Parcial I — Cálculo I

Sergio Cruz y Ana Primo

Ejercicio 1 (5 ptos) Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, escribiendo una demostración si es verdadera o dando un contraejemplo si es falsa.

a) (1 pto) Existe una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to +\infty$ que admite una subsucesión parcial decreciente.

b) (1 pto) Toda sucesión de Cauchy de números racionales es convergente en $\mathbb{Q}$.

c) (1 pto) Si una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cumple $|a_n - a_{n-1}| \leq \dfrac{1}{2^n}$ $\forall n \geq 2$, entonces es de Cauchy.

d) (1 pto) La siguiente serie es convergente pero no absolutamente convergente: $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{n+2}{n^2+n+1}$.

e) (1 pto) Si $\sum_{n\geq 1} x_n$ es una serie convergente, entonces $\sum_{n\geq 1} x_{2n}$ también es convergente.

SOLUCIÓN:

(a) **Falso**. Supongamos que existe una sucesión parcial $\{a_{\sigma(n)}\}$ decreciente. Sabemos que entonces $\{a_{\sigma(n)}\} \to +\infty$ también, lo que nos da un $m \in \mathbb{N}$ de forma que $a_{\sigma(n)} > a_{\sigma(1)}$ para $n \geq m$, lo que contradice que sea decreciente.

(b) **Falso**. Sea por ejemplo $x_n = \frac{\lfloor 10^n\sqrt{2}\rfloor}{10^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (las aproximaciones decimales sucesivas de $\sqrt{2}$). Se tiene que $x_n \in \mathbb{Q}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{x_n\} \to \sqrt{2}$ en $\mathbb{R}$.

Por el teorema de completitud de $\mathbb{R}$, $\{x_n\}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$, pero este hecho no depende del valor de su límite, por lo que $\{x_n\}$ también es de Cauchy en $\mathbb{Q}$, pero no es convergente en $\mathbb{Q}$, ya que eso contradiría la unicidad del límite.

(c) **Verdadero**. Sean $p, q \in \mathbb{N}$, y supongamos por comodidad que $q > p$. Entonces, usando la desigualdad triangular y la hipótesis del enunciado, se tiene:

$$|a_q - a_p| = |a_q - a_{q-1} + a_{q-1} - a_{q-2} + a_{q-2} - \ldots + a_{p+1} - a_p| \leq \sum_{n=p+1}^{q} |a_n - a_{n-1}|$$

$$\leq \sum_{n=p+1}^{q} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{q} \frac{1}{2^n} - \sum_{n=0}^{p} \frac{1}{2^n} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{q+1}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{p+1}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^p} - \frac{1}{2^q} \leq \frac{1}{2^p}.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\{\frac{1}{2^n}\}_{n\in\mathbb{N}} \to 0$, podemos encontrar $m \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq m$ se tiene $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Consecuentemente, para $p, q \in \mathbb{N}$, $p, q \geq m$ se tiene

$$|a_q - a_p| \leq \frac{1}{2^p} < \varepsilon,$$

lo que demuestra que es de Cauchy.

Alternativamente, podemos recordar que toda sucesión puede escribirse como una serie telescópica sin más que escribir $a_0 = 0$ y

$$\{a_n\} = \sum_{n\geq 1}(a_k - a_{k-1}).$$

La hipótesis nos dice que la serie $\sum_{n\geq 1} |a_k - a_{k-1}|$ es convergente por el criterio de comparación con $\sum_{n\geq 1} 1/2^n$. Por tanto, la serie $\sum_{n\geq 1} a_k - a_{k-1}$ es absolutamente convergente, y por tanto convergente. Esto nos dice que $\{a_n\}$ es convergente y por tanto de Cauchy.

(d) **Verdadero**. Llamemos $a_n = \frac{n+2}{n^2+n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Claramente $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{a_n\} \to 0$. Por un lado

$$\frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \frac{n^2+2n}{n^2+n+1} \to 1,$$

luego la convergencia de $\sum_{n\geq 1} a_n$ equivale a la de $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ por el criterio de comparación. Como la serie armónica no es convergente, tampoco converge absolutamente nuestra serie.

