac{|L|}{2}. \end{aligned}$$

Tomando inversos, resulta

$$\frac{1}{|x_n|} \leq \frac{2}{|L|} \quad n \geq m,$$

lo cual nos dice que $\{1/x_n\}$ es acotada.

- (7) Finalmente, $\{y_n/x_n\} = \{y_n\} \cdot \{1/x_n\}$ y aplicando los resultados de producto e inverso obtenemos $y_n/x_n \rightarrow L_2/L_1$. ■

Ejemplo

Problema. Estudiar la convergencia de la sucesión

$$a_n = \frac{n^2 - n}{2 - n^2}.$$

Resolución. Hemos visto que la sucesión n no converge, por lo que en principio no podemos usar directamente las reglas anteriores. Para sortear el problema, dividimos numerador y denominador por n^2 :

$$\frac{n^2 - n}{2 - n^2} = \frac{1 - \frac{1}{n}}{\frac{2}{n^2} - 1}.$$

Ahora, cuando $n \rightarrow \infty$ tenemos

$$\frac{1 - \frac{1}{n}}{\frac{2}{n^2} - 1} \rightarrow \frac{1}{-1} = -1.$$

Por tanto, la sucesión converge a -1 .

Discutimos a continuación la relación entre la convergencia de sucesiones y el orden de los números reales. De forma más intuitiva: ¿si conocemos una desigualdad entre los límites de dos sucesiones convergentes, podemos asegurar desigualdades entre sus términos a partir de cierto punto? ¿Y viceversa? La respuesta es afirmativa y se recoge en la siguiente proposición.

Proposición 2.13. Sean $\{x_n\} \rightarrow L_1$ y $\{y_n\} \rightarrow L_2$ dos sucesiones convergentes.

- (1) Si $L_2 < L_1$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $y_n < x_n$ para todo $n \geq m$.
- (2) Si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \leq y_n$ para todo $n \geq m$, entonces $L_1 \leq L_2$.

Demostración

- (1) Supongamos que $L_2 < L_1$, y sea $\varepsilon = \frac{L_1 - L_2}{2} > 0$. Por la definición de límite, existen $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ tales que

$$|x_n - L_1| < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq m_1, \quad |y_n - L_2| < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq m_2.$$

Tomando $m = \max\{m_1, m_2\}$, para todo $n \geq m$ se cumple

$$y_n < L_2 + \varepsilon = \frac{L_1 + L_2}{2} = L_1 - \varepsilon < x_n.$$

(Recuerda que si $z_n \rightarrow L$, entonces para cada $\varepsilon > 0$ se encuentra un $m \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq m$, se tiene $L - \varepsilon < z_n < L + \varepsilon$.)

- (2) Razonemos por reducción al absurdo: si se tuviese $L_2 < L_1$, aplicando el resultado anterior existiría $m \in \mathbb{N}$ tal que $y_n < x_n$ para todo $n \geq m$. Esto significaría que $x_n \leq y_n$ sólo podría cumplirse en un número finito de índices n , contradiciendo la hipótesis. Por tanto, necesariamente $L_1 \leq L_2$. ■

Observación importante: Es importante resaltar que la hipótesis estricta $x_n < y_n$ para todo $n \geq m$ no implica $L_1 < L_2$. Basta considerar, por ejemplo, $x_n = 0$, $y_n = 1/n$, donde $x_n < y_n$ siempre, pero $L_1 = L_2 = 0$.

Proposición 2.14 (Teorema del sándwich). Sean $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ sucesiones tales que existe un $m \in \mathbb{N}$ de forma que $x_n \leq y_n \leq z_n$ para todo $n \geq m$. Si $\{x_n\} \rightarrow L$ y $\{z_n\} \rightarrow L$, entonces también $\{y_n\} \rightarrow L$.

Demostración

Observamos que el punto (2) de la Proposición 2.13 no puede aplicarse directamente, puesto que no sabemos si $\{y_n\}$ es convergente. Razonamos de la siguiente manera: dado $\varepsilon > 0$, existen $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ tales que

$$|x_n - L| < \varepsilon \quad (n \geq m_1), \quad |z_n - L| < \varepsilon \quad (n \geq m_2).$$

Tomando $m = \max\{m_1, m_2\}$, para todo $n \geq m$ tenemos

$$L - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < L + \varepsilon.$$

Por tanto $|y_n - L| < \varepsilon$ para todo $n \geq m$, y concluimos que $\{y_n\} \rightarrow L$. ■

Ejemplo

Problema. Probar que

$$x_n = \frac{(-1)^n n}{n^2 + 1} \quad \text{converge a } 0.$$

Resolución. Observamos primero que

$$0 \leq |x_n| = \frac{n}{n^2 + 1} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n},$$

ya que $n^2 + 1 \geq n^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\{\frac{1}{n}\} \rightarrow 0$, del teorema del sándwich (con $\{x_n\} = \{0\}$ y $\{z_n\} = \{1/n\}$) se sigue que

$$|x_n| \rightarrow 0 \quad \implies \quad x_n \rightarrow 0.$$

Ejemplo

Problema. (Hoja 2, ejercicio 3) Calcular

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k}.$$

Resolución. Para cada k se tiene $n^2 \leq n^2 + k \leq n^2 + n$. Cuando el denominador es

mayor, la fracción es menor, y viceversa, de modo que

$$\frac{\sum_{k=1}^n (n+k)}{n^2+n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k} \leq \frac{\sum_{k=1}^n (n+k)}{n^2}.$$

Calculamos la suma del numerador:

$$\sum_{k=1}^n (n+k) = n \cdot n + \sum_{k=1}^n k = n^2 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n.$$

Sustituyendo:

$$\frac{3}{2} \leftarrow \frac{\frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n}{n^2+n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k} \leq \frac{\frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n}{n^2} \rightarrow \frac{3}{2}.$$

Por el criterio del sándwich,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k} = \frac{3}{2}.$$

Concluimos esta sección caracterizando el supremo y el ínfimo de un conjunto A como cotas de dicho conjunto a las que se puede llegar mediante sucesiones de elementos de A .

