

Hoja 2

Sucesiones de números reales

Cálculo I · 1.º del Grado en Matemáticas y del Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

1. Estudiar el límite de las siguientes sucesiones

- | | | |
|--|--|---|
| (a) $\left\{ \frac{n^2}{n+2} \right\}$ | (b) $\left\{ \frac{n^3}{n^3+2n+1} \right\}$ | (c) $\left\{ \frac{n}{n^2-n-4} \right\}$ |
| (d) $\left\{ \frac{\sqrt{2n^2-1}}{n+2} \right\}$ | (e) $\left\{ \frac{\sqrt{n^3+2n+n}}{n^2+2} \right\}$ | (f) $\left\{ \frac{\sqrt{n+1}+n^2}{\sqrt{n+2}} \right\}$ |
| (g) $\left\{ \frac{(-1)^n n^2}{n^2+2} \right\}$ | (h) $\left\{ \frac{n+(-1)^n}{n} \right\}$ | (i) $\left\{ \left(\frac{2}{3} \right)^n \right\}$ |
| (j) $\left\{ \left(\frac{5}{3} \right)^n \right\}$ | (k) $\left\{ \frac{2^n}{4^n+1} \right\}$ | (l) $\left\{ \frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}} \right\}$ |
| (m) $\left\{ \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n} \right\}$ | (n) $\left\{ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right\}$ | (ñ) $\left\{ \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right\}$ |

2.

(a) Utilizar la igualdad

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

para simplificar la expresión $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.

(b) Como aplicación calcular el límite de la sucesión

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}.$$

3. (*) Calcular

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n^2+1} + \frac{n+2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n+n}{n^2+n} \right).$$

4. Sea $a > 1$. Se define por recurrencia la sucesión $\{a_n\}$ por la relación $a_n = \sqrt{a \cdot a_{n-1}}$, $a_1 = \sqrt{a}$. Probar que la sucesión es monótona creciente y acotada. Hallar su límite.

5. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales definida por $a_{n+1} = \sqrt{2a_n+3}$, sabiendo que a_1 es un número mayor que $-\frac{3}{2}$. Demostrar que la sucesión converge y calcular su límite.

Indicación. Distinguir el caso $a_1 \geq 3$ y $a_1 < 3$.

6. Sea $a_1 = 1$. Definimos las siguientes sucesiones por recurrencia:

$$(a) \quad a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n, \quad (b) \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1}a_n, \quad (c) \quad a_{n+1} = \frac{n}{n+1}a_n, \quad (d) \quad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}a_n$$

Probar que cada una de ellas es acotada y monótona. Hallar el límite.

7. Se define recurrentemente la sucesión $a_1 = a > 0$ y $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}$. ¿Es convergente la sucesión?

8. Demostrar que si $A \subset \mathbb{R}$ está acotado superiormente, existe una sucesión $\{a_n\}$ con $a_n \in A$ y tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup A$.

9.

a) (*) Demostrar que la sucesión

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

es monótona creciente y está acotada superiormente. Por consiguiente, tiene un límite, que denotamos por e .

Indicación. Puede ser útil tener en cuenta la fórmula del binomio de Newton,

$$(n+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} n^k, \quad \text{donde} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad \text{y } 0! = 1.$$

b) (**) Demostrar que si $a_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \frac{1}{e}.$$

10. Calcular, si existen, los límites de las sucesiones que tienen como término general

$$a_n = \left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{2n^2-3}, \quad b_n = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{2n^2+3}, \quad c_n = a_n + \frac{1}{b_n}.$$

11. (*)

(a) Probar por inducción que para $n = 1, 2, \dots$ se tienen las desigualdades

$$2^{n-1}n! \leq n^n \leq e^{n-1}n!.$$

Indicación. Tener en cuenta la fórmula del binomio de Newton.

(b) Como aplicación probar las siguientes afirmaciones

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{\frac{1}{n}} = \infty.$$

12. Hallar los siguientes límites

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^3 - 1)^{\frac{1}{3n}}.$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left((n+1)^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}} \right).$

c) (*) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left((n+1)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}} \right).$

d) (**) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left((n+1)^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n}} \right).$

13. Interpretar las expresiones siguientes como el límite de una sucesión definida de forma recurrente:

(a) $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}$ (b) (*) $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}$ (c) (*) $2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}$.

Probar que esos límites existen y calcular su valor numérico.

- 14.** La sucesión de término general $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ cumple que, dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que $|a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$ para $n > n_0$. Demostrar que, sin embargo, la sucesión no es de Cauchy.
- 15.** Sea $\{x_n\}$ una sucesión. Si existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $\{x_{2n}\} \rightarrow L$ y $\{x_{2n-1}\} \rightarrow L$, entonces $\{x_n\} \rightarrow L$.