# Práctica I — Cálculo I

Sergio Cruz y Ana Primo

Sean $\sum_{n\geq 1} b_n$ una serie absolutamente convergente con $b_1 = -1$ y $\{a_n\}$ una sucesión definida mediante la fórmula recursiva

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}\, a_n + {b_n}^2 \quad n \in \mathbb{N}.$$

(a) Demostrar que la serie $\sum_{n\geq 1} {b_n}^2$ es convergente.
(b) Probar que la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ también converge.

**Solución:**

(a) $\{b_n\} \to 0$, luego existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $|b_n| < 1$ para todo $n \geq m$. Multiplicando la desigualdad anterior por $|b_n|$ llegamos a que, para $n \geq m$ se tiene

$$0 \leq {b_n}^2 < |b_n|\,,$$

luego $\sum_{n\geq 1} b_n^2$ converge por comparación.

(b) Se comprueba fácilmente por inducción que $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En efecto, $a_1 = 1 > 0$ y, suponiendo que $a_n \geq 0$, llegamos a que $a_{n+1} \geq {b_n}^2 \geq 0$. Por lo tanto,

$$\sum_{n\geq 1} a_n \text{ converge} \iff \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k \right\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ está mayorada.}$$

Sumamos la fórmula recursiva para cada $k = 1, \ldots, n$ y ajustamos los índices:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k+1} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} {b_k}^2 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1} - a_1 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} {b_k}^2.$$

Por tanto,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 2a_1 + 2\sum_{k=1}^{n} {b_n}^2 - 2a_{n+1}. \tag{1}$$

Usando que $a_{n+1} \geq 0$ y que existe $M > 0$ de forma que $\sum_{k=1}^{n} {b_n}^2 \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pues son las sumas parciales de una serie convergente de términos no negativos, tenemos

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leq 2\sum_{k=1}^{n} {b_k}^2 + 2 \leq 2M + 2. \tag{2}$$

Por tanto, la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ es convergente.

**Extra:** Una vez conocido que $\sum_{n\geq 1} a_n$ es convergente, sabemos que $\{a_{n+1}\} \to 0$, lo que nos permite pasar al límite en (1) para obtener

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} {b_n}^2.$$

**Extra 2:** Una demostración mucho más directa y elegante, aunque bastante menos inmediata de encontrar, es probar la primera desigualdad de (2) por inducción.