

# Apuntes de Cálculo I

Año académico 2025–2026

---

# Índice general

<b>1 Los números reales y sus propiedades</b>	<b>1</b>
1.1 Subconjuntos notables. Suma y producto de números reales. . . . .	1
1.2 Orden de los números reales. . . . .	5
1.3 Valor absoluto. . . . .	6
1.4 Supremo e ínfimo. Postulado del continuo. . . . .	8
1.5 Densidad de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ en $\mathbb{R}$ . . . . .	11
1.6 Principio de inducción. . . . .	14
1.7 Numerabilidad . . . . .	17
Anexos del capítulo . . . . .	22
1.A Resolución de inecuaciones con valor absoluto . . . . .	22
<b>2 Sucesiones de números reales</b>	<b>24</b>
2.1 Sucesiones convergentes . . . . .	25
2.2 Sucesiones monótonas . . . . .	33
2.3 Sucesiones divergentes . . . . .	39
2.4 Criterios de convergencia de sucesiones . . . . .	42
<b>3 Series</b>	<b>45</b>
3.1 Ejemplos de series . . . . .	46
3.2 Criterios de convergencia para series de términos no negativos . . . . .	50
3.3 Criterios de convergencia para series de signo variable . . . . .	57
Anexos del capítulo . . . . .	59
3.A Convergencia incondicional . . . . .	59
<b>4 Funciones reales de una variable real</b>	<b>61</b>
4.1 Introducción . . . . .	61
4.2 Funciones continuas . . . . .	71
4.3 Límite funcional . . . . .	77
4.4 Límites en el infinito y divergencia de funciones . . . . .	85
4.5 Propiedades de las funciones continuas . . . . .	91
<b>5 Funciones derivables</b>	<b>99</b>
5.1 Definición de derivada . . . . .	101
5.2 Reglas de derivación . . . . .	103
5.3 Teorema del Valor Medio . . . . .	107
5.4 Funciones convexas . . . . .	117
5.5 Las reglas de L'Hôpital . . . . .	121
5.6 Derivadas sucesivas . . . . .	125
5.7 Fórmula de Taylor . . . . .	129

<b>6 Funciones integrables</b>	<b>141</b>
6.1 Continuidad uniforme . . . . .	141
6.2 La integral de Riemann . . . . .	145
6.3 El Teorema Fundamental del Cálculo . . . . .	155
6.4 Logaritmos y exponentiales . . . . .	161
6.5 Funciones trigonométricas . . . . .	173
6.6 Integrales impropias de Riemann . . . . .	183
Anexos del capítulo . . . . .	191

# Capítulo 1

## Los números reales y sus propiedades

Comprender el conjunto de los números reales es el primer paso esencial en el estudio del Análisis Matemático. Lo presentaremos a partir de sus subconjuntos más relevantes, sin dar una definición concreta de *número real*, porque lo importante no es tanto qué es un real como qué propiedades cumple el conjunto de los reales. En este primer tema estudiaremos su estructura y propiedades fundamentales, que serán conceptos matemáticos básicos para los capítulos posteriores.

### 1.1 Subconjuntos notables. Suma y producto de números reales.

El ejemplo más sencillo de números reales son los números que utilizamos para contar: 1, 2, 3, .... Llamamos a este conjunto **números naturales**, y lo denotaremos mediante  $\mathbb{N}$ . Distinguimos dos tipos de números naturales: aquellos que pueden escribirse de la forma  $2k$ , con  $k \in \mathbb{N}$ , reciben el nombre de *pares*, mientras que los de la forma  $2k - 1$  se llaman *impares*.

A partir de esta simple definición podemos deducir una primera propiedad de los números naturales.

**Proposición 1.1.** Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces,  $n$  es par  $\iff n^2$  es par. Equivalentemente,  $n$  es impar  $\iff n^2$  es impar.

#### Demostración

Por un lado, es fácil ver que los números pares tienen cuadrado par, y los impares tienen cuadrado impar:

$$(2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2), \quad (2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 2(2k^2 - 2k + 1) - 1.$$

Para obtener el recíproco basta observar que un número natural no puede ser par e impar a la vez, por lo que la paridad de  $n^2$  determina inequívocamente la de  $n$ . ■

**Nota:** En disciplinas como la lógica, la teoría de conjuntos y la informática es común definir  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ . Ambas convenciones son válidas; lo importante es especificar cuál se está usando. En este curso optamos por no considerar el cero como natural, ya que simplifica la aritmética elemental y evita excepciones innecesarias.

Los números naturales presentan algunas deficiencias. Por ejemplo, no son un conjunto cerrado para operaciones aritméticas elementales como la *resta* o la *división*. Parte de estas se remedian extendiendo el sistema al conjunto de los **números enteros**, formado por los números naturales con signo y el cero:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

**Curiosidad:**  $\mathbb{Z}$  viene del alemán *Zahl*, “número”.

Un sistema más amplio de números se obtiene tomando cocientes de enteros, es decir, números de la forma  $\frac{m}{n}$  con  $m \in \mathbb{Z}$  y  $n \in \mathbb{N}$ . Estos son los denominados **números racionales**, y el conjunto de todos ellos se denota por  $\mathbb{Q}$  (de “quotient”, cociente).

Calculando la expresión decimal de un número racional dividiendo el numerador por el denominador, se obtiene un número entero o un número decimal exacto o periódico:  $0.2, -0.35, 0.\bar{3} = 0.333\dots, 4.998\bar{9} = 4.99898989\dots$

También es cierto el recíproco: cualquier número decimal de este tipo puede escribirse como una fracción de números enteros.

$$2.3\bar{1} = \frac{231 - 23}{90} = \frac{104}{45}$$

En el conjunto  $\mathbb{Q}$  tenemos una operación llamada *suma*, que a cada par  $(a, b)$  de números racionales asocia un único número racional, la suma de  $a$  con  $b$ , indicada por  $a + b$ . Asimismo, disponemos de una segunda operación llamada *producto*, que a cada par  $(a, b)$  asocia un único número racional, el producto de  $a$  con  $b$ , indicado por  $a \cdot b$  o, simplemente,  $ab$ . Estas operaciones tienen las siguientes propiedades:

**Propiedades de la suma.** Para cualesquiera  $a, b, c \in \mathbb{Q}$  se cumplen:

- (P1) Propiedad asociativa:  $a + (b + c) = (a + b) + c$ .
- (P2) Propiedad conmutativa:  $a + b = b + a$ .
- (P3) Existencia de elemento neutro:  $a + 0 = 0 + a = a$ .
- (P4) Existencia de elemento opuesto:  $a + (-a) = (-a) + a = 0$ .

**Propiedades del producto.** Para cualesquiera  $a, b, c \in \mathbb{Q}$  se cumplen:

- (P5) Propiedad asociativa:  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ .
- (P6) Propiedad conmutativa:  $a \cdot b = b \cdot a$ .
- (P7) Existencia de elemento unidad:  $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$  (con  $1 \neq 0$ ).
- (P8) Existencia de elemento inverso: si  $a \neq 0$ , entonces  $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ .
- (P9) Propiedad distributiva respecto de la suma:  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ .

Es fácil comprobar que los elementos neutros de la suma y del producto son únicos. Además, para cada número racional el elemento opuesto es único y, si es distinto de cero, también el inverso. Dado que  $a \cdot 0 = 0$  para todo  $a \in \mathbb{Q}$ , el **0 no tiene inverso multiplicativo** y  $\frac{1}{0}$  no tiene sentido.

Verificar cada una de estas afirmaciones es un buen ejercicio para el lector.

Podemos comprobar fácilmente que  $\mathbb{Q}$  es un conjunto cerrado para la suma y el producto, esto es, el resultado de sumas y productos de números racionales es también un número racional.

**Proposición 1.2.** Si  $a, b \in \mathbb{Q}$ , entonces  $a + b \in \mathbb{Q}$ ,  $a \cdot b \in \mathbb{Q}$ , y si  $b \neq 0$ , entonces  $a/b \in \mathbb{Q}$ .

### Demostración

Escribiendo  $a = \frac{p}{q}$  y  $b = \frac{r}{s}$ , con  $p, r \in \mathbb{Z}$  y  $q, s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , se tiene

$$a + b = \frac{ps + rq}{qs} \in \mathbb{Q}, \quad ab = \frac{pr}{qs} \in \mathbb{Q}.$$

Además, si  $r \neq 0$  ( $q \neq 0$ ),

$$\frac{a}{b} = \frac{p/q}{r/s} = \frac{ps}{qr} \in \mathbb{Q}.$$

En todos los pasos hemos usado que  $\mathbb{Z}$  es cerrado para la suma y el producto. ■

### Lectura en clave algebraica:

- En  $\mathbb{N}$ , la suma no tiene neutro ni opuestos (fallan (P3) y (P4)), y con el producto no hay inversos multiplicativos (falla (P8)); por eso  $(\mathbb{N}, +)$  es un *semigrupo conmutativo*.
- En  $\mathbb{Z}$ , con  $+$  y  $\cdot$ , obtenemos un *anillo conmutativo con unidad* (de hecho, un *dominio de integridad*); no es un cuerpo porque (P8) falla salvo para  $\pm 1$ .
- En  $\mathbb{Q}$ , con  $+$  y  $\cdot$ , sí tenemos un *cuerpo*; más aún, es un *cuerpo ordenado* (lo veremos enseguida), aunque no es *completo*.

Desde la Antigüedad, la escuela pitagórica ya constató esta falta de completitud de  $\mathbb{Q}$ , o existencia de "huecos", al mostrar que la diagonal de un cuadrado de lado 1 tiene longitud  $\sqrt{2}$ , que no es un número racional.

**¡Atención!** Si  $a > 0$ ,  $a$  tiene dos raíces cuadradas:  $\sqrt{a}$  y  $-\sqrt{a}$ , pero  $\sqrt{a}$  denota siempre la raíz positiva. Por ejemplo, 4 tiene dos raíces cuadradas:  $-2$  y  $2$ , pero  $\sqrt{4} = 2$ .

¡Escribir  $\sqrt{4} = \pm 2$  no es correcto!

**Proposición 1.3.**  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .

### Demostración

Supongamos por reducción al absurdo que  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ , y por tanto puede escribirse como una fracción irreducible  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ , con  $p, q \in \mathbb{Z}$ ,  $q \neq 0$  y  $\text{mcd}(p, q) = 1$ .

Entonces  $p^2 = 2q^2$ . Usando la Proposición 1.1 obtenemos que  $p$  también es par, lo que nos permite escribir  $p = 2m$  para algún  $m \in \mathbb{N}$ . Sustituyendo,  $4m^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2m^2$ , así que  $q$  también es par. Por tanto  $p$  y  $q$  son ambos pares, lo cual contradice que  $\text{mcd}(p, q) = 1$ . Por tanto,  $\sqrt{2}$  no es racional. ■

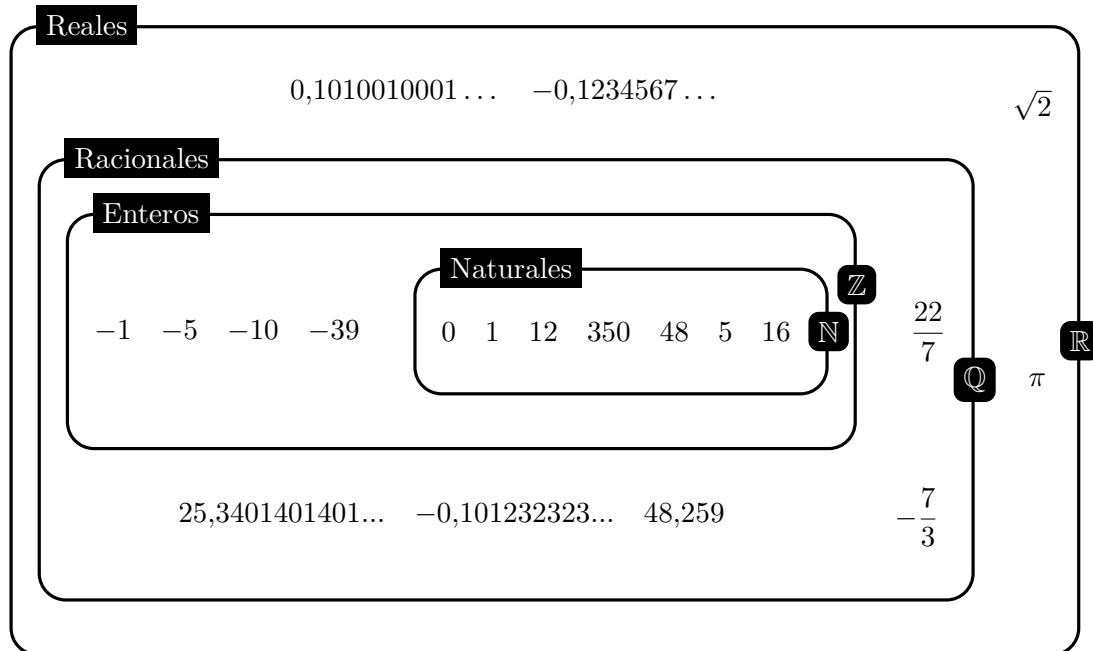
El conjunto de los **números irracionales**,  $\mathbb{I}$ , está compuesto por los números que no son racionales. Dicho de otra forma, son los números que no pueden escribirse como fracciones de números enteros. Su expresión decimal es infinita y no periódica:  $0,246810\dots$ ,  $\pi = 3,1415926\dots$ ,  $e = 2,7182818\dots$ ,  $\sqrt{2} = 1,41421\dots$ .

