

Hoja 1

Números reales. Principio de inducción

Cálculo I · 1.º del Grado en Matemáticas y del Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

1. Indicar en la recta real todos los valores de x que satisfacen las siguientes condiciones:

- | | |
|------------------------------|---|
| (1) $ x + 1 > 3$, | (2) $\frac{x^2}{x^2 - 4} < 0$, |
| (3) $ 2x + 1 < 1$, | (4) $\frac{x - 1}{x + 2} > 0$, |
| (5) $ x - 1 \leq x + 1 $, | (6) $ (x - 2)(x - 3) < 1$, |
| (7) $x^2 - 4x + 6 < x$, | (8) $ x - 1 + x - 2 > 1$, |
| (9) $ x^2 - 3 \leq 1$, | (10) $\frac{ x + 1 }{ x - 1 } \geq 1$. |

2. Demostrar por inducción:

- | | |
|---|--|
| (1) $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. | (2) $1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2$. |
| (3) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. | (4) $\forall n \geq 10, 2^n \geq n^3$. |
| (5) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$. | (6) $x^{2n} - y^{2n}$ es divisible por $x + y$. |
| (7) $4(1 + 5 + 5^2 + \cdots + 5^n) + 1 = 5^{n+1}$. | (8) $n(n^2 + 5)$ es divisible por 6 |
- (9) El número de rectas determinado por $n \geq 2$ puntos, de los cuales ningún trío pertenece a la misma recta, es $\frac{1}{2}n(n-1)$.
- (10) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$.
- (11) Si n no es múltiplo de 4 la suma $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ es múltiplo de 10.
- Indicación.** Comprobarlo para $n = 1, 2, 3$ y demostrar que si es cierto para n , lo es para $n + 4$.
- (12) $1 + 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + (n-1)(n-1)! = n!$ para $n \geq 2$.

3. Sea $P(n)$ la afirmación “ $n^2 + 5n + 1$ es un número par”.

- Demostrar que si $P(n)$ es cierto, entonces $P(n+1)$ también lo es.
- Demostrar que $P(n)$ es siempre falso.

4. Demostrar que para todo número natural n y a y b cualesquiera se cumple

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

donde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad \text{y } 0! = 1.$$

Indicación. Demostrar primero que $\binom{i}{k-1} + \binom{i}{k} = \binom{i+1}{k}$.

5. Demostrar por inducción sobre n que

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, \quad \text{si } r \neq 1.$$

6. Demostrar la desigualdad de Bernoulli

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx, \quad \text{para } x \geq -1.$$

7. Sean a, b dos números no negativos, con $a \leq b$. Demostrar que

$$a \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq b.$$

8. Encontrar el supremo y el ínfimo de los siguientes conjuntos de números reales. ¿Son máximo o mínimo en algún caso?

- | | |
|--|---|
| (1) $A = \{x : x^2 < 4\},$ | (5) $E = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\},$ |
| (2) $B = \{x : x^2 \geq 4\},$ | (6) $F = E \cup \{0\},$ |
| (3) $C = \{x : 2 < x^2 \leq 4\},$ | (7) $G = \left\{\frac{1}{n} - (-1)^n : n \in \mathbb{N}\right\},$ |
| (4) $D = \left\{\frac{n-1}{n} : n = 1, 2, 3, \dots\right\},$ | (8) $H = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0, x^2 \leq 3\}.$ |

9. Si el conjunto A tiene supremo, ¿qué podemos decir sobre $-A = \{-x : x \in A\}$?

10. Sean A y B dos subconjuntos no vacíos de números reales tales que $a < b$ para todo $a \in A$ y $b \in B$. Demostrar que existen $\sup A$, $\inf B$, y que además, $\sup A \leq \inf B$. Dar un ejemplo donde estos dos valores coincidan.

11. Sean A y B dos subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ acotados superiormente, y sea $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$. Demostrar que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Indicación. Para demostrar que $\sup A + \sup B \leq \sup(A + B)$ basta ver que $\sup A + \sup B \leq \sup(A + B) + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Elegir a en A y b en B tales que $\sup A - a < \varepsilon/2$ y $\sup B - b < \varepsilon/2$.

12. ¿Dónde está el fallo en los siguientes razonamientos?

- (a) Sea $x = y$, entonces $x^2 = xy$ y $x^2 - y^2 = xy - y^2$. Así, $(x+y)(x-y) = y(x-y)$, es decir, $x+y = y$. De aquí se sigue que $2y = y$ y por lo tanto $2 = 1$. **¡Contradicción!**
- (b) Vamos a hallar los x que verifican

$$\frac{x+1}{x-1} \geq 1.$$

Esta desigualdad es equivalente a $x+1 \geq x-1$, o lo que es lo mismo $1 \geq -1$. Como esto es cierto para todo $x \in \mathbb{R}$, se sigue que el conjunto de valores que verifican la desigualdad anterior es $\mathbb{R}$. De esta forma, tomando en particular $x = -1$ obtenemos

$$0 = \frac{-1+1}{-1-1} \geq 1. \quad \textbf{¡Contradicción!}$$