Proposición 2.15. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío.

- (1) Si A está mayorado, existe una sucesión $\{x_n\}$ de elementos de A tal que $\{x_n\} \rightarrow \sup A$. Recíprocamente, si $s \in \mathbb{R}$ es una cota superior de A y existe una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A tal que $\{x_n\} \rightarrow s$, entonces $s = \sup A$.
- (2) Si A está minorado, existe una sucesión $\{y_n\}$ de elementos de A tal que $\{y_n\} \rightarrow \inf A$. Recíprocamente, si $f \in \mathbb{R}$ es una cota inferior de A y existe una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A tal que $\{x_n\} \rightarrow f$, entonces $f = \inf A$.

Demostración de (1)

Supongamos que A está mayorado y sea $s = \sup A$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, como $s - \frac{1}{n}$ no es cota superior de A , existe $x_n \in A$ verificando

$$s - \frac{1}{n} < x_n \leq s.$$

Así obtenemos una sucesión $\{x_n\} \subset A$ que converge a s usando el Teorema del sándwich.

Dado $\varepsilon > 0$, como $\{x_n\} \rightarrow s$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que $|x_n - s| < \varepsilon$. Como s es una cota superior para todos los elementos de la sucesión,

$$|x_n - s| = s - x_n < \varepsilon \implies s - \varepsilon < x_n \leq s.$$

Como $x_n \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos $s = \sup A$. ■

2.2 Sucesiones monótonas

Vamos a introducir ahora una propiedad fundamental de las sucesiones: la *monotonía*. Veremos que, si una sucesión es monótona y está acotada, necesariamente converge. Este hecho proporciona un criterio muy útil para estudiar la convergencia de sucesiones sin necesidad de calcular explícitamente su límite.

A partir de aquí deduciremos el teorema de Bolzano–Weierstrass, que constituye uno de los resultados más relevantes sobre sucesiones, y que además conduce al teorema de completitud de $\mathbb{R}$, ofreciendo así una caracterización precisa de las sucesiones convergentes.

Definición 2.16. Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ es:

- **Creciente** si $x_n \leq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Decreciente** si $x_n \geq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Monótona** si es creciente o decreciente.

Una sucesión constante es a la vez creciente y decreciente. Las sucesiones $\{n\}$ y $\{-1/n\}$ son crecientes; $\{-n\}$ y $\{1/n\}$ son decrecientes. La sucesión $\{(-1)^n\}$ no es monótona. Además, $\{x_n\}$ es decreciente $\iff \{-x_n\}$ es creciente, por lo que podremos reducirnos a considerar sucesiones crecientes cuando demos demos propiedades relacionadas con la monotonía.

Proposición 2.17. Toda sucesión monótona y acotada es convergente. Más precisamente:

- (I) Si $\{x_n\}$ es creciente y mayorada, entonces $\{x_n\} \rightarrow \sup\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$.
- (II) Si $\{x_n\}$ es decreciente y minorada, entonces $\{x_n\} \rightarrow \inf\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$.

Demostración

Supongamos que $\{x_n\}$ es creciente y mayorada y sea $\beta = \sup\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$. Dado $\varepsilon > 0$, por la definición de supremo existe $m \in \mathbb{N}$ con $\beta - \varepsilon < x_m \leq \beta$. Como la sucesión es creciente, para todo $n \geq m$:

$$\beta - \varepsilon < x_m \leq x_n \leq \beta < \beta + \varepsilon,$$

de donde sigue que $|x_n - \beta| < \varepsilon$ y por tanto $x_n \rightarrow \beta$. El caso decreciente/minorada es análogo, o bien se aplica lo anterior a $\{-x_n\}$. ■

Ejemplo: Para $x \in \mathbb{R}$ con $|x| < 1$, se tiene $\{x^n\} \rightarrow 0$.

Supongamos que $x \neq 0$, ya que ese caso es trivial. Sea $x_n = x^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y consideremos $\{|x_n|\}$. Vemos que

$$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \frac{|x|^{n+1}}{|x|^n} = |x| < 1,$$

luego, como $|x_n| \geq 0$, de ahí se sigue que

$$x_{n+1} < x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, $\{|x_n|\}$ es una sucesión decreciente y mayorada, luego converge. Existe por tanto $L \in \mathbb{R}$ tal que $\{|x_n|\} \rightarrow L$. Como $|x_{n+1}|$ es una sucesión parcial de $|x_n|$, también

$\{|x_{n+1}|\} \rightarrow L$. De la identidad

$$|x_{n+1}| = |x_n| |x|$$

tenemos $L = L |x|$, luego

$$L(1 - |x|) = 0,$$

que da $L = 0$.

Entonces, $\{|x^n|\} \rightarrow 0$, lo que implica que $\{x^n\} \rightarrow 0$.