En general, si  $n \in \mathbb{N}$  no es un cuadrado perfecto, entonces  $\sqrt{n}$  es irracional. Además, si  $a \in \mathbb{Q}$  y  $b \in \mathbb{I}$ , entonces  $a + b$  es irracional y  $ab$  también (si  $a \neq 0$ ). Por tanto, números como  $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ,  $1 - \sqrt{3}$ ,  $-\sqrt{7}$ ,  $2\sqrt{2}$ , ... son irracionales.

Esto nos permite ver al conjunto de los **números reales** como la unión (disjunta) de los números racionales y los irracionales:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$

**Marco algebraico:** El sistema  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  tiene estructura de *cuerpo conmutativo* (verifica las 9 propiedades vistas anteriormente y 3 adicionales que veremos a continuación) y, además, es *completo*.



En la Proposición 1.3 vimos que la ecuación  $x^2 = 2$  no admite soluciones en  $\mathbb{Q}$ ; de forma equivalente, el polinomio  $x^2 - 2$  carece de raíces racionales.

Este ejemplo sugiere distinguir, dentro de  $\mathbb{R}$ , aquellos números que sí pueden aparecer como ceros de polinomios con coeficientes enteros. Definimos el conjunto de los **números algebraicos** por

$$\mathbb{A} = \{ x \in \mathbb{R} : \exists p \in \mathbb{Z}[x] \setminus \{0\} \text{ tal que } p(x) = 0 \}.$$

De forma manifiesta se tiene  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{A} \subset \mathbb{R}$ .

El complemento  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$ , necesariamente contenido en  $\mathbb{I}$ , recibe el nombre de **números trascendentes**. Algunos ejemplos famosos son  $\pi = 3,1415\dots$  y  $e = 2,7182\dots$ , aunque demostrarlo requiere herramientas que veremos en temas sucesivos. Como veremos, el estudio de  $\mathbb{R}$  está íntimamente ligado al concepto de *límite*.

**¡Ojo!** No todos los polinomios admiten raíces reales. Por ejemplo, no existe  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $x^2 + 1 = 0$ . Para resolver esa ecuación hay que salir de  $\mathbb{R}$  y considerar los *números complejos*  $\mathbb{C}$ , que no forman parte del temario de este curso.

Por otra parte, los polinomios con coeficientes enteros de grado impar proporcionan ejemplos sencillos de números algebraicos. Esto es una consecuencia del siguiente resultado:

**Proposición 1.4.** Si  $p(x) \in \mathbb{R}[x]$  tiene *grado impar*, entonces posee al menos una raíz real.

### Idea de la demostración

*Esta demostración no se vio en clase.*

Las raíces no reales de un polinomio con coeficientes reales aparecen en *pares conjugados*. Por tanto, un polinomio de grado impar no puede tener todas sus raíces no reales; queda al menos una real.

Por ejemplo, la ecuación  $x^5 + x + 1 = 0$  tiene al menos una raíz real. ■

## 1.2 Orden de los números reales.

Además de estas propiedades básicas de la suma y el producto, presentaremos ahora las relativas a las *desigualdades*, que nos permiten comparar números reales y que desempeñan un papel fundamental en el cálculo infinitesimal. Con el propósito de simplificar las ideas, nos restringimos en primer lugar a los números racionales.

**Definición 1.5.** En  $\mathbb{Q}$ , definimos el **conjunto de números positivos** como

$$P = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{N} \text{ o bien } -p, -q \in \mathbb{N} \right\}.$$

Para  $a \in \mathbb{Q}$ , escribimos  $a \in P \iff a > 0$ .

Con esta noción, definimos una **relación de orden** en  $\mathbb{Q}$  mediante  $P$ :

$$\begin{aligned} a < b &\iff b - a \in P, \\ a > b &\iff b < a, \\ a \leq b &\iff b - a \in P \cup \{0\} \quad (\text{equivalentemente, } a < b \text{ o } a = b), \\ a \geq b &\iff a > b \text{ o } a = b \quad (\text{equivalentemente, } a - b \in P \cup \{0\}). \end{aligned}$$

### Propiedades de $P$ .

- (P10) Ley de tricotomía: para cada  $a \in \mathbb{Q}$  se verifica exactamente una de las siguientes alternativas:  $a = 0$ ,  $a \in P$  o  $-a \in P$ .
- (P11) Cerradura (o estabilidad) de la suma: si  $a, b \in P$ , entonces  $a + b \in P$ .
- (P12) Cerradura (o estabilidad) del producto: si  $a, b \in P$ , entonces  $a \cdot b \in P$ .

De las propiedades de  $P$  se deducen fácilmente las reglas básicas para operar con desigualdades. Trabajaremos con la relación binaria  $\leq$ , que es una *relación de orden* porque cumple las siguientes propiedades para todo  $a, b, c \in \mathbb{Q}$ :

- *Reflexiva:*  $a \leq a$ .
- *Antisimétrica:* si  $a \leq b$  y  $b \leq a$ , entonces  $a = b$ .
- *Transitiva:* si  $a \leq b$  y  $b \leq c$ , entonces  $a \leq c$ .

### Demostración de la transitividad

Por hipótesis,  $b - a \in P \cup \{0\}$  y  $c - b \in P \cup \{0\}$ . Sumando y restando  $b$ , se tiene  $c - a = (c - b) + (b - a) \in P \cup \{0\}$ , ya que si ambos son positivos la suma es positiva por la propiedad (P11), y si al menos uno de los dos sumandos es cero entonces el resultado se tiene trivialmente.

Verificar las otras dos propiedades se propone como [ejercicio](#) para el lector. ■

Nótese que la relación  $<$  es transitiva pero no reflexiva. Además,  $\leq$  es un *orden total*: dados  $a, b \in \mathbb{Q}$  cualesquiera, siempre ocurre  $a \leq b$  o bien  $b \leq a$ .

Las consecuencias que usaremos con más frecuencia son:

$$\begin{aligned} a \leq b &\implies a + c \leq b + c, \\ a \leq b, \quad 0 \leq c &\implies a \cdot c \leq b \cdot c, \\ a \leq b &\implies -a \geq -b, \\ 0 < a \leq b &\implies \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}. \end{aligned}$$

**Ejercicio 1.6** (Para el lector). Si  $a < b$  y  $b < 0$ , entonces  $a < 0$  y, por tanto,  $ab > 0$ .

### Solución

De  $a < b$  y  $b < 0$  se sigue  $a < b < 0$ , luego  $a < 0$ . Así,  $-a \in P$  y  $-b \in P$ ; por la cerradura del producto en  $P$ ,  $(-a)(-b) \in P$ , es decir,  $ab > 0$ . ■

## 1.3 Valor absoluto.

**Definición 1.7.** Sea  $a \in \mathbb{R}$ . Definimos el valor absoluto de  $a$  mediante la fórmula

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0, \end{cases} \quad \text{o equivalentemente} \quad |a| = \sqrt{a^2}.$$

En particular,  $|a| \in P \cup \{0\}$  y se cumple trivialmente  $a \leq |a|$ .

**Propiedades del valor absoluto.** Sean  $a, b \in \mathbb{R}$ . Se cumplen:

$$(1) \quad |a| \geq 0 \text{ y } |a| = 0 \iff a = 0; \quad \text{además } |-a| = |a| \text{ y } |a|^2 = a^2.$$

$$(2) \quad |a \cdot b| = |a| |b| \text{ y, si } b \neq 0, \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

(3)

$$\text{Para } x \in \mathbb{R} : \quad \begin{cases} |x| \leq a &\iff -a \leq x \leq a, \\ |x| > a &\iff x > a \text{ o } x < -a. \end{cases}$$

**Representación en la recta real** (para  $a > 0$ ):



- (4) **Desigualdad triangular:**  $|a + b| \leq |a| + |b|$ , y la igualdad se da si, y solo si,  $a$  y  $b$  tienen el mismo signo o uno de ellos es cero.

Como paso previo a la demostración de la desigualdad triangular, necesitamos el siguiente resultado:

**Lema 1.8.** Si  $x, y \geq 0$ , entonces  $x^2 \geq y^2 \Rightarrow x \geq y$ .

#### Demostración

$x^2 \geq y^2 \Rightarrow x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow (x + y)(x - y) \geq 0$ . Multiplicamos la anterior desigualdad por  $(x + y)^{-1}$ , que es una cantidad positiva (¿por qué?), para obtener  $x - y \geq 0$ , como queríamos demostrar. ■

#### Demostración de la desigualdad triangular

Como  $|a + b| = \sqrt{(a + b)^2}$ , es más sencillo comparar los cuadrados:

$$|a + b|^2 = (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \leq a^2 + b^2 + 2|a||b| = (|a| + |b|)^2.$$

Usando el Lema 1.8 concluimos  $|a + b| \leq |a| + |b|$ .

Supongamos ahora que se da la igualdad, esto es,  $|a + b| = |a| + |b|$ . Elevando al cuadrado y simplificando, llegamos a que

$$ab = |a||b| \iff ab \geq 0,$$

es decir,  $a$  y  $b$  tienen el mismo signo (o alguno de ellos es 0). El recíproco se puede verificar de forma inmediata. ■

- (5) **Desigualdad triangular inversa:**  $| |a| - |b| | \leq |a - b|$ .

#### Demostración

Por la desigualdad triangular,

$$|a| = |a + b - b| \leq |a - b| + |b| \Rightarrow |a| - |b| \leq |a - b|.$$

Intercambiando  $a$  y  $b$ ,

$$|b| = |b + a - a| \leq |a - b| + |a| \Rightarrow |b| - |a| \leq |a - b|.$$

Es decir,  $-|a - b| \leq |a| - |b| \leq |a - b|$ , lo que equivale a  $||a| - |b|| \leq |a - b|$ . ■

## 1.4 Supremo e ínfimo. Postulado del continuo.

**Definición 1.9.** Sea  $A \subset \mathbb{R}$  un subconjunto no vacío y  $x \in \mathbb{R}$ .

- Diremos que  $x$  es una *cota superior* de  $A$  si  $a \leq x$  para todo  $a \in A$ .
- Diremos que  $x$  es una *cota inferior* de  $A$  si  $a \geq x$  para todo  $a \in A$ .
- Si  $A$  tiene alguna cota inferior (resp. superior), diremos que está *acotado inferiormente* o *minorado* (resp. *acotado superiormente* o *mayorado*). Si se satisfacen ambas, diremos que  $A$  es *acotado*.

**Definición 1.10.** Sea  $A \subset \mathbb{R}$  un subconjunto no vacío y mayorado. Llamamos *supremo* de  $A$  a la menor de sus cotas superiores. Equivalentemente,  $x = \sup A$  si y sólo si:

- (1)  $x$  es cota superior de  $A$ ;
- (2) para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $a \in A$  tal que  $x - \varepsilon \leq a \leq x$  (*cualquier cantidad por debajo de  $x$  deja de ser cota superior*).

Si además  $\sup A \in A$ , entonces  $\sup A = \max A$  y se llama *máximo* de  $A$ .

De forma análoga, definimos:

**Definición 1.11.** Sea  $A \subset \mathbb{R}$  un subconjunto no vacío y minorado. Llamamos *ínfimo* de  $A \subset \mathbb{R}$  a la mayor de sus cotas inferiores. Equivalentemente,  $x = \inf A$  si y sólo si:

- (1)  $x$  es cota *inferior* de  $A$ ;
- (2) para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $a \in A$  tal que  $x \leq a \leq x + \varepsilon$ .

Si además  $x \in A$ , recibe el nombre de *mínimo* de  $A$ , y se denota por  $\min A$ .

Cuando encontramos un mayorante o menorante dentro de un conjunto, la condición (2) de supremo e ínfimo se verifica trivialmente con  $a$  igual a dicha cota. Esto nos proporciona el siguiente atajo para encontrar, si los hay, el máximo y el mínimo de un conjunto  $A$ .

**Proposición 1.12.** Sea  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $A \neq \emptyset$ . Si  $x \in A$  es una cota superior (resp. cota inferior) de  $A$ , entonces  $x = \max A$  (resp.  $x = \min A$ ).

### Postulado de continuidad o Axioma del continuo o de Dedekind

- (P13) Si  $A$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}$  no vacío y mayorado (resp. minorado), entonces existe  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $x = \sup A$  (resp.  $x = \inf A$ ). Dicho de otro modo, el conjunto de los mayorantes de  $A$  (resp. minorantes) tiene mínimo (resp. máximo).

Podemos convencernos de forma sencilla que  $\mathbb{Q}$  no satisface la propiedad (P13). Consideramos el conjunto  $A$  formado por las aproximaciones decimales sucesivas de  $\sqrt{2}$ :

$$A = \{1, 1.4, 1.41, 1.414, \dots\}.$$

Se cumple  $A \subset \mathbb{Q}$  y  $a \leq 2$  para todo  $a \in A$ , es decir,  $A$  está mayorado en  $\mathbb{Q}$ . Sin embargo, podemos ver que no admite supremo racional.

