CÁLCULO I: GRADO EN MATEMÁTICAS Y DOBLE GRADO MAT/ING. INFORMÁTICA

SOLUCIONES:

1. (i) Sea A un conjunto no vacío de números reales acotado inferiormente. Llamemos $a_0 = \inf A$ y supongamos que $a_0 > 0$. Se define el conjunto

$$B = \left\{ \frac{1}{x} : x \in A \right\}.$$

Demuestra que B está acotado superiormente y que $\sup B = \frac{1}{a_0}$.

SOL.: Verdadero. Sea $b_0 = \frac{1}{a_0}$. Queremos ver primero que b_0 es una cota superior de B. Para ello, dado $y \in B$ observamos que $\exists x \in A$ tal que $y = \frac{1}{x}$. Como $0 < a_0 \leq x$ [1], deducimos que $y = \frac{1}{x} \leq \frac{1}{a_0} = b_0$, es decir $y \leq b_0$ como queremos. [2]

De acuerdo con la definición, nos falta ver que si $b < b_0$ entonces b no puede ser cota superior de B. Podemos suponer que $b > 0$ porque en caso contrario ya habríamos terminado. Como ahora se tiene $a_0 = \frac{1}{b_0} < \frac{1}{b}$, deducimos que $\frac{1}{b}$ no es una cota inferior de A (porque a_0 es la más grande de todas ellas). Por tanto, $\exists x \in A$ tal que $x < \frac{1}{b}$. De esta forma, si llamamos $y = \frac{1}{x}$ tenemos que $y \in B$ y además $y = \frac{1}{x} > \frac{1}{1/b} = b$. Luego b no es cota superior de B como queríamos probar.

(ii) Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números positivos no acotada superiormente. Entonces $\{\frac{1}{x_n}\} \to 0$.

SOL.: Falso. Sea por ejemplo

$$x_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ es impar,} \\ 1 & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases} = \{1, 1, 3, 1, 5, 1, 7, \ldots\}.$$

La sucesión $\{x_n\}$ no está mayorada pero $\{\frac{1}{x_{2n}}\} = \{1\} \to 1$, luego no puede ser convergente a cero.

(iii) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua con $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Entonces f está acotada.

SOL.: Verdadero. Por definición de límite, para $\varepsilon = 1$ existe $K > 0$ tal que si $|x| > K$ entonces $|f(x)| < 1$. En $[-K, K]$, el Teorema de Weierstrass nos dice que f alcanza un máximo absoluto, al que llamamos $M \in \mathbb{R}$. Entonces

$$|f(x)| \leq \max\{1, M\}.$$

(iv) Sea I un intervalo no trivial y f una función dos veces derivable con $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Entonces f^{-1} es cóncava.

SOL.: Falso. La función $x \mapsto 1/x$ es convexa, es su propia inversa y es derivable en $\mathbb{R}^+$ con derivada distinta de cero.

¿Cómo darse cuenta? Derivando una vez la fórmula de la derivada de la función inversa tenemos

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \quad \Rightarrow \quad (f^{-1})''(f(x))f'(x) = \frac{-f''(x)}{f'(x)^2}$$
$$\Rightarrow \quad (f^{-1})''(f(x)) = \frac{-f''(x)}{f'(x)^3}.$$

[1] Obsérvese que todos los elementos de A (y por tanto también los de B) son positivos

[2] Las única propiedad que usaremos en este ejercicio sobre la relación de orden entre los números reales es que

$$\text{si } 0 < u < v \text{ entonces } 0 < \frac{1}{v} < \frac{1}{u}.$$

Por tanto, si f es estrictamente decreciente, f^{-1} tiene la misma curvatura que f. En cambio, si f es estrictamente creciente, f^{-1} tiene la curvatura opuesta. Esto también sirve como justificación.

(v) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función par derivable en $x = 0$. Entonces $f'(0) = 0$.

SOL.: Verdadero. Se tiene

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(-x) - f(0)}{-x} = -\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -f'(0).$$

Por tanto $f'(0) = 0$.

