

Hoja 4

Funciones, límites y continuidad

Cálculo I · 1.º del Grado en Matemáticas y del Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

1. Encuentra el dominio natural de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$

(b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

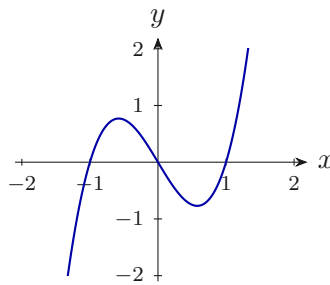
(c) $f(x) = \frac{1}{x - \sqrt{1 - x^2}}$

(d) $f(x) = \frac{1}{1 - \log x}$

(e) $f(x) = \frac{\sqrt{5 - x}}{\log x}$

(f) $f(x) = \log(x - x^2)$

2. Sea f una función cuya gráfica es la siguiente. Dibuja las gráficas de las funciones indicadas.



(a) $g(x) = f(x + 2)$

(b) $h(x) = f(x) - 1$

(c) $j(x) = f(|x|)$

(d) $k(x) = |f(x)|$

(e) $l(x) = f(2x)$

(f) $m(x) = f(1/x)$

3. Estudia la simetría de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

(b) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

(c) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

(d) $f(x) = e^{-x^2} \cos x$

4. Consideramos las funciones

$$f(x) = \cos x, \quad g(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1, 1], \\ x, & x \notin [-1, 1]. \end{cases}$$

a) Calcular $f \circ g$.

b) Calcular $g \circ f$.

5. Se consideran las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = e^x$, $h(x) = \cos x$.

a) Escribir la expresión analítica de las funciones $f \circ g$, $f \circ h + h \circ g$, $f \circ g \circ h$.

b) Escribir en términos de operaciones con las funciones f, g, h las expresiones

$$y = e^{\cos x}, \quad y = \cos(e^x + e^{x^2}), \quad y = e^{2x}.$$

6. Estudia cuáles de las siguientes funciones son inyectivas en su dominio natural, hallando su inversa en caso de que lo sean o, en caso contrario, dando un ejemplo de dos puntos con la misma imagen.

(a) $f(x) = 7x - 4$

(b) $f(x) = \sin(7x - 4)$

(c) $f(x) = (x + 1)^3 + 2$

(d) $f(x) = \frac{x + 2}{x + 1}$

(e) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

(f) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

(g) $f(x) = e^{-x}$

(h) $f(x) = \log(x + 1)$

7. Utilizando la formulación en términos de ε y δ , demostrar:

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x + 1} = \frac{1}{2}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{3 + x} = \frac{1}{2}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{|x|} = 0$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

8. Discutir la existencia de los límites siguientes y calcular su valor si es posible:

(a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 - 4}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(3 + \sin x)}{(x + \sin x)^2}$

(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x}}{x}$

(e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - x + 1}{\sqrt{x} + x - 1}$

(f) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{x+4}}{x^2 + 4x + 3}$

(g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x + 3^x}{x}$

(h) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{x^2 - 4}$

(i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x - 1|}{x - 1}$

(j) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \sin \frac{1}{x}$

(k) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/\sin^2 x}$

(l) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x^2}$

Indicación. En el caso (k), puede ser útil recordar que $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ para x suficientemente próximo a 0.

9. (*) Demostrar que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Utilizar esta propiedad para calcular:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{x - 1}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\tan x)}{x}$

10. Encontrar las constantes a y b para las cuales

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - ax - b \right) = 1.$$

11. Estudiar si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas:

- a) Si existen los límites $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$, entonces existe el límite $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$.
- b) Si no existen los límites $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$, entonces no existe el límite $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$.
- c) Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |\ell|$.
- d) Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \neq c$, entonces, en caso de existir ambos límites,

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow c} g(x).$$

- e) Si $f(x) < g(x)$ para todo $x \neq c$, entonces, en caso de existir ambos límites,

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) < \lim_{x \rightarrow c} g(x).$$

12. Sea f tal que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, y sea g tal que $|g(x)| < K$ para todo x , con $K > 0$. Demostrar que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$. Estudiar si se puede debilitar de alguna manera la hipótesis sobre g .

13. Estudiar los puntos de discontinuidad y establecer, en su caso, el tipo de la misma para las siguientes funciones (en el primer apartado, $a \in \mathbb{R}$):

a) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [a - 1, a), \\ x + a, & x \in [a, a + 1]. \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} -|\sin x| - 4, & x < \pi, \\ |\cos x| - 5, & x \geq \pi. \end{cases}$

14. Estudiar si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas:

- a) Si una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ alcanza un máximo y un mínimo en todo intervalo cerrado $[a, b]$, entonces es continua.
- b) Si una función f de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$ en todo intervalo $[a, b]$, entonces es continua.
- c) Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en 0 y satisface $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$, entonces f es continua en $\mathbb{R}$.

15. Dar un ejemplo de función definida sobre todos los reales que solo sea continua en los puntos 0 y 1.

16. Supóngase que f y g son funciones continuas en $[a, b]$ y que $f(a) < g(a)$, pero $f(b) > g(b)$. Demostrar que $f(x) = g(x)$ para algún $x \in (a, b)$.

17. Calcular todas las soluciones de las siguientes ecuaciones:

(a) $x - \sin x - 5 = 0$

(b) $\frac{x}{4} = x - \lfloor x \rfloor$

18. Sea $f(x) = \sin(1/x)$, definida para $x \neq 0$.

a) Estudiar la continuidad de f .

b) Demostrar que f toma todos los valores comprendidos entre $f(-1)$ y $f(1)$ en $[-1, 1] \setminus \{0\}$, aunque no está definida en 0.

19. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q}, \\ -x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Estudiar en qué puntos de $\mathbb{R}$ es continua f .

20. Estudiar la continuidad de las funciones $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) = \lfloor x^2 \rfloor, \quad g(x) = \begin{cases} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Notación. $\lfloor x \rfloor$ denota la parte entera de x , es decir, $\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$.