#### Demostración

Supongamos que existe  $q \in \mathbb{Q}$  tal que  $\sup A = q$ . Por construcción,  $a \leq \sqrt{2}$  para todo  $a \in A$ , por lo tanto  $q < \sqrt{2}$  por definición de supremo (la igualdad no puede darse ya

que  $\sqrt{2} \in \mathbb{I}$  y  $q \in \mathbb{Q}$ ). Entonces, existe una primera posición decimal  $k \in \mathbb{N}$  de forma que  $q$  es menor que la truncatura de  $\sqrt{2}$  hasta el  $k$ -ésimo decimal, esto es,

$$q < \frac{\lfloor 10^k \cdot \sqrt{2} \rfloor}{10^k} = 1.\underbrace{414213\dots 7}_{k \text{ decimales}} \in A \quad (\lfloor x \rfloor \equiv \text{parte entera de } x).$$

lo que contradice que  $q$  sea el supremo de  $A$ . ■

**Proposición 1.13.** (Propiedad arquimediana)  $\mathbb{N}$  no está mayorado en  $\mathbb{R}$ . Equivalentemente, dado  $x \in \mathbb{R}$  puede encontrarse  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $n > x$ .

### Demostración

Supongamos que  $\sup \mathbb{N} = z \in \mathbb{R}$ . Entonces,  $z - 1$  no es un mayorante de  $\mathbb{N}$ , lo que nos da un  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $z - 1 \leq m < z$ . Como entre  $z - 1$  y  $z$  puede haber a lo sumo un número natural, deducimos que  $n \leq m$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , por lo que  $m$  sería un máximo de  $\mathbb{N}$ , lo cual es imposible, ya que  $m < m + 1 \in \mathbb{N}$ . ■

### Ejemplo

**Problema.** Sea  $A = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N} \right\}$ . Veamos que  $A$  es acotado y calculemos  $\sup A$  e  $\inf A$ .

**Resolución.** Por un lado,  $0 < \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$ , por lo que  $A$  está minorado e  $\inf A \geq 0$ . Por otro lado, como se tiene  $n \geq 1$  y  $m \geq 1$ , entonces

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq 2,$$

por lo que  $A$  está mayorado y  $\sup A \leq 2$ . Dado que  $2 \in A$  (para  $n = m = 1$ ), entonces 2 es el máximo de  $A$  por la Proposición 1.12.

Veamos ahora que  $\inf A = 0$ . Sea  $\varepsilon > 0$ . Debemos encontrar  $a \in A$  tal que

$$0 \leq a = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \varepsilon.$$

Por la propiedad arquimediana de  $\mathbb{N}$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $n > \frac{2}{\varepsilon}$ , lo que nos da  $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ . Entonces, tomando  $a = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$  se verifica que

$$0 < a < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

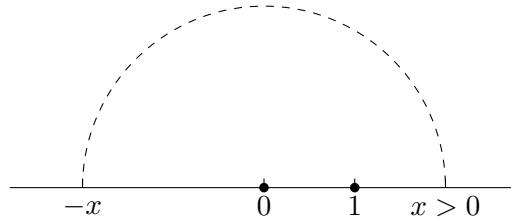
Así,  $\inf A = 0$ .

Hemos visto que un conjunto de racionales acotado superiormente (resp. inferiormente) no tiene por qué tener  $\sup$  (resp.  $\inf$ ) *racional*. En  $\mathbb{R}$ , en cambio, esto siempre ocurre. Esta diferencia caracteriza a los reales y se resume diciendo que  $\mathbb{R}$  es *completo*.

**Definición 1.14.** Por extensión de estas propiedades intuitivas de  $\mathbb{Q}$ , podemos definir  $\mathbb{R}$  como un conjunto numérico provisto de operaciones internas  $+$  y  $\cdot$  que satisfacen (P1–P9), junto con un subconjunto  $\mathbb{R}_+$  (que juega el papel de  $P$ ) que verifica (P10–P12), y que, además, cumple el postulado de continuidad (P13).

Claramente,  $\mathbb{R}$  así definido no es vacío, pues  $0, 1 \in \mathbb{R}$  y a partir de estos y las operaciones elementales comentadas anteriormente pueden construirse infinitos elementos ( $\mathbb{Q}$ ).

El axioma del continuo nos permite identificar los números reales  $\mathbb{R}$  con los puntos de una recta. Para visualizar esto, dibujamos una recta horizontal y fijamos el  $0$  en un punto que llamaremos *origen*. Asociamos el  $1$  con otro punto a su derecha y tomamos el segmento de extremos  $0$  y  $1$  como unidad de longitud. Así, todo  $x > 0$  se sitúa a la derecha del origen a distancia  $x$ , mientras que su opuesto  $-x$  es el punto simétrico respecto del origen.



Adoptando este punto de vista, se tiene que el valor absoluto mide la distancia entre dos puntos:

$$d(a, b) = |a - b| = |b - a| \geq 0.$$

Esta noción conduce de forma natural al concepto de *intervalo*: subconjuntos de  $\mathbb{R}$  que, en la representación geométrica de la recta real, se identifican con segmentos o semirrectas, con extremos abiertos o cerrados según el caso.

**Definición 1.15.** Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$ . Se definen

$$\begin{aligned} (a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} && \text{(intervalo abierto)}, \\ [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} && \text{(intervalo cerrado)}, \\ (a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} && \text{(semiabierto o semicerrado)}, \\ [a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} && \text{(semiabierto o semicerrado)}. \\ (-\infty, a) &= \{x \in \mathbb{R} : x < a\} && \text{(semirrecta abierta)}, \\ (-\infty, a] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\} && \text{(semirrecta cerrada)}, \\ (a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x > a\} && \text{(semirrecta abierta)}, \\ [a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} && \text{(semirrecta cerrada)}, \end{aligned}$$

La demostración de la siguiente propiedad, que relaciona la noción de distancia introducida anteriormente con los intervalos recién definidos, se deja como ejercicio para el lector:

**Proposición 1.16.** Sean  $x, a \in \mathbb{R}$  y  $r > 0$ . Se tiene

$$|x - a| < r \iff x \in (a - r, a + r), \quad |x - a| \leq r \iff x \in [a - r, a + r].$$

**Convención de notación:** Cuando pueda haber ambigüedad con los paréntesis (por ejemplo, si  $(x, y)$  denota pares ordenados en el plano), escribiremos los intervalos abiertos con *corchetes hacia fuera*:

$]a, b[$  en lugar de  $(a, b)$ ,

y, de forma análoga, los semiabiertos como  $[a, b[$  y  $]a, b]$ . Ambas notaciones son equivalentes; sólo adoptaremos  $] \cdot, \cdot [$  para evitar confusiones.

## 1.5 Densidad de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ en $\mathbb{R}$ .

El objetivo de esta sección es demostrar la siguiente idea intuitiva: por pequeño que se tome un intervalo  $(a, b) \subset \mathbb{R}$ , siempre aparecen infinitos números racionales e infinitos irracionales. Claramente, los enteros  $\mathbb{Z}$  no verifican esta propiedad  $\mathbb{R}$ : por ejemplo,  $(0, 1) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$ .

Dividiremos la demostración de esto en varios pasos sencillos.

**Proposición 1.17.** Dados  $a, b \in \mathbb{Q}$  con  $a < b$ , existen infinitos  $q \in \mathbb{Q}$  tales que  $a < q < b$ .

### Demostración

Basta tomar el promedio  $q = \frac{a+b}{2}$ . Puesto que  $a < b$ , se cumple

$$a = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} < \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = q < \frac{b}{2} + \frac{b}{2} = b.$$

Repetiendo el procedimiento con  $a$  y  $q$  o  $b$  y  $q$  se obtienen infinitos racionales distintos entre  $a$  y  $b$ . ■

### Ejemplo

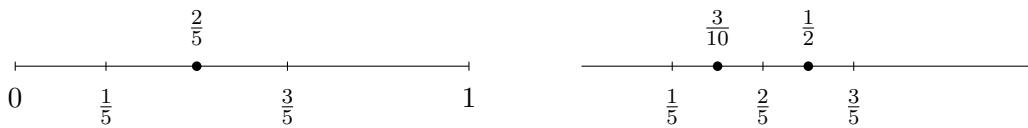
**Problema.** Encontrar un número racional entre  $\frac{1}{5}$  y  $\frac{3}{5}$ .

**Resolución.** El promedio sirve:

$$\frac{1}{5} < \frac{1}{2} \left( \frac{1}{5} + \frac{3}{5} \right) = \frac{2}{5} < \frac{3}{5}.$$

Además, podemos encontrar más puntos tomando promedios sucesivos:

$$\frac{1}{5} < \frac{1}{2} \left( \frac{1}{5} + \frac{2}{5} \right) = \frac{3}{10}, \quad \frac{2}{5} < \frac{1}{2} \left( \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \right) = \frac{1}{2} < \frac{3}{5}.$$



A continuación, demostramos que entre dos racionales cualesquiera también hay infinitos irracionales. La idea de la demostración es sumar un irracional muy pequeño al punto intermedio.

**Lema 1.18.** Sean  $n \in \mathbb{N}$ ,  $q \in \mathbb{Q}$  con  $q \neq 0$  y  $r \in \mathbb{I}$ . Entonces:

- (1) Si  $n$  no es un cuadrado perfecto, entonces  $\sqrt{n}$  es irracional. En particular, para todo número primo  $p$ ,  $\sqrt{p} \in \mathbb{I}$ .
- (2)  $q \cdot r \in \mathbb{I}$ .
- (3)  $q + r \in \mathbb{I}$ .

### Demostración

El ítem (1) se demuestra de manera análoga a la Proposición 1.3, y la omitimos para mayor brevedad. Demostramos por tanto los puntos (2) y (3).

En primer lugar, si  $qr$  fuera racional, entonces por la Proposición 1.2 también lo sería  $r = \frac{qr}{q}$ . De igual forma, si  $q + r$  fuera racional, entonces  $r = (q + r) - q$  sería racional. Ambas conclusiones contradicen la hipótesis  $r \in \mathbb{I}$ . ■

**Proposición 1.19.** Dados  $a, b \in \mathbb{Q}$  con  $a < b$ , existen infinitos  $s \in \mathbb{I}$  tales que  $a < s < b$ .

### Demostración

Sea  $m = \frac{a+b}{2}$  y tomemos un número primo  $p$ . Observamos que

$$0 < \frac{1}{\sqrt{p}} = \frac{\sqrt{p}}{p} < 1,$$

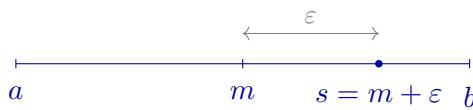
Ahora, definimos

$$\varepsilon = (b - m) \frac{\sqrt{p}}{p}.$$

Por el Lema 1.18, se tiene  $\varepsilon \in \mathbb{I}$ . Además,  $0 < \varepsilon < b - m$ . Finalmente, definimos  $s = m + \varepsilon$ , y comprobamos que es el número que buscamos:

$$a < m < s = m + \varepsilon < m + (b - m) = b.$$

Además,  $s \in \mathbb{I}$  por el Lema 1.18. Repitiendo el procedimiento con distintos primos  $p$  se obtienen infinitos irracionales en  $(a, b)$ .



**Nota:** Demostrar que el conjunto de los números primos es infinito puede hacerse mediante una sencilla reducción al absurdo, usando el algoritmo de la división Euclídea.

En el tercer paso, demostramos que entre dos irracionales cualesquiera siempre podemos encontrar un racional.

**Proposición 1.20.** Si  $r, s \in \mathbb{I}$  con  $r < s$ , entonces existen infinitos racionales  $q \in \mathbb{Q}$  tales que

$r < q < s$ .

### Demostración

El conjunto de los números naturales no está mayorado en  $\mathbb{R}$ , por lo que es posible encontrar un natural  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $n(s - r) > 1$ . Entonces  $ns > nr + 1$ , lo que implica que el intervalo  $(nr, ns)$  tiene longitud estrictamente mayor que uno. Esto nos garantiza la existencia de un entero  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $rn < k < sn$ .

Para concluir, basta tomar  $q = \frac{k}{n} \in \mathbb{Q}$ . Los infinitos valores posibles se obtienen al tomar otros naturales  $m \geq n$  (obteniendo por tanto distintos  $k$ ). ■

### Ejemplo

**Problema.** Hallar un número racional entre  $\sqrt{5}$  y  $\sqrt{6}$ .

**Resolución.** Buscamos  $n \in \mathbb{N}$  y  $k \in \mathbb{Z}$  tales que

$$\sqrt{5} < \frac{k}{n} < \sqrt{6}.$$

La desigualdad anterior equivale a  $5n^2 < k^2 < 6n^2$ . Tomando  $n = 5$  se tiene

$$5n^2 = 125 \quad \text{y} \quad 6n^2 = 150,$$

y como  $144 = 12^2$  verifica  $125 < 144 < 150$ , obtenemos

$$\sqrt{5} = \frac{\sqrt{125}}{5} < \frac{12}{5} < \frac{\sqrt{150}}{5} = \sqrt{6}.$$

Así,  $\boxed{q = \frac{12}{5}}$  es un racional entre  $\sqrt{5}$  y  $\sqrt{6}$ .