Observación: Si $|x| > 1$, es fácil ver que los términos consecutivos no se acercan cuando n se hace grande, por lo que no puede ser convergente. En efecto,

$$||x_{n+1}| - |x_n|| = |x|^n (|x| - 1) > |x| - 1 > 0.$$

El caso $|x| = 1$ es sobradamente conocido.

Ejemplo

Problema. Sea $\{a_n\}$ una sucesión con $a_1 > 3$ y $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3}$. Demostrar que es convergente y calcular su límite.

Resolución. (1) En primer lugar, veamos que $\{a_n\}$ así definida es una sucesión **minorada**. Para ello, probamos por inducción que $a_n > 3$ para todo n .

La etapa base es inmediata, ya que $a_1 > 3$. Supongamos ahora que $a_n > 3$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3} > \sqrt{2 \cdot 3 + 3} = \sqrt{9} = 3.$$

Queda $a_n > 3$ para todo n .

(2) Comprobemos ahora que $\{a_n\}$ es **monótona decreciente**. La desigualdad $a_{n+1} \leq a_n$ equivale a $a_{n+1} - a_n \leq 0$. Sustituyendo y racionalizando, queda

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{2a_n + 3} - a_n = \frac{2a_n + 3 - a_n^2}{\sqrt{2a_n + 3} + a_n}$$

El polinomio $p(x) = -x^2 + 2x + 3$ tiene raíces -1 y 3 . Factorizando,

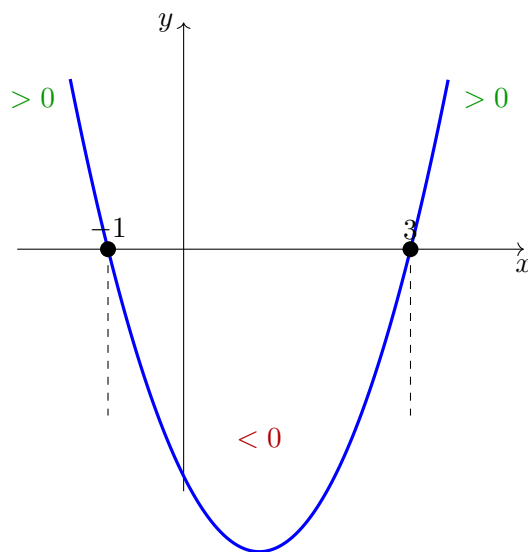
$$a_{n+1} - a_n = -\frac{(a_n - 3)(a_n + 1)}{\sqrt{2a_n + 3} + a_n}$$

Como ya sabemos que $a_n > 3$, el cociente anterior tiene signo negativo, por tanto $a_{n+1} - a_n < 0$, esto es, $\{a_n\}$ es decreciente.

(3) Convergencia y límite. La sucesión es *decreciente* y *minorada* por 3, luego es convergente. Sea $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$. Como $\{a_{n+1}\}$ es una subsucesión de $\{a_n\}$, también se tiene $\{a_{n+1}\} \rightarrow L$. Tenemos entonces la igualdad:

$$L^2 = 2L + 3 \iff (L - 3)(L + 1) = 0.$$

Como $a_n > 3$ para todo n , no puede tenerse $L = -1$, por lo que se deduce $L = 3$.



Las sucesiones monótonas aparecen con mucha más frecuencia de lo que podría parecer. El siguiente resultado lo pone de manifiesto y sirve de paso previo para el teorema central sobre convergencia de sucesiones reales.

Lema 2.18. Toda sucesión de números reales admite una sucesión parcial monótona.

Demostración

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales y consideremos el conjunto

$$A = \{n \in \mathbb{N} : x_n \geq x_{n+k} \quad \forall k \in \mathbb{N}\},$$

que detecta los términos que son mayores o iguales que todos los que les siguen. Distinguiamos dos casos:

- (1) Supongamos que A es **infinito**. Empezamos viendo que podemos construir una aplicación estrictamente creciente $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow A$. Esto es, que podemos numerar los elementos de A de forma creciente.

Como todo subconjunto de $\mathbb{N}$ tiene mínimo, podemos definir $\sigma(1) = \min A$. Ahora, daremos una fórmula recursiva que nos permita obtener $\sigma(n+1)$ a partir de $\sigma(n)$:

$$\sigma(n+1) = \min \underbrace{\{a \in A : a > \sigma(n)\}}_{\neq \emptyset \text{ porque } A \text{ es infinito}}.$$

La sucesión $\{x_{\sigma(n)}\}$ es parcial de $\{x_n\}$, y como $\sigma(n) \in A$ se tiene $x_{\sigma(n)} \geq x_{\sigma(n)+k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Tomando $k = \sigma(n+1) - \sigma(n)$ obtenemos $x_{\sigma(n)} \geq x_{\sigma(n+1)}$, luego $\{x_{\sigma(n)}\}$ es decreciente.

- (2) Si A es **finito** (posiblemente $A = \emptyset$), entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$A \subset \{n \in \mathbb{N} : n < m\}.$$

Intuitivamente, a partir del índice m siempre aparece más adelante un término mayor, lo que permite construir una sucesión parcial creciente.

Definimos por inducción una aplicación $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \{n \in \mathbb{N} : n \geq m\}$ así: tomamos $\sigma(1) = m$ y, dado $n \geq 2$, tomamos

$$\sigma(n+1) = \sigma(n) + \min\{k \in \mathbb{N} : x_{\sigma(n)+k} > x_{\sigma(n)}\}.$$

Entonces $\sigma(n+1) > \sigma(n) \geq m$ y $x_{\sigma(n)} < x_{\sigma(n+1)}$, por lo que $\{x_{\sigma(n)}\}$ es creciente.