En cambio, podemos ver que sí es convergente por el criterio de Leibniz, ya que a_n es decreciente:

$$a_{n+1} \leq a_n \iff \frac{n+3}{n^2+3n+3} \leq \frac{n+2}{n^2+n+1} \iff 0 \leq n^2+5n+3.$$

(e) **Falso.** La serie del apartado anterior proporciona un contraejemplo. También puede considerarse la armónica alternada $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ para $n \in \mathbb{N}$. La serie $\sum_{n\geq 1} x_n$ es convergente por el criterio de Leibniz pero

$$\sum_{n\geq 1} x_{2n} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n}$$

no lo es.

Ejercicio 2 (2,5 ptos) Se considera la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por recurrencia mediante

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2 - \frac{1}{n} + \sqrt{a_n}, \\ a_1 = 2. \end{cases}$$

a) (1,5 ptos) Demostrar que la sucesión es monótona creciente y está acotada superiormente por 5.

b) (1 pto) Justificar que la sucesión es convergente y calcular su límite.

SOLUCIÓN:

a) Probamos en primer lugar que $a_n \leq 5$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Lo hacemos por inducción sobre n: para $n = 1$ tenemos claramente $a_1 = 2 < 5$. Ahora, supuesto cierto para algún $n \in \mathbb{N}$, se ve sin dificultad que

$$a_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n} + \sqrt{5} \leq 2 + \sqrt{5} < 5.$$

Veamos ahora que a_n es creciente ($a_n \geq a_{n-1}$), también por inducción. Para $n = 2$ tenemos $a_2 = 1 + \sqrt{2} > 2 = a_1$. Si suponemos que la hipótesis es cierta para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$a_{n+1} - a_n = 2 - \frac{1}{n} + \sqrt{a_n} - \left(2 - \frac{1}{n-1} + \sqrt{a_{n-1}}\right) = \frac{1}{n(n-1)} + \sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}} \geq 0,$$

donde hemos usado al final que $\sqrt{x} \geq \sqrt{y}$ para todo $x \geq y \geq 0$.

b) La sucesión $\{a_n\}$ es creciente y mayorada, luego es convergente. De hecho, $\{x_n\} \to L = \sup x_n$. Para determinar L, observamos que $\{a_{n+1}\}$ es una subsucesión de $\{a_n\}$, por lo que debe tenerse también $\{a_{n+1}\} \to L$. Entonces, tomando límite en la definición

$$L = 2 + \sqrt{L} \quad \Rightarrow \quad (L-2)^2 = L \quad \Rightarrow \quad L \in \{1, 4\}.$$

No puede tenerse $L = 1$ porque $a_n > a_1 = 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $L = 4$.

Ejercicio 3. (2,5 ptos) Sean $r \geq 0$ un parámetro real fijo, y $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ la serie de término general:

$$a_n = \frac{r^n\,(n!)^2}{(2n+1)!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(a) (1 pto) Demostrar que $\frac{(2n)!}{(n!)^2} \leq 4^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) (1.5 ptos) Estudiar la convergencia de la serie $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ en función del parámetro r.

SOLUCIÓN:

a) Lo hacemos por inducción sobre n. Para $n = 1$ tenemos $\frac{2!}{1^2} = 2 \leq 4^1 = 4$. Suponiendo que es cierto para algún $n \in \mathbb{N}$, para $n + 1$ se tiene

$$\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} = \frac{(2n)!(2n+2)(2n+1)}{(n!)^2(n+1)^2} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}\,\frac{4n^2+6n+3}{n^2+2n+1} \leq 4^n\left(4 - \frac{2n+1}{n^2+2n+1}\right) \leq 4^{n+1}.$$

b) Si $r = 0$, entonces $a_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y la serie es trivialmente convergente. Sea entonces $r > 0$. Como $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos intentar aplicar el criterio del cociente:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{r^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n+3)!}\,\frac{(2n+1)!}{r^n(n!)^2} = r\,\frac{(n+1)^2}{(2n+3)(2n+2)} \longrightarrow \frac{r}{4}.$$

Por el criterio del cociente, la serie converge si $0 < r < 4$ y diverge a $+\infty$ si $r > 4$. Para $r = 4$, el criterio no decide, pero podemos usar el apartado (a) para ver que

$$a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}\,\frac{4^n}{2n+1} \geq \frac{1}{2n+1}.$$

Como la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n+1}$ diverge, también lo hace $\sum_{n\geq 1} a_n$ por comparación.