Alternativamente, podemos proceder como sigue: tomamos  $n = 3$  y escribimos

$$\sqrt{5} = \frac{\sqrt{45}}{3}, \quad \sqrt{6} = \frac{\sqrt{54}}{3}.$$

Buscamos ahora un cuadrado perfecto entre 45 y 54; vale 49, luego

$$\sqrt{5} < \frac{\sqrt{49}}{3} = \frac{7}{3} < \sqrt{6}.$$

Así,  $\boxed{\frac{7}{3}}$  es un racional entre  $\sqrt{5}$  y  $\sqrt{6}$ .

Ya tenemos todos los ingredientes necesarios para demostrar el principal resultado de esta sección, que es la densidad de  $\mathbb{Q}$  e  $\mathbb{I}$  en  $\mathbb{R}$ .

**Teorema 1.21.** Dados  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$ , existen *infinitos* números *racionales* e *irracionales* en el intervalo  $(a, b)$ .

**Demostración**

Si  $a$  y  $b$  son ambos racionales, podemos aplicar los Lemas 1.17 y 1.18. Si  $a \in \mathbb{Q}$  y  $b \in \mathbb{I}$ , entonces el punto medio  $m = \frac{a+b}{2} \in \mathbb{I}$ , por lo que tomando el nuevo intervalo  $(m, b)$  (o  $(a, m)$ , según corresponda), podemos reducirnos al caso de dos extremos irracionales.

En este escenario, la existencia de infinitos racionales viene dada por el Lema 1.20. Luego, podemos encontrar infinitos irracionales aplicando el Lema (1.18) a los racionales recién encontrados. ■

**Nota:** Como consecuencia particular de esta propiedad, existen infinitos números reales entre dos números reales distintos cualesquiera. Por tanto, ningún real tiene *sucesor inmediato*, como sí ocurre en los enteros.

## 1.6 Principio de inducción.

Llamaremos *demostración* a un encadenamiento de afirmaciones cuya validez es fácil de comprobar en cada paso, que parte de una situación inicial (la *hipótesis*) y concluye en el resultado que queremos (*la tesis*). En este tema hemos visto dos tipos principales de demostraciones:

- **Directa:** se deduce la tesis a partir de las hipótesis con reglas ya conocidas.
- **Por reducción al absurdo:** se supone falsa la tesis y se llega a una contradicción. Por ejemplo, la Proposición 1.3, en la que probábamos que  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .

Introducimos ahora un nuevo tipo de argumento que nos permite demostrar la validez de propiedades o fórmulas que dependen de un número natural  $n \in \mathbb{N}$ .

Sea  $P(n)$  una afirmación que depende de  $n \in \mathbb{N}$ . Una demostración por inducción consiste en dos pasos principales:

- (1) **Caso base:**  $P(n_0)$  es verdadera (típicamente  $n_0 = 1$ ).
- (2) **Paso inductivo:** si  $P(n)$  es verdadera (esto se llama *hipótesis de inducción*), entonces también lo es  $P(n + 1)$ .

Con estas dos comprobaciones,  $P(n)$  resulta verdadera para todo  $n \geq n_0$ .

**Nota:** Intuitivamente, podemos compararlo con subir una escalera: si el primer escalón se puede pisar, y sabemos pasar de cada escalón al siguiente, entonces podemos subir la escalera indefinidamente.

**Principio de inducción:** Sea  $P(n)$  una proposición para  $n \in \mathbb{N}$  y sea  $n_0 \in \mathbb{N}$ . Si  $P(n_0)$  es verdadera y, dado un  $n \geq n_0$  (fijo pero arbitrario), de  $P(n)$  se sigue  $P(n + 1)$ , entonces  $P(n)$  es verdadera para todo  $n \geq n_0$ .

**Ejemplo**

**Problema.** Demostrar que para todo  $n \in \mathbb{N}$  se cumple

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

**Resolución.** Planteamos una demostración por inducción.

Comprobamos la veracidad de la **etapa base**; en este caso,  $n = 1$ :

$$1 = \frac{1(1 + 1)}{2} = 1.$$

Para verificar el **paso inductivo**, supongamos que la igualdad es cierta para algún  $n \in \mathbb{N}$ , y buscamos demostrar que se verifica también para  $n + 1$ :

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n + 1)}{2} \quad (\text{hipótesis de inducción}).$$

Entonces

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + n + (n + 1) &= \frac{n(n + 1)}{2} + (n + 1) \\ &= \frac{n(n + 1) + 2(n + 1)}{2} = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}, \end{aligned}$$

que es precisamente la fórmula para  $n + 1$ .

**Nota:** La fórmula anterior también puede demostrarse de forma directa. Llamamos  $S_n = 1 + 2 + \cdots + n$ . Escribiendo también  $S_n$  al revés y sumando término a término, tenemos:

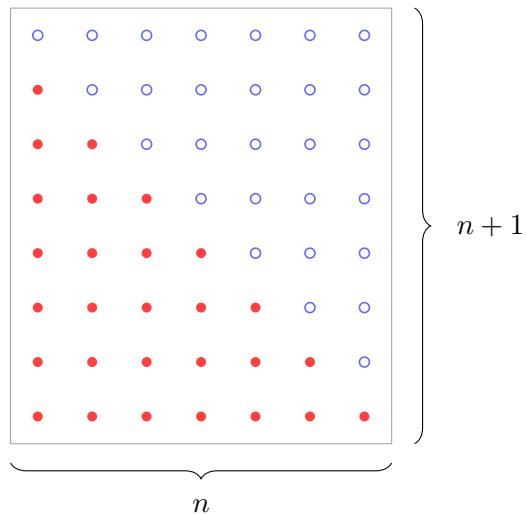
$$\begin{cases} S = 1 + 2 + \cdots + (n - 1) + n, \\ S = n + (n - 1) + \cdots + 2 + 1, \end{cases} \implies 2S = \underbrace{(n + 1) + \cdots + (n + 1)}_{n \text{ veces}} = n(n + 1),$$

de modo que  $S = \frac{n(n + 1)}{2}$ .

También puede hacerse una demostración basada en un dibujo, pero hay que tener cuidado con estas: **¡no podemos sacar conclusiones sobre lo que el dibujo nos parece!**

Podemos comprobar que el número  $1 + 2 + \cdots + n$  aparece como la cantidad de puntos de un triángulo escalonado con filas de longitudes  $1, 2, \dots, n$ .

Dos copias de ese triángulo forman un rectángulo con  $n \cdot (n + 1)$  puntos, luego la mitad vale exactamente  $\frac{n(n + 1)}{2}$ .



**Variantes del principio de inducción** A veces, tendremos un caso base para  $n_0 \neq 1$ , es decir, debemos demostrar  $P(n)$  sólo para  $n \geq n_0$ , donde  $n_0$  es un natural dado (no necesariamente 1). En esta situación, comprobamos:

- $P(n_0)$  es verdadera (caso base).
  - Si  $P(n)$  se verifica para algún  $n \geq n_0$ , entonces  $P(n + 1)$  también (paso inductivo).

## Ejemplo

**Problema.** Probar que, para todo natural  $n \geq 10$ , se cumple  $2^n \geq n^3$ .

**Resolución.** Empezamos comprobando el caso base, correspondiente a  $n = 10$ :

$$2^{10} = 1024 \geq 1000 = 10^3.$$

**Paso inductivo.** Supongamos cierta la desigualdad para algún  $n \geq 10$ :  $2^n \geq n^3$ . Entonces

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2n^3.$$

Por otra parte, sacando factor común  $n^3$  y usando que  $n \geq 10$ ,

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \leq n^3 \left(1 + \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{1}{1000}\right) = \frac{331}{1000} n^3 \leq 2n^3.$$

Luego  $2^{n+1} \geq 2n^3 \geq (n+1)^3$ , y queda probado el paso inductivo.

A veces, el paso inductivo requiere conocer simultáneamente  $P(n - 1)$  y  $P(n)$ . En ese caso, verificamos:

- $P(n_0)$  y  $P(n_0 + 1)$  son verdaderas (dos casos base).
  - Para  $n \geq n_0 + 1$ , si  $P(n - 1)$  y  $P(n)$  son verdaderas, entonces  $P(n + 1)$  es verdadera.

**Ejercicio 1.22.** Demostrar por inducción que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

El siguiente ejemplo muestra otra variación del mismo tipo de razonamiento, en el que damos saltos de cuatro en cuatro números naturales.

**Ejemplo**

**Problema.** Probar que, si  $n \in \mathbb{N}$  no es múltiplo de 4, entonces  $S_n = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n$  es un múltiplo de 10.

**Resolución.** En la etapa base, comprobaremos que la afirmación es cierta para  $n = 1, 2, 3$ . En efecto,  $S_1 = 10$ ,  $S_2 = 30$  y  $S_3 = 100$ .

A continuación, veamos que, si la afirmación es cierta para un  $n \in \mathbb{N}$ , entonces también lo es para  $n + 4$ . Partimos de una sencilla identidad:

$$a^{n+4} - a^n = a^n(a^2 + 1)(a^2 - 1) \quad \forall a > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Entonces, podemos escribir

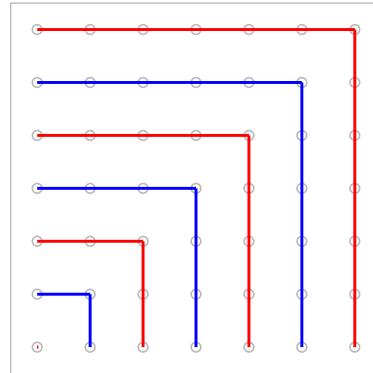
$$\begin{aligned} S_{n+4} - S_n &= 1^{n+4} - 1^n + 2^{n+4} - 2^n + 3^{n+4} - 3^n + 4^{n+4} - 4^n \\ &= 15 \cdot 2^n + 80 \cdot 3^n + 255 \cdot 4^n = 10 \underbrace{(3 \cdot 2^{n-1} + 8 \cdot 3^n + 102 \cdot 4^{n-1})}_{k_1 \in \mathbb{N}}. \end{aligned}$$

Por hipótesis de inducción,  $S_n = 10k_0$  con  $k_0 \in \mathbb{N}$ , lo que nos da

$$S_{n+4} = S_n + 10k_1 = 10(k_0 + k_1),$$

como se pretendía demostrar.

**Demostración gráfica:** Partimos de un cuadrado  $n \times n$  de puntos. Para cada  $k = 1, 2, \dots, n$ , la capa que convierte el cuadrado  $(k-1) \times (k-1)$  en el cuadrado  $k \times k$  tiene exactamente  $2k-1$  puntos: la fila superior de longitud  $k$  y la columna derecha de longitud  $k-1$ . Sumando todas las capas se obtiene  $n^2$ .

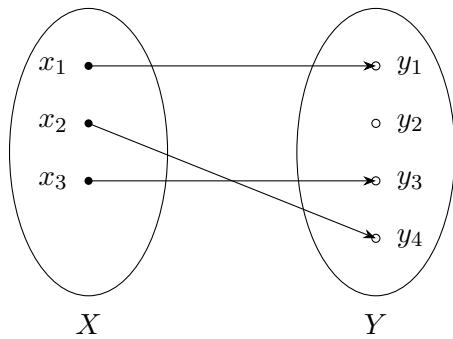
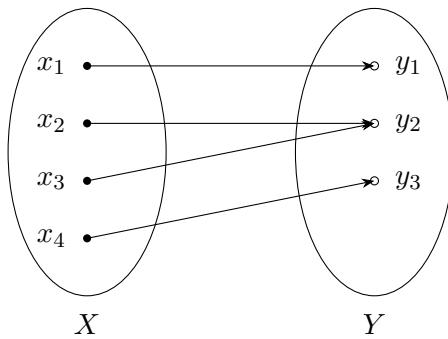


## 1.7 Numerabilidad

Finalmente, presentamos herramientas que nos permiten comparar de forma rigurosa la cantidad de elementos que hay en algunos de los conjuntos numéricos que hemos introducido.

**Definición 1.23.** Sean  $X, Y$  conjuntos. Una *aplicación* (o función) es una relación  $f \subset X \times Y$  tal que, para cada  $x \in X$ , existe un único  $y \in Y$  con  $f(x) = y$ .

- Decimos que  $f$  es **inyectiva** (uno-a-uno) si  $f(x_1) = f(x_2)$  implica que  $x_1 = x_2$ . Equivalentemente, cada  $y \in Y$  tiene *a lo sumo* una preimagen.
- Decimos que  $f$  es **sobreyectiva** si para todo  $y \in Y$  existe  $x \in X$  tal que  $f(x) = y$ . Dicho de otra forma, cada  $y$  tiene *al menos* una preimagen.
- $f$  se dice **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

Aplicación inyectiva pero **no** sobreyectivaAplicación sobreyectiva pero **no** inyectiva

**Definición 1.24.** Llamamos *cardinal* de un conjunto  $X$  al número de elementos de  $X$  y lo denotamos por  $\#X$  o  $\text{card}(X)$ .