En cualquiera de los dos casos obtenemos una sucesión parcial monótona de $\{x_n\}$. ■

Teorema 2.19 (Teorema de Bolzano–Weierstrass). Toda sucesión acotada de números reales admite una sucesión parcial convergente.

Demostración

Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada. Por el lema anterior, existe una sucesión parcial monótona $\{x_{\sigma(n)}\}$. Al ser $\{x_n\}$ acotada, existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $|x_n| \leq K$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y por tanto $|x_{\sigma(n)}| \leq K$ para todo n . Así, $\{x_{\sigma(n)}\}$ es monótona y acotada, luego es convergente por el resultado previo. ■

Nota: Hasta ahora, hemos visto la siguiente cadena de implicaciones:

$$\begin{array}{c} \{x_n\} \text{ monótona y acotada} \\ \Downarrow \\ \{x_n\} \text{ convergente} \\ \Downarrow \\ \{x_n\} \text{ acotada} \\ \Downarrow \\ \{x_n\} \text{ admite una subsucesión convergente.} \end{array}$$

Sin embargo, ninguna de estas implicaciones es reversible:

(1) Para ver que (iv) $\nRightarrow$ (iii) basta tomar

$$x_n = n \left(\frac{1 + (-1)^n}{2} \right), \quad n \in \mathbb{N},$$

ya que $x_{2n-1} = 0$ y $x_{2n} = n$. Así, $\{x_n\}$ admite una subsucesión convergente y otra no acotada, por lo que $\{x_n\}$ tampoco está acotada.

(2) Ya se comentó que existen sucesiones acotadas que no convergen, es decir, (iii) $\nRightarrow$ (ii).

(3) Finalmente, la sucesión $\{(-1)^n/n\}$ converge a 0, pero no es monótona, así que (ii) $\nRightarrow$ (i).

Hasta ahora hemos visto condiciones necesarias (como la acotación) o suficientes (monotonía junto con acotación) para garantizar la convergencia de una sucesión. Sin embargo, ninguna de

ellas es a la vez necesaria y suficiente. Nuestro objetivo será encontrar un criterio que permita decidir si una sucesión es convergente sin necesidad de conocer de antemano su posible límite.

Definición 2.20. Una sucesión $\{x_n\}$ se llama *sucesión de Cauchy* cuando, para todo $\varepsilon > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$p, q \geq m \implies |x_p - x_q| < \varepsilon.$$

Es decir, una sucesión de Cauchy es aquella cuyos términos están arbitrariamente cerca unos de otros para índices suficientemente grandes. Es fácil comprobar que toda sucesión convergente verifica esta propiedad, pues todos sus términos están tan cerca como se quiera del valor del límite. Que la afirmación recíproca sea también cierta caracteriza a la completitud de $\mathbb{R}$.

Proposición 2.21 (Completitud de $\mathbb{R}$). Una sucesión de números reales $\{x_n\}$ converge si, y sólo si, es de Cauchy.

Demostración

Convergente $\Rightarrow$ Cauchy. Supongamos $x_n \rightarrow L \in \mathbb{R}$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - L| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para todo } n \geq m.$$

Entonces, para $p, q \geq m$,

$$|x_p - x_q| \leq |x_p - L| + |L - x_q| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

luego $\{x_n\}$ es de Cauchy.

Cauchy $\Rightarrow$ convergente. Sea ahora $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy. Primero probamos que está acotada. Tomando $\varepsilon = 1$ en la definición de Cauchy, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_p - x_q| < 1 \quad \text{para cualesquiera } p, q \geq m.$$

En particular, con $q = m$ y $p = n \geq m$,

$$|x_n| \leq |x_n - x_m| + |x_m| < 1 + |x_m|,$$

de modo que $\{x_n\}$ es acotada.

Por el teorema de Bolzano–Weierstrass, existe una sucesión parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$ que converge a algún $L \in \mathbb{R}$. Veamos que entonces también se tiene $\{x_n\} \rightarrow L$.

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\{x_n\}$ es de Cauchy, existe $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$p, q \geq m_1 \implies |x_p - x_q| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.1)$$

Como $\{x_{\sigma(n)}\} \rightarrow L$, existe $m_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq m_2 \implies |x_{\sigma(n)} - L| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.2)$$

Tomemos $m = \max\{m_1, m_2\}$, y sea $n \geq m$. Puesto que $\sigma(n) \geq n \geq m$, aplicando (2.1) con $p = n$ y $q = \sigma(n)$ y luego (2.2), obtenemos

$$|x_n - L| \leq |x_n - x_{\sigma(n)}| + |x_{\sigma(n)} - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por tanto, $\{x_n\} \rightarrow L$, como queríamos. ■

Ejemplo

Problema. Consideremos la sucesión definida por

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right) \quad n \in \mathbb{N}.$$

Vamos a demostrar que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{Q}$ que no es convergente.

Resolución.

- Comenzamos viendo por inducción que $x_n \in \mathbb{Q}$ para todo n .

El caso $n = 1$ es claro. Si $x_n \in \mathbb{Q}$, entonces también $2/x_n \in \mathbb{Q}$ y su media aritmética $\frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right) = x_{n+1} \in \mathbb{Q}$.

- Demostremos ahora que se cumplen las estimas $\sqrt{2} \leq x_n \leq 2$ para todo n .

