

Hoja 3

Series numéricas

Cálculo I ù 1.ž del Grado en Matemáticas y del Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

1. Sea $\sum_{k \geq 1} a_k$ una serie de términos no negativos. Sea $\sum_{k \geq 1} b_k$ una serie de términos positivos y supongamos que $a_k/b_k \rightarrow 0$.

- Demostrar que si $\sum_{k \geq 1} b_k$ converge, entonces $\sum_{k \geq 1} a_k$ converge.
- Demostrar que si $\sum_{k \geq 1} a_k$ diverge, entonces $\sum_{k \geq 1} b_k$ diverge.
- Mediante un ejemplo, demostrar que si $\sum_{k \geq 1} a_k$ converge, entonces $\sum_{k \geq 1} b_k$ puede converger o divergir.
- Demostrar mediante un ejemplo que si $\sum_{k \geq 1} b_k$ diverge, entonces $\sum_{k \geq 1} a_k$ puede converger o divergir.

2. Demostrar que las series siguientes divergen:

$$\sum_{k \geq 1} \left(\frac{k+1}{k} \right)^k, \quad \sum_{k \geq 2} \frac{k^{k-2}}{3^k}.$$

3. Determinar si las siguientes series convergen o divergen:

- | | | |
|---|---|---|
| (a) $\sum_{k \geq 1} \frac{k}{k^3 + 1}$ | (b) $\sum_{k \geq 1} \frac{\arctan k}{1 + k^2}$ | (c) $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^k}$ |
| (d) $\sum_{k \geq 1} \frac{k^2}{k^4 - k^3 + 1}$ | (e) $\sum_{k \geq 1} \frac{2 + \sin k}{k^3}$ | (f) $\sum_{k \geq 1} \frac{2 + \cos k}{k^2 \sqrt{k+1}}$ |

4. Estudiar la convergencia de las siguientes series:

- | | |
|---|---|
| (a) $\sum_{k \geq 1} \frac{10^k}{k!}$ | (b) $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k 2^k}$ |
| (c) $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k \log k}$ | (d) $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{100^n}$ |
| (e) $\sum_{k \geq 1} \frac{(\log k)^2}{k}$ | (f) $1 + \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \dots$ |
| (g) $\sum_{k \geq 1} k \left(\frac{2}{3} \right)^k$ | (h) $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{1 + \sqrt{k}}$ |
| (i) $\sum_{k \geq 1} \frac{2k + \sqrt{k}}{k^3 + 2\sqrt{k}}$ | (j) $\sum_{k \geq 1} \frac{k!}{10^{4+k}}$ |
| (k) $\sum_{k \geq 1} \frac{k^2}{e^k + 1}$ | (l) $\sum_{k \geq 1} \frac{2^k k!}{k^k}$ |

$$\begin{array}{ll}
\text{(m)} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{n!}{(n+2)!} & \text{(n)} \quad \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\log n)^{1/2}} \\
\text{(\tilde{n})} \quad \sum_{n \geq 3} \frac{1}{n \log n (\log(\log n))^{3/2}} & \text{(o)} \quad \sum_{k \geq 1} \frac{(k!)^2}{(2k)!} \\
\text{(p)} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{45}{1 + 100^{-n}} & \text{(q)} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{\log n}{n^2} \\
\text{(r)} \quad \sum_{n \geq 1} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) & \text{(s)} \quad \sum_{n \geq 1} (\sqrt[n]{n} - 1)^n \\
\text{(t)} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^{\log n}} &
\end{array}$$

5. Sea f una función creciente.

a) Demostrar que

$$f(1) + \cdots + f(n-1) \leq \int_1^n f(x) dx \leq f(2) + f(3) + \cdots + f(n).$$

b) Aplicar la fórmula anterior con $f(x) = \log x$, usando que $[x(\log x - 1)]' = \log x$, para probar que

$$\frac{n^n}{e^{n-1}} < n! < \frac{n^{n+1}}{e^{n-1}}.$$

c) Usar el apartado anterior para demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^{1/n}}{n} = \frac{1}{e}.$$

6. Describir la convergencia de la serie

$$\sum_{n \geq 1} \frac{a^n n!}{n^n},$$

según los valores de $a > 0$.

7. Una oruga avanza por una cuerda elástica de 100 metros de largo a una velocidad de 1 m/h. Cada hora, alguien estira 100 metros la cuerda de forma homogénea. ¿Llegará alguna vez la oruga al final de la cuerda?

8. Dos locomotoras se desplazan en línea recta, en sentido contrario, a 30 km/h, partiendo de dos puntos a una distancia de 180 km. Una paloma sale de uno de los puntos a 60 km/h en dirección a la locomotora que viene en sentido opuesto. Cuando llega a la misma, gira y se dirige hacia la otra locomotora, y va repitiendo el proceso indefinidamente. ¿Cuántos kilómetros habrá recorrido hasta que las locomotoras se encuentren? ¿Cuántos en cada sentido?

9. Calcular la suma de las siguientes series:

$$\begin{array}{lll}
\text{(a)} \quad \sum_{n \geq 3} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) & \text{(b)} \quad \sum_{n \geq 2} \frac{2}{n(n+2)} & \text{(c)} \quad \sum_{n \geq 2} \frac{3n+1}{n(n+1)(n+2)}
\end{array}$$

10. Decidir razonadamente si son ciertas las siguientes afirmaciones:

- (a) Si $\lim a_n = 0$, entonces $\sum_{n \geq 1} (-1)^n a_n$ es convergente.
- (b) Si para todo n , $a_n > 0$ y $\lim a_n = 0$, entonces $\sum_{n \geq 1} (-1)^n a_n$ es convergente.
- (c) Si para todo n , $a_n \geq a_{n+1} > 0$ y $\lim a_n = 0$, entonces $\sum_{n \geq 1} (-2)^n a_n$ es convergente.
- (d) Existe una sucesión $\{a_n\}$ tal que, para todo n , $a_n \geq a_{n+1} > 0$, $\lim a_n = 0$ y $\sum_{n \geq 1} (-n)^n a_n$ es convergente.

11. Probar que la serie

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{n}$$

es convergente pero no absolutamente convergente.

12. Estudiar la convergencia absoluta y condicional de las siguientes series:

$$(a) \sum_{k \geq 1} (-1)^k \frac{k^k}{3^k k!} \quad (b) \sum_{k \geq 2} (-1)^k \frac{1}{k \log k} \quad (c) \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$$

13. Identificar la función

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} (\cos(n! \pi x))^{2k} \right).$$

Esta función juega un papel importante en la teoría de la integral de Riemann.

14. Estudiar el carácter de la siguiente serie en función del valor de $p \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n \geq 2} \frac{p^n}{p^n + n^2}.$$

15. Demostrar que, si $\sum_{n \geq 1} x_n$ es convergente, entonces la sucesión de colas

$$\left\{ \sum_{k \geq n+1} x_k \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

converge a 0.

16. Para $a \in \mathbb{R}$ con $|a| < 1$, calcular la suma de las series

$$\sum_{n \geq 1} n a^n, \quad \sum_{n \geq 1} n(n-1) a^n, \quad \sum_{n \geq 1} n^2 a^n.$$