Para conjuntos finitos, una aplicación inyectiva  $X \rightarrow Y$  implica  $\text{card}(X) \leq \text{card}(Y)$ , y una biyectiva  $X \leftrightarrow Y$  implica  $\text{card}(X) = \text{card}(Y)$ . Podemos usar este hecho para definir la noción de *tener la misma cantidad de elementos* para dos conjuntos cualesquiera.

**Definición 1.25.** Decimos que dos conjuntos  $X$  e  $Y$  son *equinumerosos* si existe una biyección entre ellos.

**Proposición 1.26.** Si  $X \subset Y$ , entonces  $\#X \leq \#Y$ .

### Demostración

De forma clara, la aplicación *inclusión*

$$\begin{aligned} I : X &\rightarrow Y \\ I(x) &= x \end{aligned}$$

es inyectiva, lo que nos da directamente el resultado. ■

**Definición 1.27.** Un conjunto  $X$  es *numerable* si existe una aplicación inyectiva  $X \rightarrow \mathbb{N}$ . En particular, todo conjunto finito es numerable. El cardinal de cualquier conjunto infinito y numerable se denota por  $\aleph_0$  (el menor cardinal infinito).

**Proposición 1.28.**  $\mathbb{N} \cup \{0\}$  es numerable y  $\#(\mathbb{N} \cup \{0\}) = \aleph_0$ .

### Demostración

Dado que  $\mathbb{N} \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$ , entonces  $\#(\mathbb{N} \cup \{0\}) \geq \aleph_0$ . Por otro lado, es inmediato comprobar que la aplicación  $n \mapsto n + 1$  de  $\mathbb{N} \cup \{0\}$  en  $\mathbb{N}$  es inyectiva, lo que nos da la otra desigualdad. ■

**Proposición 1.29.**  $\mathbb{Z}$  es numerable. De hecho,  $\#\mathbb{Z} = \aleph_0$ .

### Demostración

Dado que  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ , tenemos  $\#\mathbb{Z} \geq \#\mathbb{N} = \aleph_0$  por la proposición anterior. Veamos ahora la otra desigualdad, que se sigue de la existencia de una aplicación inyectiva  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ .

Consideramos  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$  dada por  $f(k) = -2k$  si  $k \leq 0$  y  $f(k) = 2k - 1$  si  $k \geq 1$ . Así:

$$0 \mapsto 0, \quad 1 \mapsto 1, \quad -1 \mapsto 2, \quad 2 \mapsto 3, \quad -2 \mapsto 4, \quad 3 \mapsto 5, \quad \dots$$

Supongamos que, para  $n, m \in \mathbb{Z}$  se tiene  $f(n) = f(m)$ . Dado que  $f(k) = 0 \Leftrightarrow k = 0$ , entonces necesariamente  $n$  y  $m$  son ambos positivos o ambos negativos. Vemos que:

- (1) Si  $n, m \leq -1$ , entonces  $f(n) = f(m) \Leftrightarrow -2n = -2m \Leftrightarrow n = m$ .
- (2) Si  $n, m \geq 1$ , entonces  $f(n) = f(m) \Leftrightarrow 2n - 1 = 2m - 1 \Leftrightarrow n = m$ .

Consecuentemente,  $f$  es inyectiva y  $\#\mathbb{Z} \leq \aleph_0$ . ■

**Proposición 1.30.**  $\mathbb{Q}$  es numerable. De hecho,  $\#\mathbb{Q} = \aleph_0$ .

### Idea de la demostración

Usando el *método de Cantor*, nos convencemos de que existe una aplicación inyectiva entre  $\mathbb{N}$  y los números racionales positivos. Consideramos la cuadrícula de racionales positivos:

$$\frac{p}{q} \quad (p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}),$$

y recorrámosla por *diagonales* según  $p + q = 1, 2, 3, \dots$ , omitiendo las fracciones no reducidas (es decir, sólo aceptamos  $p/q$  con  $\text{mcd}(p, q) = 1$ ).

$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$

El procedimiento enumera cada racional una única vez, de modo que obtenemos una biyección. Luego, repetimos este procedimiento con los enteros negativos y los racionales negativos, y relacionamos el 0 consigo mismo.

Concluimos que  $\#\mathbb{Q} = \#\mathbb{Z} = \aleph_0$ . ■

Es posible demostrar, aunque no lo haremos en este curso, que si un conjunto  $X$  es infinito y numerable, entonces la existencia de una aplicación inyectiva  $X \rightarrow \mathbb{N}$  es suficiente para garantizar la existencia de una biyección  $X \leftrightarrow \mathbb{N}$ .

**Proposición 1.31.** Todo conjunto numerable es finito o equinumeroso a  $\mathbb{N}$ .

Nos centramos ahora en probar la existencia de conjuntos no numerables. El ejemplo más importante es  $\mathbb{R}$ , pero tenemos multitud de ellos: ningún intervalo abierto de  $\mathbb{R}$  lo es.

**Proposición 1.32.**  $\#(0, 1) = \#(-1, 1) = \#\mathbb{R}$ .

### Demostración

*Esta demostración no se vio en clase.*

Por un lado, es fácil comprobar que  $f : (0, 1) \rightarrow (-1, 1)$  dada por  $f(x) = 2x - 1$  es una biyección entre  $(0, 1)$  y  $(-1, 1)$ , cuya inversa es  $f^{-1}(y) = \frac{y+1}{2}$ . Esto nos da la primera igualdad.

Por otro lado, consideramos

$$\varphi : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{x}{1 - |x|}.$$

Es fácil comprobar que  $\varphi$  es biyectiva y que su inversa es

$$\varphi^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1), \quad \varphi^{-1}(y) = \frac{y}{1 + |y|}.$$

Por tanto,  $\#(-1, 1) = \#\mathbb{R}$ . ■

**Proposición 1.33.**  $\mathbb{R}$  no es numerable.

### Demostración

*Esta demostración no se vio en clase.*

La Proposición 1.32 nos dice que la cardinalidad de  $\mathbb{R}$  es igual a la del intervalo  $(0, 1)$ , así que basta comprobar que este no es numerable. Supongamos, por absurdo, que  $(0, 1)$  es numerable y enumeramos sus elementos mediante su única expansión decimal sin 9 periódicos:

$$x_1 = 0.a_{11}a_{12}a_{13}\dots,$$

$$x_2 = 0.a_{21}a_{22}a_{23}\dots,$$

$$x_3 = 0.a_{31}a_{32}a_{33}\dots,$$

⋮

con  $a_{ij} \in \{0, 1, \dots, 9\}$ . Definimos un número real tomando la diagonal de las expresiones decimales anteriores y sumándole uno:

$$x = 0.b_1b_2b_3\dots, \quad \text{con } b_i = \begin{cases} a_{ii} + 1 & \text{si } a_{ii} < 9, \\ 0 & \text{si } a_{ii} = 9. \end{cases}$$

Claramente  $x \in (0, 1)$ , por lo que  $x = x_k$  para algún  $k \in \mathbb{N}$ . Pero, por construcción, el  $k$ -ésimo decimal de  $x$  y el de  $x_k$  son diferentes, lo cual contradice la hipótesis de que  $(0, 1)$  es numerable. ■

Otro ejemplo de conjunto no numerable será el conjunto de todos los subconjuntos de  $\mathbb{N}$ , al que llamamos *partes de  $\mathbb{N}$* . Esto es consecuencia de la Proposición 1.31, junto a la siguiente observación:

**Proposición 1.34.** Si  $\mathcal{P}(A)$  denota el conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto  $A$ , entonces ninguna aplicación  $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$  puede ser sobreyectiva.

### Demostración

*Esta demostración no se vio en clase.*

Sea  $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$  una aplicación. Para cada  $a \in A$  podemos preguntarnos si  $a$  pertenece o no al conjunto  $f(a)$ . Con esa idea construimos el conjunto

$$B = \{a \in A : a \notin f(a)\}.$$

Veamos que  $B$  no puede ser imagen de ningún elemento de  $A$ , es decir,  $f(a) \neq B$  para todo  $a \in A$ . Razonamos como sigue:

- Si  $a \in B$ , entonces por definición  $a \notin f(a)$ , así que  $f(a) \neq B$ .
- Si  $a \notin B$ , entonces por definición  $a \in f(a)$ , y de nuevo  $f(a) \neq B$ .

En ambos casos obtenemos que  $f(a) \neq B$  para todo  $a \in A$ . Por tanto, el conjunto  $B$  no está en la imagen de  $f$ . ■

Enunciamos sin demostrar el siguiente resultado, pues requiere de herramientas que escapan a los contenidos de este tema.

**Proposición 1.35.**  $\#\mathbb{R} = \#\mathcal{P}(\mathbb{N}) = 2^{\aleph_0}$ . Este cardinal se conoce como *cardinal del continuo*.

La **Hipótesis del Continuo** (HC), formulada por Georg Cantor, afirma que no existe ningún conjunto cuya cardinalidad sea estrictamente mayor que la de  $\mathbb{N}$  pero estrictamente menor que la de  $\mathbb{R}$ . Es decir, la HC dice que

$$\text{card}(\mathbb{R}) = \aleph_1,$$

donde  $\aleph_1$  es el siguiente cardinal inmediatamente posterior a  $\aleph_0 = \text{card}(\mathbb{N})$ .

Un resultado fundamental de la teoría de conjuntos es que la HC es **indecidible**: ni puede probarse ni refutarse a partir de los axiomas usuales de la teoría de conjuntos (los axiomas de Zermelo–Fraenkel con el Axioma de Elección, ZFC). Esto significa que existen dos teorías matemáticas igualmente coherentes: ZFC + HC y ZFC +  $\neg$ HC. Por tanto, según se adopte una u otra convención, se obtiene una visión distinta de la jerarquía de los conjuntos infinitos. En cualquier caso, estos resultados muestran los límites de lo que puede alcanzarse mediante la deducción axiomática.

## Anexos del capítulo

### 1.A Resolución de inecuaciones con valor absoluto

#### Ejemplo

**Problema.** Dado  $y \in \mathbb{R}$ , hallar los valores de  $x \in \mathbb{R}$  tales que  $|x + 8| = |3x - y|$ .

**Resolución.** Por definición de valor absoluto, equivale a resolver dos ecuaciones y unir sus conjuntos de soluciones:

$$\begin{cases} x + 8 = 3x - y \Rightarrow x = \frac{y + 8}{2}, \\ x + 8 = -(3x - y) = y - 3x \Rightarrow x = \frac{y - 8}{4}. \end{cases} \quad (1.1)$$

#### Ejemplo

**Problema.** Dado  $y \geq 0$ , encontrar los valores de  $x$  tales que  $|x - 3| \leq y$ .

**Resolución.**  $-y \leq x - 3 \leq y \iff 3 - y \leq x \leq 3 + y$ . Es decir,

$$\{x \in \mathbb{R} : |x - 3| \leq y\} = [3 - y, 3 + y].$$

(Son los puntos cuya distancia al 3 es menor o igual que  $y$ .)

#### Ejemplo

**Problema.** Resolver  $|x - 1| + |x - 2| > 1$  para  $x \in \mathbb{R}$ .

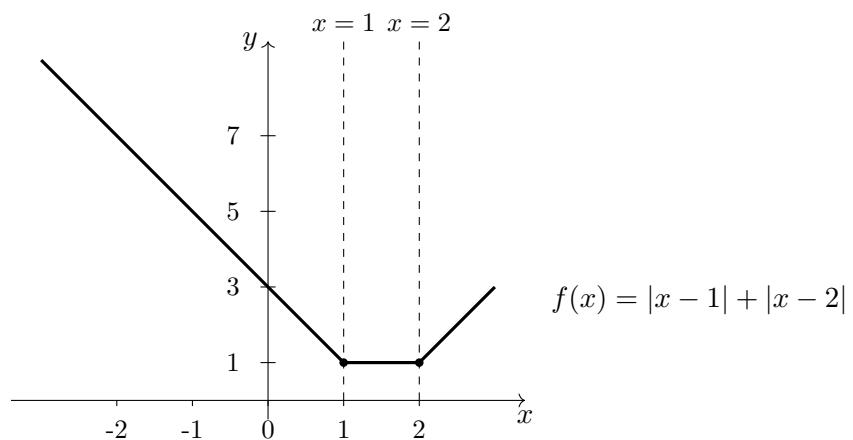
**Resolución.** Estudiamos la inecuación por tramos:

$$\begin{aligned} x \leq 1 : \quad & |x - 1| = 1 - x, \quad |x - 2| = 2 - x \Rightarrow 3 - 2x > 1 \iff x < 1, \\ 1 \leq x \leq 2 : \quad & |x - 1| = x - 1, \quad |x - 2| = 2 - x \Rightarrow 1 > 1 \text{ (no hay soluciones)}, \\ x \geq 2 : \quad & |x - 1| = x - 1, \quad |x - 2| = x - 2 \Rightarrow 2x - 3 > 1 \iff x > 2. \end{aligned}$$

Solución:

$$(-\infty, 1) \cup (2, \infty).$$

La función  $f(x) = |x - 1| + |x - 2|$  es lineal a trozos, así que también podemos recurrir a una representación geométrica de su gráfica:



## Capítulo 2

# Sucesiones de números reales

En este tema aparece por primera vez una de las ideas centrales del Análisis Matemático: la *convergencia*. Nos centraremos primero en la convergencia de sucesiones de números reales, que más adelante servirá como herramienta esencial en el estudio de las funciones reales de variable real.