Para $n = 1$ tenemos $\sqrt{2} < 2 = x_1 \leq 2$. Supongamos que $\sqrt{2} \leq x_n \leq 2$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right) \leq \frac{1}{2} \left(2 + \frac{2}{x_n} \right) \leq \frac{1}{2} \left(2 + \frac{2}{\sqrt{2}} \right) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} < 2.$$

Por otro lado, usando la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica, esto es, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ para todo $a, b > 0$ (véase la nota al final de este ejemplo), se tiene

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right) \geq \sqrt{x_n \frac{2}{x_n}} = \sqrt{2}.$$

Queda probado que $\sqrt{2} \leq x_{n+1} \leq 2$.

- Comprobamos que $\{x_n\}$ es monótona decreciente: como $x_n \geq \sqrt{2} > 0$, se tiene $x_n^2 \geq 2$ y

$$\frac{2}{x_n} \leq \frac{x_n^2}{x_n} = x_n \implies x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right) \leq \frac{1}{2} (x_n + x_n) = x_n.$$

Por ser $\{x_n\}$ decreciente y minorada, existe $L \in \mathbb{R}$, $L \geq \sqrt{2}$, de forma que $\{x_n\} \rightarrow L$. En particular, $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy.

- Por último, calculamos el valor de L . Pasando al límite en la relación de recurrencia,

$$L = \frac{1}{2} \left(L + \frac{2}{L} \right) \implies 2L = L + \frac{2}{L} \implies L^2 = 2.$$

Como $L \geq \sqrt{2}$, se obtiene $L = \sqrt{2}$.

Conclusión. $\{x_n\}$ es una sucesión en $\mathbb{Q}$ decreciente y acotada, por tanto convergente en $\mathbb{R}$. Toda sucesión convergente es de Cauchy, y esta noción es independiente del límite, luego $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{Q}$. Sin embargo, su único límite posible es $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, luego $\{x_n\}$ no converge en $\mathbb{Q}$.

La desigualdad entre la media aritmética y la geométrica: Sean $a, b > 0$.

Claramente, $(a - b)^2 \geq 0$, lo que nos da

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \quad \Rightarrow \quad a^2 + b^2 + 2ab \geq 4ab \quad \Rightarrow \quad (a + b)^2 \geq 4ab.$$

Como $a, b > 0$, podemos tomar raíces cuadradas para conseguir

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \quad \Rightarrow \quad \frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Un ejemplo más sencillo de recordar son las aproximaciones decimales sucesivas de cualquier racional, por ejemplo $\sqrt{2}$:

$$\{x_n\} = \left\{ \frac{\lfloor 10^n \sqrt{2} \rfloor}{10^n} \right\}.$$

Claramente $x_n \in \mathbb{Q}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, usando el teorema del sándwich, es fácil comprobar que la sucesión $\{\lfloor 10^n x \rfloor / 10^n\} \rightarrow x$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

En efecto, la parte entera satisface $\lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1$, luego

$$|\lfloor 10^n x \rfloor - 10^n x| = 10^n x - \lfloor 10^n x \rfloor < 1.$$

Por tanto

$$0 \leq \left| \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} - x \right| = \frac{|\lfloor 10^n x \rfloor - 10^n x|}{10^n} < \frac{1}{10^n} \rightarrow 0.$$

2.3 Sucesiones divergentes

En este curso, llamamos sucesión *divergente* a cualquier sucesión que no sea convergente. Es menester señalar que en algunos textos, esta terminología se reserva para un tipo concreto de sucesiones no convergentes, que son las que tienden a $+\infty$ o $-\infty$.

Definición 2.22. Una sucesión $\{x_n\}$ se dice *divergente* cuando no es convergente.

Entre las sucesiones divergentes, señalamos los dos tipos más interesantes:

Definición 2.23. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales.

- Decimos que $\{x_n\}$ *diverge a $+\infty$* si, para todo $K > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq m \Rightarrow x_n > K$. En tal caso escribimos $\{x_n\} \rightarrow +\infty$.
- Análogamente, decimos que $\{x_n\}$ *diverge a $-\infty$* si, para todo $K < 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq m \Rightarrow x_n < K$. En tal caso escribimos $\{x_n\} \rightarrow -\infty$.

Conviene insistir en que ∞ , $+\infty$ y $-\infty$ son solo *símbolos* para indicar que una sucesión diverge hacia los positivos o los negativos. Escribir $\{x_n\} \rightarrow +\infty$ no significa que la sucesión sea convergente ni que tenga límite $+\infty$. Las nociones de sucesión convergente y de límite real no cambian por introducir estas definiciones. Por ello deben evitarse expresiones como “ $\{x_n\}$ converge a $+\infty$ ” o “ $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ ”, que pueden inducir confusión y no aportan claridad.

Estudiamos ahora la relación entre las sucesiones que divergen a $\pm\infty$ con los demás tipos de sucesiones que hemos visto.

Proposición 2.24. Sea $\{x_n\}$ una sucesión y $\{x_{\sigma(n)}\}$ una subsucesión de $\{x_n\}$.

- (I) Si $\{x_n\} \rightarrow +\infty$, entonces $\{x_{\sigma(n)}\} \rightarrow +\infty$.

(II) Si $\{x_n\} \rightarrow -\infty$, entonces $\{x_{\sigma(n)}\} \rightarrow -\infty$.

