Práctica 2

Enunciado. Se considera la ecuación

$$f(x)^3\, e^{3f(x)} = x \quad \forall\, x > -e^{-3}. \tag{E}$$

1. Justificar que existe una única función $f : (-e^{-3}, +\infty) \to \mathbb{R}$ cumpliendo (E).
   Indicación: Piensa en la relación que debe existir entre f y la función $y \mapsto y^3 e^{3y}$.
2. Demostrar que f es continua en $(-e^{-3}, +\infty)$ y derivable en $(-e^{-3}, 0) \cup (0, +\infty)$.
3. Probar que f no es derivable en 0. Explicar geométricamente qué le ocurre a la recta tangente a la gráfica de f en $(0, 0)$.
4. Evaluar el siguiente límite

$$\lim_{x\to e^3} \frac{6f(x) - 5 - e^{-3}x}{(x - e^3)^2}$$

   Sugerencia: Calcula el polinomio de Taylor de orden 2 de f en e^3.

Solución.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $g(y) = y^3 e^{3y}$. Claramente $g \in C^1(\mathbb{R})$ con

$$g'(y) = 3e^{3y} y^2 (y + 1) \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Nuestra intención es invertir g en un intervalo adecuado, así que el primer paso es determinar qué restricciones de g son inyectivas.

(i) Para $y \in (-\infty, -1)$ se tiene $g'(y) < 0$, luego g es estrictamente decreciente y, por tanto, inyectiva.
(ii) Para $y \in (-1, 0)$ tenemos $g'(y) > 0$, de modo que g es estrictamente creciente y, por ello, inyectiva.
(iii) Para $y \in (0, +\infty)$ se tiene de nuevo $g'(y) > 0$, luego g vuelve a ser estrictamente creciente e inyectiva.

Como g es continua en $y = 0$, el teorema del valor medio nos permite concluir a partir de los puntos (ii) y (iii) que g es estrictamente creciente en $(-1, +\infty)$, y por tanto inyectiva.

Vemos sin dificultad que

$$\lim_{y\to-\infty} g(y) = 0, \quad g(-1) = -e^{-3} \quad \text{y} \quad g(y) \to +\infty\ (y \to +\infty),$$

lo que sumado a la monotonía nos da $g(-\infty, -1) = (-e^{-3}, 0)$ y $g(-1, +\infty) = (-e^{-3}, +\infty)$. Por tanto, para resolver (E) debemos tomar

$$f = \left(g|_{(-1,+\infty)} \right)^{-1},$$

ya que, por definición de inversa, $g|_{(-1,+\infty)}(f(x)) = f(x)^3 e^{3f(x)} = x$ para todo $x > -e^{-3}$. La unicidad de f es consecuencia de la unicidad de la función inversa.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Como $g|_{(-1,+\infty)}$ es estrictamente creciente y está definida en un intervalo, su inversa, f, es continua en $(-e^{-3}, +\infty)$. Aplicando la regla de derivación de la función inversa sabemos que f será derivable en $g(y)$ si, y solo si, $g|'_{(-1,+\infty)}(y) \neq 0$.

Por el carácter local de la derivada,

$$g|'_{(-1,+\infty)}(y) = 3e^{3y} y^2 (y + 1) \quad \forall y > -1,$$

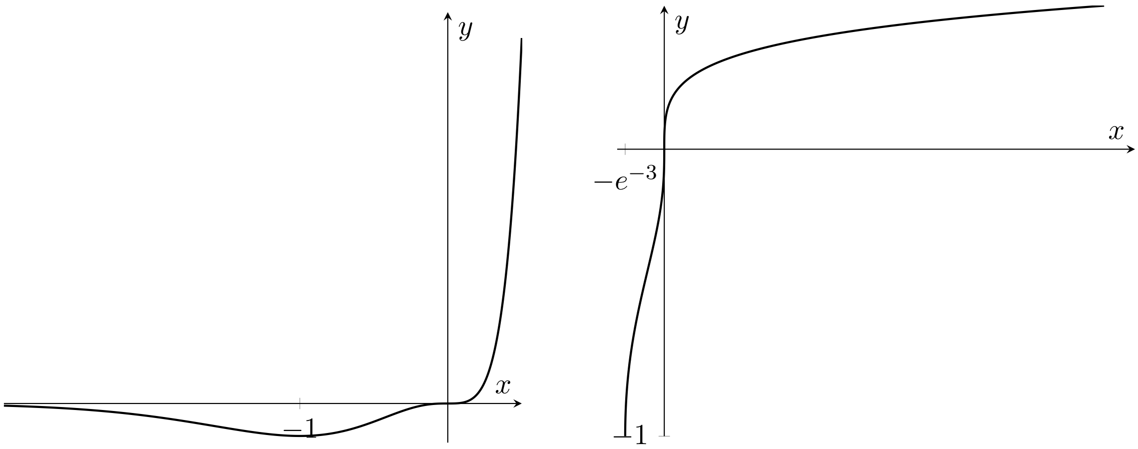
de donde vemos inmediatamente que f será derivable en todos los puntos de $(-e^{-3}, +\infty)$ excepto en $g(0) = 0$. Además, para $y \neq 0$,

$$f'(g(y)) = \frac{e^{-3y}}{3y^2(y+1)}. \tag{D}$$

Como $g|_{(-1,+\infty)}$ es una biyección con su imagen, $g(y) \to 0 \iff y \to 0$, lo que nos da la información de que

$$f'(g(y)) \to +\infty \quad (y \to 0^{\pm}).$$

Por tanto, la recta tangente a f en $x = 0$ es **vertical**.



Gráficas de g (izquierda) y f (derecha).

$\boxed{4}$ Aunque no conozcamos la expresión explícita de f, podemos resolver este límite mediante la fórmula infinitesimal del resto. Calculamos pues su polinomio de Taylor de orden 2 en $x = e^3$.

Para calcular $f(e^3) = (g|_{(-1,+\infty)})^{-1}(e^3)$ debemos encontrar el único $y > -1$ tal que $y^3 e^{3y} = e^3$. Es fácil darse cuenta de que una solución es $y = 1$, y esta es única por la inyectividad de g. Por tanto, $f(e^3) = 1$.

Para determinar $f'(e^3)$, simplemente sustituimos $y = 1$ en (D):

$$f'(e^3) = \frac{1}{6e^3}.$$

Derivando una vez más (D) y usando la regla de la cadena:

$$f''(g(y))g'(y) = -\frac{e^{-3y}(2+6y+3y^2)}{3y^3(1+y)^2} \quad \Longrightarrow \quad f''(e^3) = -\frac{11e^{-3}}{12g'(1)} = \frac{-11}{72e^6}.$$

Hemos calculado entonces

$$T_2[f, e^3](x) = 1 + \frac{1}{6e^3}(x - e^3) - \frac{11}{144e^6}(x - e^3)^2.$$

Si $R_2(x - e^3)$ denota el correspondiente resto de Taylor de orden 2, vemos finalmente que

$$\lim_{x \to e^3} \frac{6f(x) - 5 - e^{-3}x}{(x - e^3)^2} = \lim_{x \to e^3} \frac{-\frac{11}{24e^6}(x - e^3)^2 + 6R_2(x - e^3)}{(x - e^3)^2} = -\frac{11}{24e^6}.$$