Intuitivamente, una sucesión de números reales es una lista ordenada de números reales indexada en los naturales:

$$\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\}$$

**Definición 2.1.** Una sucesión es una aplicación

$$S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad n \mapsto S(n) = x_n.$$

A menudo identificamos la sucesión con su imagen  $S(\mathbb{N}) = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ , a la que denotamos  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  o simplemente  $\{x_n\}$  si no hay lugar a confusión. La principal ventaja de esta notación es su brevedad: por ejemplo, la sucesión  $\{\frac{1}{n}\}$  es la aplicación  $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $S(n) = \frac{1}{n}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , pero escribiendo  $\{\frac{1}{n}\}$  ya sabemos a qué sucesión nos referimos.

Si  $\{x_n\}$  es una sucesión, llamamos al *n*-ésimo término  $x_n$  el *termino general* de la sucesión, pues nos permite reconstruirla completamente. En algunos casos,  $x_n$  viene dado mediante una *fórmula recursiva*.

### Ejemplos:

- (1)  $x_n = \frac{n-1}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \{x_n\} = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \dots\right\}.$
- (2)  $x_1 = 1, x_n = \frac{1}{1+x_{n-1}} \quad \forall n \geq 2 \Rightarrow \{x_n\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \dots\right\}.$
- (3) (Sucesión de Fibonacci)  $x_1 = 1, x_2 = 1, x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \quad \forall n \geq 3,$   
 $\Rightarrow \{x_n\} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots\}.$

**La sucesión de Fibonacci y la razón áurea:** La sucesión de Fibonacci se define mediante la recurrencia

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \quad n \geq 3, \quad \text{con } x_1 = 1 \text{ y } x_2 = 1.$$

El término general  $x_n$  puede expresarse en función de  $n$  gracias a la **fórmula de Binet**:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \varphi^n - \left( -\frac{1}{\varphi} \right)^n \right),$$

donde  $\varphi$  es la *razón áurea*, que satisface  $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ .

**Idea de la demostración:** buscamos soluciones de la forma  $x_n = r^n$ , con  $r > 0$ . Sustituyendo en la recurrencia se obtiene

$$r^n = r^{n-1} + r^{n-2} \Rightarrow r^2 = r + 1.$$

La llamada *ecuación característica*  $r^2 - r - 1 = 0$  tiene por soluciones

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\varphi}.$$

Puede verse (con herramientas que escapan a los contenidos de este curso) que la solución general de la recurrencia es una combinación lineal

$$x_n = \alpha \varphi^n + \beta \psi^n, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Imponiendo las condiciones iniciales  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 1$ , podemos determinar  $\alpha$  y  $\beta$ :

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi^n - \psi^n).$$

## 2.1 Sucesiones convergentes

**Definición 2.2.** Decimos que una sucesión  $\{x_n\}$  está **acotada** cuando su imagen  $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$  es un subconjunto acotado de  $\mathbb{R}$ . Equivalentemente, si existe  $M > 0$  tal que

$$|x_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (M \text{ no depende de } n).$$

### Ejemplo

**Problema.** Demostrar que la sucesión  $\left\{ 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right\} = \{0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \dots\}$  es acotada.

**Resolución.** Usando las propiedades del valor absoluto, podemos ver que

$$|x_n| = \left| 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right| \leq 1 + \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = 1 + \frac{1}{n} \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La siguiente definición es una de las más importantes en matemáticas, y también una de las más difíciles de asimilar para quienes acaban de iniciarse en esta disciplina. La enunciamos formalmente, y después haremos comentarios con la esperanza de facilitar su comprensión.

**Definición 2.3.** Sea  $\{x_n\}$  una sucesión y  $L \in \mathbb{R}$ . Decimos que  $\{x_n\}$  **converge** a  $L$  si:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } [n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon].$$

En tal caso, se dice que  $L$  es el límite de  $\{x_n\}$  y escribimos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = L, \quad \text{o bien} \quad \{x_n\} \rightarrow L \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Conviene subrayar que el número natural  $n_0$  que aparece en la definición depende casi siempre del  $\varepsilon > 0$  considerado. Para probar que  $\{x_n\} \rightarrow L$  hay que dar una regla que, a cada  $\varepsilon > 0$ , le asigne un número natural  $n_0$  tal que se cumpla  $|x_n - L| < \varepsilon$  siempre que  $n \geq n_0$ .

La condición  $|x_n - L| < \varepsilon$  es más estricta cuanto más pequeño sea  $\varepsilon$ , y equivale a

$$L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon.$$

En otras palabras, por muy pequeño que sea  $\varepsilon$ , el intervalo  $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$  contiene a todos los términos de la sucesión a partir de cierto punto.

### Interpretación gráfica:

$L$  es el límite de  $\{x_n\}$  si, por pequeño que sea  $\varepsilon > 0$ , existe un  $n_0$  tal que todos los términos de la sucesión con  $n \geq n_0$  quedan dentro del intervalo  $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ .

$$(-\varepsilon, \varepsilon)$$



Desde el punto de vista geométrico, la desigualdad  $|x_n - L| < \varepsilon$  expresa que la distancia entre  $x_n$  y  $L$  en la recta real es menor que  $\varepsilon$ . De este modo, la convergencia  $\{x_n\} \rightarrow L$  significa que podemos acercar los términos de la sucesión a  $L$  tanto como queramos, basta con tomar  $n$  suficientemente grande (dependiendo de  $\varepsilon$ ). Así, los términos de la sucesión se aproximan a  $L$  de forma cada vez más precisa.

**Definición 2.4.** Decimos que  $\{x_n\}$  es **convergente** cuando tiene un límite  $L \in \mathbb{R}$ .

**Proposición 2.5.** El límite de una sucesión, si existe, es único.

### Demostración

Supongamos que  $\{x_n\} \rightarrow L_1$  y  $\{x_n\} \rightarrow L_2$ , y veamos que necesariamente se tiene  $L_1 = L_2$ . Sea  $\varepsilon > 0$ . Por la definición de convergencia, existen  $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$  tales que

$$|x_n - L_1| < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq m_1, \quad |x_n - L_2| < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq m_2.$$

Tomando  $n \geq m = \max\{m_1, m_2\}$ , se tiene

$$|L_1 - L_2| = |L_1 - x_n + x_n - L_2| \leq |L_1 - x_n| + |x_n - L_2| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Como  $\varepsilon > 0$  es arbitrario, la propiedad arquimediana nos permite concluir que  $|L_1 - L_2| \leq 0$ , lo cual implica que  $|L_1 - L_2| = 0$ , es decir,  $L_1 = L_2$ . ■

### Ejemplo

**Problema.** Demostrar que la sucesión  $\{1/n\}$  converge a  $L = 0$ .

**Resolución.** Sea  $\varepsilon > 0$ . Por la propiedad arquimediana, existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $m > 1/\varepsilon$ . Entonces, para todo  $n \geq m$  se cumple

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{m} < \varepsilon.$$

**Ejemplo**

**Problema.** Probar que la sucesión  $\{n\}$  no es convergente.

**Resolución.** Supongamos, por contradicción, que  $\{n\} \rightarrow L$  para algún  $L \in \mathbb{R}$ . Tomamos  $\varepsilon = 1$ . Entonces existiría  $m \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq m$ ,

$$|n - L| < 1 \Rightarrow n < L + 1.$$

Esto implica que  $L + 1$  sería un mayorante de  $\mathbb{N}$ , lo cual contradice la propiedad arquimediana. Por tanto,  $\{n\}$  no converge.

**Proposición 2.6.** Si  $\{x_n\}$  es convergente, entonces  $\{x_n\}$  está acotada.

**Demostración**

Sea  $\{x_n\} \rightarrow L$ . Por la definición de convergencia, existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que

$$|x_n - L| < 1 \quad \text{para todo } n \geq m.$$

Entonces, para  $n \geq m$ ,

$$|x_n| \leq |x_n - L| + |L| < 1 + |L|.$$

Por otra parte, el conjunto  $\{|x_n| : n < m\}$  tiene máximo por ser finito. Sea pues  $M = \max\{|x_n| : n < m\}$ , que depende de  $m$  pero no de  $n$ . En consecuencia,

$$|x_n| \leq \max\{1 + |L|, M\} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

y la sucesión  $\{x_n\}$  está acotada. ■

La implicación recíproca es falsa: la sucesión  $\{(-1)^n\}$  está acotada pero no es convergente.

**Idea útil (colas acotadas).** Si para cierto  $m \in \mathbb{N}$  el conjunto  $\{x_n : n \geq m\}$  es acotado, entonces la sucesión completa  $\{x_n\}$  es acotada. En efecto, si  $|x_n| \leq M_1$  para  $n \geq m$  y  $M_2 = \max\{|x_1|, \dots, |x_{m-1}|\}$ , entonces

$$|x_n| \leq \max\{M_1, M_2\} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La sucesión  $(-1)^n$  no converge, pero al fijarnos solo en sus términos de índice par o, alternativamente, en los de índice impar, obtenemos sucesiones que sí lo hacen. Este ejemplo muestra la idea de que, seleccionando ciertos términos de una sucesión, podemos construir una nueva, llamada *subsucesión* o *sucesión parcial* de la original.

**Definición 2.7.** Sea  $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  una sucesión y sea  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  una aplicación estrictamente creciente, esto es, para  $n, m \in \mathbb{N}$  con  $n < m$  se tiene  $\sigma(n) < \sigma(m)$ . Llamamos a la sucesión  $S \circ \sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $n \mapsto S(\sigma(n))$ , una **subsucesión** o **sucesión parcial** de  $S$ .

Si  $S = \{x_n\}$ , entonces denotamos  $\{x_{\sigma(n)}\}$  a la subsucesión.

**Ejemplo:**

Las aplicaciones  $n \mapsto 2n$ ,  $n \mapsto 2n - 1$  y  $n \mapsto 2^n$  son estrictamente crecientes, lo que nos da tres subsucesiones notables:

$$\begin{aligned}\{x_{2n}\} &= \{x_2, x_4, x_6, \dots\} \quad (\text{subsucesión de los términos en posición par}), \\ \{x_{2n-1}\} &= \{x_1, x_3, x_5, \dots\} \quad (\text{subsucesión de los términos en posición impar}), \\ \{x_{2^n}\} &= \{x_2, x_4, x_8, \dots\} \quad (\text{subsucesión de los términos en posición potencia de 2}).\end{aligned}$$

Vemos ahora que la convergencia de una sucesión implica la convergencia de todas sus parciales.

**Proposición 2.8.** Si  $\{x_n\} \rightarrow L$  y  $\{x_{\sigma(n)}\}$  es una subsucesión, entonces  $\{x_{\sigma(n)}\} \rightarrow L$ .

**Lema 2.9.** Si  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  es estrictamente creciente, entonces  $\sigma(n) \geq n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Demostración**

Procedemos por inducción. Para  $n = 1$ , como  $\sigma(1) \in \mathbb{N}$ , se tiene necesariamente  $\sigma(1) \geq 1$ . Supongamos ahora que  $\sigma(n) \geq n$ . Como  $\sigma$  es estrictamente creciente, se cumple

$$\sigma(n+1) > \sigma(n) \geq n,$$

luego  $\sigma(n+1) \geq n+1$ . Por inducción, concluimos que  $\sigma(n) \geq n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . ■

**Demostración de la Proposición 2.8**

Sea  $\varepsilon > 0$ . Como  $\{x_n\} \rightarrow L$ , existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que

$$|x_n - L| < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq m.$$

Además, por el Lema 2.9, si  $n \geq m$  entonces

$$\sigma(n) \geq n \geq m.$$

Por tanto, para  $n \geq m$  se verifica

$$|x_{\sigma(n)} - L| < \varepsilon.$$

Nótese que para cada  $\varepsilon > 0$  podemos usar el mismo  $m$  que proporciona la convergencia de la sucesión de partida. ■

Como consecuencia de este resultado y de la unicidad del límite, si existen dos subsucesiones tales que

$$\{x_{\sigma_1(n)}\} \rightarrow L_1, \quad \{x_{\sigma_2(n)}\} \rightarrow L_2, \quad L_1 \neq L_2,$$

entonces  $\{x_n\}$  no tiene límite.

**Ejemplo**

**Problema.** Estudiar la convergencia de  $\{x_n\} = \{2 + (-1)^n\}$ .

**Resolución.** Estudiemos las subsucesiones:

$$\{x_{2n}\} = \{2 + (-1)^{2n}\} = \{3, 3, 3, \dots\} \Rightarrow \{x_{2n}\} \rightarrow 3,$$

$$\{x_{2n-1}\} = \{2 + (-1)^{2n-1}\} = \{1, 1, 1, \dots\} \Rightarrow \{x_{2n-1}\} \rightarrow 1.$$

Dado que los límites de las dos subsucesiones difieren, concluimos que  $\{x_n\}$  no tiene límite.