2. Sea $f : (0, 1) \to (0, 1)$ una función continua que satisface $f(x) > x$ para todo x en $(0, 1)$. Definimos la sucesión por recurrencia

$$x_{n+1} = f(x_n), \qquad \text{para } n \geq 1,$$

y donde el valor inicial x_1 es un número arbitrario en $(0, 1)$. Demuestra que la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ tiene límite y calcúlalo.

SOL.: Por las propiedades de la función, $0 < f(x) < 1$ y $x < f(x)$, se sigue que

$$x_n < f(x_n) = x_{n+1} < 1.$$

Luego la sucesión es creciente y acotada. Por la teoría vista en clase, la sucesión tiene límite L que verifica

$$L = \lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\}, \qquad 0 < L \leq 1,$$

lo último debido a que 1 es una cota superior del conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\}$. Ahora tenemos dos posibilidades:
$L < 1$: en este caso L pertenece al dominio de la función y, al ser continua, se debe cumplir

$$f(L) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = L.$$

Es decir, $f(L) = L$, lo cual es absurdo por las hipótesis sobre f.
Luego la única opción posible es que $L = 1$.

3. Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$F(x) = \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad F(0) = \log 3.$$

(i) Probar que F tiene simetría par.

(ii) Calcular el polinomio de Taylor de orden 3 de la función seno centrado en 0, y demostrar que para cada $x \in [0, \pi]$ se tiene

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x.$$

(iii) Concluir que F es continua en $x = 0$.

(iv) Justificar que F es derivable en $\mathbb{R}$ con $F'(0) = 0$.

(v) Demostrar que F es Lipschitziana.

(vi) Sea $I = [-\pi, \pi]$. Estudiar la monotonía y calcular los extremos relativos y absolutos de F en I. Determinar $F(I)$.

Sugerencia: Las siguiente fómula puede ser de utilidad

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

SOL.:

(i) Hacemos el cambio de variable $-t = s$ en la integral.

$$F(-x) = \int_{-x}^{-3x} \frac{\sin t}{t^2} dt = \int_x^{3x} \frac{\sin(-s)}{(-s)^2}(-1) ds = \int_x^{3x} \frac{\sin s}{s^2} ds = F(x).$$

(ii) Un sencillo cálculo nos da que

$$T_3[\sin, 0](x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{\sin^{(k)(0)}}{k!} x^k = x - \frac{x^3}{6}.$$

Usando ahora la fórmula de Taylor, obtenemos puntos indeterminados $c, d \in [0, \pi]$ tales que

$$\begin{aligned} \sin x - x &= \frac{\sin^{(2)}(c)}{2!} x^2 = \frac{-\sin c}{2!} x^2 \leq 0, \\ \sin x - x + \frac{x^3}{6} &= \frac{\sin^{(4)}(d)}{4!} x^4 = \frac{\sin d}{4!} x^4 \geq 0. \end{aligned}$$

(iii) Sean $x > 0$ y $t \in [x, 3x]$. Integrando la desigualdad anterior para t obtenemos, por la monotonía de la integral:

$$\int_x^{3x} \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{6} \right) dt \leq F(x) \leq \int_x^{3x} \frac{1}{t} dt \quad \Rightarrow \quad \log 3 - \frac{3x^2}{4} + \frac{x^2}{12} \leq F(x) \leq \log 3.$$

Por el criterio del sandwich y la simetría par de la función F;

$$\lim_{x \to 0^+} F(x) = \log 3 = \lim_{x \to 0^-} F(x).$$

Por tanto, F es continua en $x = 0$.

(iv) f es una función continua en $\mathbb{R}^+$, luego admite una primitiva g, que es derivable por el Teorema fundamental del cálculo. Por la regla de Barrow, $F(x) = g(3x) - g(x)$, luego F es derivable. Un razonamiento análogo nos da la derivabilidad de F en $\mathbb{R}^-$. Además,

$$F'(x) = 3f(3x) - f(x) = \frac{3\sin 3x}{9x^2} - \frac{\sin x}{x^2} = \frac{\sin 3x - 3\sin x}{3x^2} = \frac{-4\sin^3 x}{3x^2} \quad \forall x \neq 0.$$

Como F es continua en $x = 0$, el Teorema del valor medio nos permite calcular

$$F'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{-4}{3} \frac{\sin^3 x}{x^2} = \frac{-4}{3} \lim_{x \to 0} x \left(\frac{\sin x}{x} \right)^3 = 0.$$

Por tanto F es derivable en todo $\mathbb{R}$.