Demostración

- (1) Sea $K \in \mathbb{R}$. Como $\{x_n\} \rightarrow +\infty$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq m \Rightarrow x_n > K$. La aplicación $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ es estrictamente creciente, luego existe $n_0 \in \mathbb{N}$ con $\sigma(n) \geq m$ para todo $n \geq n_0$. Por tanto, para $n \geq n_0$ se tiene $x_{\sigma(n)} > K$, y queda probado que $\{x_{\sigma(n)}\} \rightarrow +\infty$.
- (2) Si $\{x_n\} \rightarrow -\infty$, entonces $\{-x_n\} \rightarrow +\infty$. Aplicando (i) a la sucesión $\{-x_n\}$ obtenemos $\{-x_{\sigma(n)}\} \rightarrow +\infty$, es decir, $\{x_{\sigma(n)}\} \rightarrow -\infty$. ■

Proposición 2.25. Si $\{x_n\}$ creciente y no mayorada, entonces $\{x_n\} \rightarrow +\infty$. De la misma manera, si $\{x_n\}$ es decreciente y no minorada, entonces $\{x_n\} \rightarrow -\infty$. Por tanto, toda sucesión monótona es convergente o tiende a infinito.

Demostración

Si $\{x_n\}$ es creciente y no mayorada, dado $K \in \mathbb{R}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_m > K$, pero entonces, para $n \geq m$ se cumple $x_n \geq x_m > K$, y de aquí $\{x_n\} \rightarrow +\infty$.

De modo análogo, si $\{x_n\}$ es decreciente y no minorada, entonces $\{-x_n\}$ es creciente y no mayorada, luego $\{-x_n\} \rightarrow +\infty$, y por tanto $\{x_n\} \rightarrow -\infty$. ■

El criterio anterior nos permite dar ejemplos de sucesiones que divergen a $\pm\infty$:

- Si $x \in \mathbb{R}$ con $x > 1$, la sucesión $\{x^n\}$ es creciente y no está mayorada, luego $\{x^n\} \rightarrow +\infty$. Para ver esto, introducimos la desigualdad de Bernoulli, que puede ser demostrada fácilmente por inducción:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall h \geq -1, \quad (1+h)^n \geq 1+nh.$$

Aplicando dicha desigualdad a $x-1 > 0$, se tiene

$$x^n = (1+(x-1))^n \geq 1+n(x-1)$$

Si existiera $M > 0$ de forma que $x^n \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$1+n(x-1) \leq x^n \leq M \quad \Rightarrow \quad n \leq \frac{M-1}{x-1} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

lo que contradice la propiedad Arquimediana.

- Si $x < -1$, entonces $\{|x^n|\} = \{|x|^n\} \rightarrow +\infty$. Sin embargo, la sucesión no tiende ni a $+\infty$ ni a $-\infty$, pues oscila de signo.

Ejemplo

Problema. Demostrar que $\{\sqrt{n}\} \rightarrow +\infty$.

Resolución. Creciente. Como $0 < n < n+1$, tomando raíces cuadradas queda $\sqrt{n} < \sqrt{n+1}$, luego es creciente.

No mayorada. Razonamos por reducción al absurdo: si existiera $M \in \mathbb{R}$ tal que $\sqrt{n} \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $n \leq M^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo cual contradice la propiedad arquimediana.

Por tanto, la sucesión es creciente y no está mayorada; en consecuencia,

$$\{\sqrt{n}\} \rightarrow +\infty.$$

El siguiente criterio nos permite deducir que una sucesión que diverge a $\pm\infty$ comparándola con otra con el mismo comportamiento. Puede entenderse como un resultado análogo al Teorema del sándwich para este tipo de sucesiones divergentes.

Proposición 2.26. Sean $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ sucesiones de números reales tales que existe un $m \in \mathbb{N}$ de forma que $x_n \leq y_n$ para todo $n \geq m$. Entonces:

$$\{x_n\} \rightarrow +\infty \implies \{y_n\} \rightarrow +\infty, \quad \{y_n\} \rightarrow -\infty \implies \{x_n\} \rightarrow -\infty.$$

Ejemplo

Problema. Consideremos la sucesión

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = \left\{ 1, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}, \dots \right\}.$$

Demostrar que $\{x_n\} \rightarrow +\infty$.

Resolución. Para $1 \leq k \leq n$ se cumple $\sqrt{k} \leq \sqrt{n}$, luego

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Sumando para $k = 1, \dots, n$,

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} = n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Como $\{\sqrt{n}\} \rightarrow +\infty$, por comparación se obtiene $\{x_n\} \rightarrow +\infty$.

Finalmente, resumimos el álgebra del $\pm\infty$ en la siguiente proposición.

Proposición 2.27. Sean $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ sucesiones de números reales.

- (1) Si $\{x_n\} \rightarrow +\infty$ y $\{y_n\}$ está minorada, entonces $\{x_n + y_n\} \rightarrow +\infty$. En particular, la segunda condición se tiene si $\{y_n\} \rightarrow L$ o $\{y_n\} \rightarrow +\infty$.
- (2) Si $\{x_n\} \rightarrow -\infty$ y $\{y_n\}$ está mayorada, entonces $\{x_n + y_n\} \rightarrow -\infty$. En particular, la segunda condición se tiene si $\{y_n\} \rightarrow L$ o $\{y_n\} \rightarrow -\infty$.