En general, la convergencia de unas pocas subsucesiones de  $\{x_n\}$  a un mismo límite no implica que  $\{x_n\}$  sea convergente o que tenga el mismo límite. Basta pensar en una sucesión del tipo

$$\{x_n\} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es potencia de 2} \\ 0 & \text{si } n \text{ es potencia de 3} \\ n & \text{en otro caso} \end{cases} = \{1, 0, 0, 0, 5, 6, 7, 0, 0, 10, \dots\}.$$

Es fácil comprobar que  $\{x_{2^n}\}$  y  $\{x_{3^n}\}$  convergen a 0, pero  $\{x_n\}$  no es convergente.

Sin embargo, existen excepciones notables que podemos utilizar:

**Ejercicio:** Sea  $\{x_n\}$  una sucesión. Si existe  $L \in \mathbb{R}$  tal que  $\{x_{2n}\} \rightarrow L$  y  $\{x_{2n-1}\} \rightarrow L$ , entonces  $\{x_n\} \rightarrow L$ .

Recogemos en el siguiente resultado las principales propiedades de las operaciones que podemos realizar con sucesiones convergentes, que serán reglas básicas para el cálculo de límites.

**Proposición 2.10.** Sean  $\{x_n\}$ ,  $\{y_n\}$  sucesiones de números reales y  $L, L_1, L_2 \in \mathbb{R}$ .

- (1)  $\{x_n\} \rightarrow L \iff \{|x_n - L|\} \rightarrow 0$ . En particular,  $\{x_n\} \rightarrow 0 \iff \{|x_n|\} \rightarrow 0$ .
- (2) Si  $\{x_n\} \rightarrow L$ , entonces  $\{|x_n|\} \rightarrow |L|$ .
- (3) (Suma) Si  $\{x_n\} \rightarrow L_1$  y  $\{y_n\} \rightarrow L_2$ , entonces  $\{x_n + y_n\} \rightarrow L_1 + L_2$ .
- (4) Si  $\{x_n\}$  está acotada e  $\{y_n\} \rightarrow 0$ , entonces  $\{x_n y_n\} \rightarrow 0$ .
- (5) (Producto) Si  $\{x_n\} \rightarrow L_1$  y  $\{y_n\} \rightarrow L_2$ , entonces  $\{x_n y_n\} \rightarrow L_1 L_2$ .
- (6) (Inverso) Si  $x_n \in \mathbb{R}^*$  para todo  $n$  y  $\{x_n\} \rightarrow L \in \mathbb{R}^*$ , entonces  $\{1/x_n\} \rightarrow 1/L$ .
- (7) (Cociente) Si  $\{y_n\} \rightarrow L_2$  y  $\{x_n\} \rightarrow L_1 \neq 0$ , entonces  $\{y_n/x_n\} \rightarrow L_2/L_1$ .

**Demostración**

- (1) Es inmediato de la definición de límite:  $\{x_n\} \rightarrow L$  significa que  $|x_n - L| \rightarrow 0$ .
- (2) Por la desigualdad triangular inversa, se cumple

$$||x_n| - |L|| \leq |x_n - L|.$$

Si el segundo tiende a 0, también lo hace el primero, y por tanto  $|x_n| \rightarrow |L|$ . El

recíproco es falso (ejemplo:  $x_n = (-1)^n$ ).

- (3) Si  $\{x_n\} \rightarrow L_1$  y  $\{y_n\} \rightarrow L_2$ , dado  $\varepsilon > 0$  se encuentran  $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$  tales que, si  $n \geq \max\{m_1, m_2\}$ , entonces

$$|x_n - L_1| < \varepsilon/2 \quad \text{y} \quad |y_n - L_2| < \varepsilon/2$$

Entonces

$$|(x_n + y_n) - (L_1 + L_2)| \leq |x_n - L_1| + |y_n - L_2| < \varepsilon.$$

- (4) Si  $\{x_n\}$  está acotada, existe  $K \geq 0$  tal que  $|x_n| \leq K$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Dado que  $\{y_n\} \rightarrow 0$ , entonces existe un  $m \in \mathbb{N}$  tal que, para  $n \geq m$ , se cumple  $|y_n| < \varepsilon/K$ . Por tanto, si  $n \geq m$ :

$$|x_n y_n| \leq K |y_n| < \varepsilon.$$

Esto demuestra que  $\{x_n y_n\} \rightarrow 0$ .

- (5) Para el producto, escribimos

$$x_n y_n - L_1 L_2 = (x_n - L_1)(y_n - L_2) + (x_n - L_1)L_2 + (y_n - L_2)L_1.$$

El primer término tiende a 0 por el punto anterior (producto de acotada y convergente a 0), y los otros dos tienden a 0 directamente. Concluimos  $x_n y_n \rightarrow L_1 L_2$ .

- (6) Puesto que

$$\left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{L} \right| = \frac{|x_n - L|}{|x_n||L|},$$

bastará ver que  $1/x_n$  es acotada y aplicar el punto (6). En efecto, dado que  $\{x_n\} \rightarrow L \neq 0$ , podemos tomar  $\varepsilon = |L|/2 > 0$  para encontrar un  $m \in \mathbb{N}$  tal que, si  $n \geq m$ , entonces  $|x_n - L| < |L|/2$ . Esto nos da:

$$\begin{aligned} |x_n| &= |L - (L - x_n)| \geq ||L| - |x_n - L|| = |L| - |x_n - L| \\ &\geq |L| - \frac{|L|}{2} = \frac{|L|}{2}. \end{aligned}$$

Tomando inversos, resulta

$$\frac{1}{|x_n|} \leq \frac{2}{|L|} \quad n \geq m,$$

lo cual nos dice que  $\{1/x_n\}$  es acotada.

- (7) Finalmente,  $\{y_n/x_n\} = \{y_n\} \cdot \{1/x_n\}$  y aplicando los resultados de producto e inverso obtenemos  $y_n/x_n \rightarrow L_2/L_1$ . ■

### Ejemplo

**Problema.** Estudiar la convergencia de la sucesión

$$a_n = \frac{n^2 - n}{2 - n^2}.$$

**Resolución.** Hemos visto que la sucesión  $n$  no converge, por lo que en principio no podemos usar directamente las reglas anteriores. Para sortear el problema, dividimos

numerador y denominador por  $n^2$ :

$$\frac{n^2 - n}{2 - n^2} = \frac{1 - \frac{1}{n}}{\frac{2}{n^2} - 1}.$$

Ahora, cuando  $n \rightarrow \infty$  tenemos

$$\frac{1 - \frac{1}{n}}{\frac{2}{n^2} - 1} \rightarrow \frac{1}{-1} = -1.$$

Por tanto, la sucesión converge a  $-1$ .

Discutimos a continuación la relación entre la convergencia de sucesiones y el orden de los números reales. De forma más intuitiva: ¿si conocemos una desigualdad entre los límites de dos sucesiones convergentes, podemos asegurar desigualdades entre sus términos a partir de cierto punto? ¿Y viceversa? La respuesta es afirmativa y se recoge en la siguiente proposición.

**Proposición 2.11.** Sean  $\{x_n\} \rightarrow L_1$  y  $\{y_n\} \rightarrow L_2$  dos sucesiones convergentes.

- (1) Si  $L_2 < L_1$ , entonces existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $y_n < x_n$  para todo  $n \geq m$ .
- (2) Si existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $x_n \leq y_n$  para todo  $n \geq m$ , entonces  $L_1 \leq L_2$ .

### Demostración

- (1) Supongamos que  $L_2 < L_1$ , y sea  $\varepsilon = \frac{L_1 - L_2}{2} > 0$ . Por la definición de límite, existen  $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$  tales que

$$|x_n - L_1| < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq m_1, \quad |y_n - L_2| < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq m_2.$$

Tomando  $m = \max\{m_1, m_2\}$ , para todo  $n \geq m$  se cumple

$$y_n < L_2 + \varepsilon = \frac{L_1 + L_2}{2} = L_1 - \varepsilon < x_n.$$

(Recuerda que si  $z_n \rightarrow L$ , entonces para cada  $\varepsilon > 0$  se encuentra un  $m \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq m$ , se tiene  $L - \varepsilon < z_n < L + \varepsilon$ .)

- (2) Razonemos por reducción al absurdo: si se tuviese  $L_2 < L_1$ , aplicando el resultado anterior existiría  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $y_n < x_n$  para todo  $n \geq m$ . Esto significaría que  $x_n \leq y_n$  sólo podría cumplirse en un número finito de índices  $n$ , contradiciendo la hipótesis. Por tanto, necesariamente  $L_1 \leq L_2$ . ■

**Observación importante:** Es importante resaltar que la hipótesis estricta  $x_n < y_n$  para todo  $n \geq m$  no implica  $L_1 < L_2$ . Basta considerar, por ejemplo,  $x_n = 0$ ,  $y_n = 1/n$ , donde  $x_n < y_n$  siempre, pero  $L_1 = L_2 = 0$ .

**Proposición 2.12** (Teorema del sándwich). Sean  $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$  sucesiones tales que existe un  $m \in \mathbb{N}$  de forma que  $x_n \leq y_n \leq z_n$  para todo  $n \geq m$ . Si  $\{x_n\} \rightarrow L$  y  $\{z_n\} \rightarrow L$ , entonces también  $\{y_n\} \rightarrow L$ .

**Demostración**

Observamos que el punto (2) de la Proposición 2.11 no puede aplicarse directamente, puesto que no sabemos si  $\{y_n\}$  es convergente. Razonamos de la siguiente manera: dado  $\varepsilon > 0$ , existen  $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$  tales que

$$|x_n - L| < \varepsilon \quad (n \geq m_1), \quad |z_n - L| < \varepsilon \quad (n \geq m_2).$$

Tomando  $m = \max\{m, m_1, m_2\}$ , para todo  $n \geq m$  tenemos

$$L - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < L + \varepsilon.$$

Por tanto  $|y_n - L| < \varepsilon$  para todo  $n \geq m$ , y concluimos que  $\{y_n\} \rightarrow L$ . ■

**Ejemplo**

**Problema.** Probar que

$$x_n = \frac{(-1)^n n}{n^2 + 1} \quad \text{converge a } 0.$$

**Resolución.** Observamos primero que

$$0 \leq |x_n| = \frac{n}{n^2 + 1} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n},$$

ya que  $n^2 + 1 \geq n^2$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $\{\frac{1}{n}\} \rightarrow 0$ , del teorema del sándwich (con  $\{x_n\} = \{0\}$  y  $\{z_n\} = \{1/n\}$ ) se sigue que

$$|x_n| \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad x_n \rightarrow 0.$$

**Ejemplo**

**Problema. (Hoja 2, ejercicio 3)** Calcular

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k}.$$

**Resolución.** Para cada  $k$  se tiene  $n^2 \leq n^2 + k \leq n^2 + n$ . Cuando el denominador es mayor, la fracción es menor, y viceversa, de modo que

$$\frac{\sum_{k=1}^n (n+k)}{n^2+n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k} \leq \frac{\sum_{k=1}^n (n+k)}{n^2}.$$

Calculamos la suma del numerador:

$$\sum_{k=1}^n (n+k) = n \cdot n + \sum_{k=1}^n k = n^2 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{3}{2} n^2 + \frac{1}{2} n.$$

Sustituyendo:

$$\frac{3}{2} \leftarrow \frac{\frac{3}{2} n^2 + \frac{1}{2} n}{n^2+n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k} \leq \frac{\frac{3}{2} n^2 + \frac{1}{2} n}{n^2} \rightarrow \frac{3}{2}.$$

Por el criterio del sándwich,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k} = \frac{3}{2}.$$

Concluimos esta sección viendo que el supremo y el ínfimo de un conjunto  $A$  son puntos de  $\mathbb{R}$  a los que se puede llegar mediante sucesiones de elementos de  $A$ .

**Proposición 2.13.** Sea  $A \subset \mathbb{R}$  un conjunto no vacío.

- (1) Si  $A$  está mayorado, existe una sucesión  $\{x_n\}$  de elementos de  $A$  tal que  $\{x_n\} \rightarrow \sup A$ .
- (2) Si  $A$  está minorado, existe una sucesión  $\{y_n\}$  de elementos de  $A$  tal que  $\{y_n\} \rightarrow \inf A$ .

### Demostración de (1)

Supongamos que  $A$  está mayorado y sea  $s = \sup A$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , como  $s - \frac{1}{n}$  no es cota superior de  $A$ , existe  $x_n \in A$  verificando

$$s - \frac{1}{n} < x_n \leq s.$$

Así obtenemos una sucesión  $\{x_n\} \subset A$  que converge a  $s$  usando el Teorema del sándwich. El caso del ínfimo se razona de manera análoga. ■

## 2.2 Sucesiones monótonas

Vamos a introducir ahora una propiedad fundamental de las sucesiones: la *monotonía*. Veremos que, si una sucesión es monótona y está acotada, necesariamente converge. Este hecho proporciona un criterio muy útil para estudiar la convergencia de sucesiones sin necesidad de calcular explícitamente su límite.

A partir de aquí deduciremos el teorema de Bolzano–Weierstrass, que constituye uno de los resultados más relevantes sobre sucesiones, y que además conduce al teorema de completitud de  $\mathbb{R}$ , ofreciendo así una caracterización precisa de las sucesiones convergentes.