(v) Hemos visto que F es derivable, luego será Lipschitziana si y solo si F' está acotada en $\mathbb{R}$. Si $|x| > 1$, se tiene

$$|F'(x)| \leq \frac{4}{3}.$$

Para $x \in [-1, 1]$, al ser $|F'|$ una función continua, el Teorema de Weierstrass nos da un máximo absoluto en dicho intervalo. Por tanto, F' está acotada en $\mathbb{R}$ y F es Lipschitziana.

(vi) Como F tiene simetría par, F' tendrá simetría impar, por lo que basta con restringirnos a $[0, \pi]$. Usando la expresión de la derivada calculada en los apartados anteriores es fácil ver que

$$F'(x) < 0 \quad \forall x \in (0, \pi).$$

Por tanto, F es creciente en $[-\pi, 0]$ y decreciente en $[0, \pi]$ por el Teorema del valor medio. Por tanto, en $x = 0$ hay un máximo relativo que también es absoluto.

Los puntos de mínimo absoluto, que existen por el Teorema de Weierstrass, están en $x = -\pi$ y $x = \pi$. Combinando todo lo anterior tenemos que $F[-\pi, \pi] = [-F(\pi), \log 3]$.

4 Estudiar la convergencia de la siguiente serie y de la integral impropia:

$$\text{(0,75 ptos)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^n\,(n+1)!} \qquad \text{(0,75 ptos)} \int_1^{\infty} \frac{1}{e^x - 1}\, dx.$$

SOL.:

i) La siguiente serie es divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^n(n+1)!}.$$

Basta con aplicar el criterio del cociente y ver que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4}{e} > 1.$$

ii)

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{e^x - 1}\, dx.$$

Buscamos una primitiva del integrando haciendo el cambio de variables $y = e^x - 1$ o, lo que es lo mismo, $x = \ln(y+1)$ y $dx = \frac{1}{y+1}dy$. De esta forma

$$\int \frac{1}{e^x - 1}\, dx = \int \frac{1}{y(y+1)} dy = \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}\right) dy = \ln y - \ln(y+1) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x}\right).$$

Utilizando la definición de integral impropia se tiene

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{1}{e^x - 1}\, dx &= \lim_{R\to\infty} \int_1^{R} \frac{1}{e^x - 1}\, dx = \lim_{R\to\infty} \ln\left(\frac{e^R - 1}{e^R}\right) - \ln\left(\frac{e - 1}{e}\right) \\
&= \lim_{R\to\infty} \ln\left(1 - e^{-R}\right) + \ln\left(\frac{e}{e-1}\right) = \ln\left(\frac{e}{e-1}\right) \\
&= 1 - \ln(e-1).
\end{aligned}$$

Alternativamente, como $\frac{1}{e^x - 1}$ es positiva en $(1, +\infty)$, podemos compararla con la función $x \to e^{-x}$ en $+\infty$, que es donde la integral se vuelve impropia. Vemos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1/(e^x - 1)}{1/e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = 1,$$

luego el carácter de ambas integrales es equivalente. Vemos sin problema que

$$\int_1^{+\infty} e^{-x} dx = [-e^{-x}]_1^{+\infty} = \frac{1}{e},$$

luego la integral considerada converge.

Alternativamente, como $\frac{1}{e^x-1}$ es decreciente y el intervalo de integración es no acotado, podemos usar el criterio de la integral para series para concluir que la convergencia de la integral es equivalente a la de la serie

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{e^n - 1}.$$

Dicha serie converge de forma manifiesta por el criterio del cociente, por ejemplo, ya que es de términos positivos y

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1/(e^{n+1}-1)}{1/(e^n-1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^n - 1}{e \cdot e^n - 1} \to \frac{1}{e} < 1.$$