- (3) Si $\{x_n\} \rightarrow +\infty$ y existen $\alpha > 0$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que, para $n \geq m$, se cumple $y_n > \alpha > 0$, entonces $\{x_n y_n\} \rightarrow +\infty$. En particular, la segunda condición se tiene si $\{y_n\} \rightarrow L > 0$ o $\{y_n\} \rightarrow +\infty$.
- (4) Si $\{x_n\} \rightarrow -\infty$ y existen $\alpha > 0$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que, para $n \geq m$, se cumple $y_n > \alpha > 0$, entonces $\{x_n y_n\} \rightarrow -\infty$.
- (5) Sea $x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\{x_n\} \rightarrow 0 \iff \left\{ \frac{1}{|x_n|} \right\} \rightarrow +\infty$.

Demostración

- (1) Supongamos $\{x_n\} \rightarrow +\infty$ y $\{y_n\}$ está minorada. Existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $y_n \geq \alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $K \in \mathbb{R}$. Como $\{x_n\} \rightarrow +\infty$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq m \implies x_n > K - \alpha$. Entonces, para $n \geq m$, se cumple $x_n + y_n > K - \alpha + \alpha = K$, lo que prueba que $\{x_n + y_n\} \rightarrow +\infty$.
- (2) La demostración es análoga a (1).
- (3) Sea $K \in \mathbb{R}$. Como $\{x_n\} \rightarrow +\infty$, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq q$ se cumple $x_n > K/\alpha$. Definimos $p = \max\{q, m\}$. Entonces, para $n \geq p$, se tiene simultáneamente $y_n > \alpha$ y $x_n > K/\alpha$, luego

$$x_n y_n > \frac{K}{\alpha} \alpha = K,$$

lo que prueba que $\{x_n y_n\} \rightarrow +\infty$.

- (4) Demostración análoga a (3).
- (5) Supongamos que $\{x_n\} \rightarrow 0$, y sea $K \in \mathbb{R}^+$. Como $\{x_n\} \rightarrow 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq m \implies |x_n| < \frac{1}{K}$. Entonces, para $n \geq m$ se cumple

$$\frac{1}{|x_n|} > K,$$

lo que muestra que $\left\{ \frac{1}{|x_n|} \right\} \rightarrow +\infty$.

Recíprocamente, supongamos que $\{1/|x_n|\} \rightarrow +\infty$. Dado $\varepsilon > 0$, tomamos $K = 1/\varepsilon$. Por hipótesis, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq m \implies 1/|x_n| > K = 1/\varepsilon$. Esto equivale a $|x_n| < \varepsilon$, lo que prueba que $\{x_n\} \rightarrow 0$.



Las situaciones no contempladas en la discusión anterior se conocen como **indeterminaciones**, que es un término que se usa para denotar que no existe un criterio general que nos permita decidir el comportamiento de la situación en ese caso. Tenemos principalmente dos indeterminaciones, una para la suma y otra para el producto:

$$[\infty - \infty] \quad [0 \cdot \infty],$$

si bien la indeterminación para el producto puede aparecer en dos variantes aparentemente diferentes: $[0 / 0]$ y $[\infty / \infty]$.

Es interesante observar que **cualquier sucesión** puede expresarse en forma de las dos indeterminaciones mencionadas anteriormente:

- Dada una sucesión $\{z_n\}$, podemos escribir $z_n = x_n + y_n$, con $\{x_n\} \rightarrow +\infty$ e $\{y_n\} \rightarrow -\infty$. Basta definir $x_n = z_n + |z_n| + n$ e $y_n = z_n - x_n$, de modo que $x_n \geq n \rightarrow +\infty$ e $y_n \leq -n \rightarrow -\infty$.
- De igual forma, cualquier sucesión $\{z_n\}$ puede escribirse como $z_n = x_n y_n$, con $\{x_n\} \rightarrow +\infty$ e $\{y_n\} \rightarrow 0$. Por ejemplo, tomando $x_n = n(|z_n| + 1)$ e $y_n = z_n/x_n$, se cumple $x_n \geq n \rightarrow +\infty$ y $|y_n| \leq 1/n \rightarrow 0$.

2.3.1 Curiosidad: una indeterminación que no se puede determinar

Existe una relación sorprendente entre el cálculo de límites y el décimo problema de Hilbert. Este problema pregunta si existe un procedimiento algorítmico que permita decidir, dado un polinomio de k variables y coeficiente enteros, $P(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_k]$, si la ecuación diofántica

$$P(x_1, \dots, x_k) = 0$$

tiene alguna solución entera. El teorema de Davis–Putnam–Robinson–Matiyasevich establece que tal algoritmo no existe.

Veamos cómo este hecho puede traducirse en un problema sobre límites de sucesiones. Para ello, recordamos la función seno conocida de la secundaria y definimos el seno cardinal como:

$$\text{sinc}_\pi(t) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}, & t \neq 0, \\ 1, & t = 0. \end{cases}$$

Para todo entero $q \in \mathbb{Z}$, se tiene

$$\text{sinc}_\pi(q)^2 = \begin{cases} 1, & q = 0, \\ 0, & q \neq 0. \end{cases}$$

Por tanto, esta función permite detectar si un número entero es cero. Sea ahora $P \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_k]$ y definamos, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 1 - \prod_{\substack{m_1, \dots, m_k \in \mathbb{Z} \\ |m_1|, \dots, |m_k| \leq n}} \left(1 - \text{sinc}_\pi(P(m_1, \dots, m_k))^2\right).$$

Como $P(m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{Z}$, cada uno de los términos $\text{sinc}_\pi(P(m_1, \dots, m_k))^2$ vale 0 o 1. Más precisamente,

$$\text{sinc}_\pi(P(m_1, \dots, m_k))^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad P(m_1, \dots, m_k) = 0.$$

Es decir, $u_n = 1$ si P tiene una raíz en el cubo de enteros de lado $2n$. En consecuencia,

$$u_n = \begin{cases} 1, & \text{si existe } (m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{Z}^k \text{ con } |m_i| \leq n \text{ y } P(m_1, \dots, m_k) = 0, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

La sucesión (u_n) es, por tanto, creciente y está mayorada por 1, luego es convergente. Además,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \begin{cases} 1, & \text{si } P(x_1, \dots, x_k) = 0 \text{ tiene alguna solución entera,} \\ 0, & \text{si no tiene ninguna solución entera.} \end{cases}$$

A pesar de que cada término u_n puede calcularse mediante un número finito de operaciones, el teorema de Matiyasevich nos dice que no existe un algoritmo para determinar el valor del límite.

Por tanto, si definimos $a_n = \frac{u_n}{n}$, $b_n = \frac{1}{n}$, se tiene $\{a_n\} \rightarrow 0$ y $\{b_n\} \rightarrow 0$. Sin embargo,

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{u_n/n}{1/n} = u_n.$$

Por tanto, la sucesión $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ presenta una indeterminación del tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$ que no puede determinarse.

Aún así, el límite anterior existe siempre y solo puede tomar los valores 0 o 1. Simplemente no podemos decidir qué valor es.

2.4 Criterios de convergencia de sucesiones

El siguiente tema tiene un enfoque práctico, pues presentaremos dos criterios para resolver tipos concretos de indeterminaciones.

Para las indeterminaciones del tipo $[\infty/\infty]$, es útil el siguiente criterio ideado por el matemático austriaco O. Stolz, cuya demostración es altamente técnica y preferimos omitir.

Teorema 2.28 (Criterio de Stolz). Sea $\{\rho_n\}$ una sucesión de números positivos, estrictamente creciente y no mayorada (es decir, $0 < \rho_n < \rho_{n+1}$, y $\{\rho_n\} \rightarrow +\infty$).

Entonces, para toda sucesión $\{x_n\}$ y todo $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, se tiene

$$\left\{ \frac{x_{n+1} - x_n}{\rho_{n+1} - \rho_n} \right\} \rightarrow L \implies \left\{ \frac{x_n}{\rho_n} \right\} \rightarrow L.$$

Ejemplo

Problema. Demostrar que, para cualesquiera $x \in \mathbb{R}$ con $|x| > 1$ y $p \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{x^n} = 0.$$

Resolución. En primer lugar nos damos cuenta de que basta con tratar el caso $x > 1$, pues

$$\left| \frac{n^p}{x^n} \right| = \frac{n^p}{|x|^n}$$

y $|x| > 1$. Haremos una demostración por inducción en $p \in \mathbb{N}$, aplicando el criterio de Stolz con $\rho_n = x^n$ (que es positiva, estrictamente creciente y no mayorada).

Etapa base $p = 1$. Tomamos $x_n = n$. Entonces

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\rho_{n+1} - \rho_n} = \frac{(n+1) - n}{x^{n+1} - x^n} = \frac{1}{x^n(x-1)} \rightarrow 0,$$

y por Stolz se concluye $\frac{n}{x^n} \rightarrow 0$.

Paso inductivo. Supongamos cierto para un $p \in \mathbb{N}$, es decir, $\frac{n^p}{x^n} \rightarrow 0$. Tomamos ahora $x_n = n^{p+1}$. Entonces

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\rho_{n+1} - \rho_n} = \frac{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}}{x^{n+1} - x^n} = \frac{1}{x-1} \cdot \frac{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}}{n^p} \cdot \frac{n^p}{x^n}.$$

Usando el binomio de Newton, podemos ver que $(n+1)^{p+1} = n^{p+1} + (p+1)n^p + R(n)$, donde $R(n)$ es un polinomio de grado $< p$. Por tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}}{n^p} = \frac{(p+1)n^p + R(n)}{n^p} = p+1.$$

Por otro lado, el tercer factor tiende a 0 por hipótesis de inducción. Por tanto, el producto también tiende a 0. Aplicando de nuevo el criterio de Stolz, concluimos que

$$\left\{ \frac{n^{p+1}}{x^n} \right\} \rightarrow 0.$$

Ahora, si $\{x_n\}$ es una sucesión de números reales positivos, vamos a estudiar el comportamiento de la sucesión $\{\sqrt[n]{x_n}\}$. Esto anticipa un nuevo tipo de indeterminación, la del tipo $[\infty^0]$, que estudiaremos con más atención una vez que hayamos introducido las funciones *logaritmo* y *exponencial*.

Teorema 2.29 (Criterio de la raíz para sucesiones). Sea $\{x_n\}$ una sucesión con $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, para $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, se tiene

$$\left\{ \frac{x_{n+1}}{x_n} \right\} \rightarrow L \implies \{\sqrt[n]{x_n}\} \rightarrow L.$$

Ejemplo

Problema. Probar que $\sqrt[n]{n!} \rightarrow +\infty$.

Resolución. Consideramos $x_n = n!$, con $x_n > 0$. Entonces

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \rightarrow +\infty.$$

Por el criterio de la raíz para sucesiones, concluimos que

$$\sqrt[n]{n!} \rightarrow +\infty.$$

Nota: $n! = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1 = \prod_{i=1}^n i = n \cdot (n-1)!$