**Definición 2.14.** Se dice que una sucesión  $\{x_n\}$  es:

- **Creciente** si  $x_n \leq x_{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
- **Decreciente** si  $x_n \geq x_{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
- **Monótona** si es creciente o decreciente.

Una sucesión constante es a la vez creciente y decreciente. Las sucesiones  $\{n\}$  y  $\{-1/n\}$  son crecientes;  $\{-n\}$  y  $\{1/n\}$  son decrecientes. La sucesión  $\{(-1)^n\}$  no es monótona. Además,  $\{x_n\}$  es decreciente  $\iff \{-x_n\}$  es creciente, por lo que podremos reducirnos a considerar sucesiones crecientes cuando demostremos propiedades relacionadas con la monotonía.

**Proposición 2.15.** Toda sucesión monótona y acotada es convergente. Más precisamente:

- (I) Si  $\{x_n\}$  es creciente y mayorada, entonces  $\{x_n\} \rightarrow \sup\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ .
- (II) Si  $\{x_n\}$  es decreciente y minorada, entonces  $\{x_n\} \rightarrow \inf\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ .

**Demostración**

Supongamos que  $\{x_n\}$  es creciente y mayorada y sea  $\beta = \sup\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , por la definición de supremo existe  $m \in \mathbb{N}$  con  $\beta - \frac{\varepsilon}{2} \leq x_m \leq \beta$ . Como la sucesión es creciente, para todo  $n \geq m$ :

$$\beta - \varepsilon < \beta - \frac{\varepsilon}{2} \leq x_m \leq x_n \leq \beta < \beta + \varepsilon,$$

de donde sigue que  $|x_n - \beta| < \varepsilon$  y por tanto  $x_n \rightarrow \beta$ . El caso decreciente/minorada es análogo, o bien se aplica lo anterior a  $\{-x_n\}$ .  $\blacksquare$

**Ejemplo:** Para  $x \in \mathbb{R}$  con  $|x| < 1$ , se tiene  $\{x^n\} \rightarrow 0$ .

Sea  $y = |x| \in [0, 1)$ . Como  $|x^n| = |x|^n = y^n$  y  $0 \leq y^{n+1} \leq y^n$  para todo  $n$ , la sucesión  $\{y^n\}$  es decreciente y minorada, luego converge. Si  $\{y_n\} \rightarrow L$ , también  $\{y^{n+1}\} \rightarrow L$  por ser una subsucesión, y de la relación  $y^{n+1} = y^n \cdot y$  obtenemos que  $L = Ly$ .

Como  $y \neq 1$ , se deduce  $L = 0$ .

Entonces,  $\{|x^n|\} \rightarrow 0$ , lo que implica que  $\{x^n\} \rightarrow 0$ .

**Observación:** Si  $|x| > 1$ , es fácil ver que  $\{x^n\}$  no está acotada, por lo que no puede ser convergente. El caso  $|x| = 1$  es sobradamente conocido.

**Ejemplo**

**Problema.** Sea  $\{a_n\}$  una sucesión con  $a_1 > 3$  y  $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3}$ . Demostrar que es convergente y calcular su límite.

**Resolución.** (1) En primer lugar, veamos que  $\{a_n\}$  así definida es una sucesión **minorada**. Para ello, probamos por inducción que  $a_n > 3$  para todo  $n$ .

La etapa base es inmediata, ya que  $a_1 > 3$ . Supongamos ahora que  $a_n > 3$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3} > \sqrt{2 \cdot 3 + 3} = \sqrt{9} = 3.$$

Queda  $a_n > 3$  para todo  $n$ .

(2) Comprobemos ahora que  $\{a_n\}$  es **monótona decreciente**. Veamos directamente que  $a_{n+1} < a_n$  para todo  $n$ . Como  $a_n > 3 > 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , la desigualdad  $a_{n+1} < a_n$  equivale a

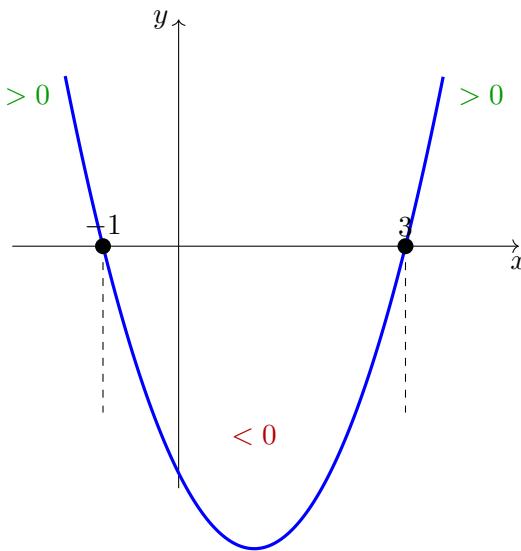
$$\sqrt{2a_n + 3} < a_n \iff 2a_n + 3 < a_n^2 \iff a_n^2 - 2a_n - 3 > 0.$$

El polinomio  $p(x) = x^2 - 2x - 3$  tiene raíces  $-1$  y  $3$ , y  $p(x) > 0$  para  $x < -1$  o  $x > 3$ . Como ya sabemos que  $a_n > 3$ , se cumple  $p(a_n) > 0$  y por tanto  $a_{n+1} < a_n$ .

(3) **Convergencia y límite.** La sucesión es *decreciente y minorada* por  $3$ , luego es convergente. Sea  $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ . Como  $\{a_{n+1}\}$  es una subsucesión de  $\{a_n\}$ , también se tiene  $\{a_{n+1}\} \rightarrow L$ . Tenemos entonces la igualdad:

$$L^2 = 2L + 3 \iff (L - 3)(L + 1) = 0.$$

Como  $a_n > 3$  para todo  $n$ , no puede tenerse  $L = -1$ , por lo que se deduce  $L = 3$ .



Las sucesiones monótonas aparecen con mucha más frecuencia de lo que podría parecer. El siguiente resultado lo pone de manifiesto y sirve de paso previo para el teorema central sobre convergencia de sucesiones reales.

**Lema 2.16.** Toda sucesión de números reales admite una sucesión parcial monótona.

### Demostración

Sea  $\{x_n\}$  una sucesión de números reales y consideremos el conjunto

$$A = \{n \in \mathbb{N} : x_n \geq x_{n+k} \ \forall k \in \mathbb{N}\},$$

que detecta los términos que son mayores o iguales que todos los que les siguen. Distinguimos dos casos:

- (1) Supongamos que  $A$  es **infinito**. Empezamos viendo que podemos construir una aplicación estrictamente creciente  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow A$ . Esto es, que podemos numerar los elementos de  $A$  de forma creciente.

Como todo subconjunto de  $\mathbb{N}$  tiene mínimo, podemos definir  $\sigma(1) = \min A$ . Ahora, daremos una fórmula recursiva que nos permita obtener  $\sigma(n+1)$  a partir de  $\sigma(n)$ :

$$\sigma(n+1) = \min \underbrace{\{a \in A : a > \sigma(n)\}}_{\neq \emptyset \text{ porque } A \text{ es infinito}}.$$

La sucesión  $\{x_{\sigma(n)}\}$  es parcial de  $\{x_n\}$ , y como  $\sigma(n) \in A$  se tiene  $x_{\sigma(n)} \geq x_{\sigma(n)+k}$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Tomando  $k = \sigma(n+1) - \sigma(n)$  obtenemos  $x_{\sigma(n)} \geq x_{\sigma(n+1)}$ , luego  $\{x_{\sigma(n)}\}$  es decreciente.

- (2) Si  $A$  es **finito** (posiblemente  $A = \emptyset$ ), entonces existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que

$$A \subset \{n \in \mathbb{N} : n < m\}.$$

Intuitivamente, a partir del índice  $m$  siempre aparece más adelante un término mayor, lo que permite construir una sucesión parcial creciente.

Definimos por inducción una aplicación  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \{n \in \mathbb{N} : n \geq m\}$  así: tomamos  $\sigma(1) = m$  y, dado  $n \geq 2$ , tomamos

$$\sigma(n+1) = \sigma(n) + \min\{k \in \mathbb{N} : x_{\sigma(n)+k} > x_{\sigma(n)}\}.$$

Entonces  $\sigma(n+1) > \sigma(n) \geq m$  y  $x_{\sigma(n)} < x_{\sigma(n+1)}$ , por lo que  $\{x_{\sigma(n)}\}$  es creciente.

En cualquiera de los dos casos obtenemos una sucesión parcial monótona de  $\{x_n\}$ . ■

**Teorema 2.17** (Teorema de Bolzano–Weierstrass). Toda sucesión acotada de números reales admite una sucesión parcial convergente.

### Demostración

Sea  $\{x_n\}$  una sucesión acotada. Por el lema anterior, existe una sucesión parcial monótona  $\{x_{\sigma(n)}\}$ . Al ser  $\{x_n\}$  acotada, existe  $K \in \mathbb{R}$  tal que  $|x_n| \leq K$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , y por tanto  $|x_{\sigma(n)}| \leq K$  para todo  $n$ . Así,  $\{x_{\sigma(n)}\}$  es monótona y acotada, luego es convergente por el resultado previo. ■

**Nota:** Hasta ahora, hemos visto la siguiente cadena de implicaciones:

$$\begin{array}{c} \{x_n\} \text{ monótona y acotada} \\ \Downarrow \\ \{x_n\} \text{ convergente} \\ \Downarrow \\ \{x_n\} \text{ acotada} \\ \Downarrow \\ \{x_n\} \text{ admite una subsucesión convergente.} \end{array}$$

Sin embargo, ninguna de estas implicaciones es reversible:

(1) Para ver que  $(iv) \not\Rightarrow (iii)$  basta tomar

$$x_n = n \left( \frac{1 + (-1)^n}{2} \right), \quad n \in \mathbb{N},$$

ya que  $x_{2n-1} = 0$  y  $x_{2n} = n$ . Así,  $\{x_n\}$  admite una subsucesión convergente y otra no acotada, por lo que  $\{x_n\}$  tampoco está acotada.

(2) Ya se comentó que existen sucesiones acotadas que no convergen, es decir,  $(iii) \not\Rightarrow (ii)$ .

(3) Finalmente, la sucesión  $\{(-1)^n/n\}$  converge a 0, pero no es monótona, así que  $(ii) \not\Rightarrow (i)$ .

Hasta ahora hemos visto condiciones necesarias (como la acotación) o suficientes (monotonía junto con acotación) para garantizar la convergencia de una sucesión. Sin embargo, ninguna de

ellas es a la vez necesaria y suficiente. Nuestro objetivo será encontrar un criterio que permita decidir si una sucesión es convergente sin necesidad de conocer de antemano su posible límite.

**Definición 2.18.** Una sucesión  $\{x_n\}$  se llama *sucesión de Cauchy* cuando, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que

$$p, q \geq m \implies |x_p - x_q| < \varepsilon.$$

Es decir, una sucesión de Cauchy es aquella cuyos términos están arbitrariamente cerca unos de otros para índices suficientemente grandes. Es fácil comprobar que toda sucesión convergente verifica esta propiedad, pues todos sus términos están tan cerca como se quiera del valor del límite. Que la afirmación recíproca sea también cierta caracteriza a la completitud de  $\mathbb{R}$ .

**Proposición 2.19** (Completitud de  $\mathbb{R}$ ). Una sucesión de números reales  $\{x_n\}$  converge si, y sólo si, es de Cauchy.

### Demostración

**Convergente  $\Rightarrow$  Cauchy.** Supongamos  $x_n \rightarrow L \in \mathbb{R}$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que

$$|x_n - L| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para todo } n \geq m.$$

Entonces, para  $p, q \geq m$ ,

$$|x_p - x_q| \leq |x_p - L| + |L - x_q| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

luego  $\{x_n\}$  es de Cauchy.

**Cauchy  $\Rightarrow$  convergente.** Sea ahora  $\{x_n\}$  una sucesión de Cauchy. Primero probamos que está acotada. Tomando  $\varepsilon = 1$  en la definición de Cauchy, existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que

$$|x_p - x_q| < 1 \quad \text{para cualesquiera } p, q \geq m.$$

En particular, con  $q = m$  y  $p = n \geq m$ ,

$$|x_n| \leq |x_n - x_m| + |x_m| < 1 + |x_m|,$$

de modo que  $\{x_n\}$  es acotada.

Por el teorema de Bolzano–Weierstrass, existe una sucesión parcial  $\{x_{\sigma(n)}\}$  que converge a algún  $L \in \mathbb{R}$ . Veamos que entonces también se tiene  $\{x_n\} \rightarrow L$ .

Sea  $\varepsilon > 0$ . Como  $\{x_n\}$  es de Cauchy, existe  $m_1 \in \mathbb{N}$  tal que

$$p, q \geq m_1 \implies |x_p - x_q| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.1)$$

Como  $\{x_{\sigma(n)}\} \rightarrow L$ , existe  $m_2 \in \mathbb{N}$  tal que

$$n \geq m_2 \implies |x_{\sigma(n)} - L| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.2)$$

Tomemos  $m = \max\{m_1, m_2\}$ , y sea  $n \geq m$ . Puesto que  $\sigma(n) \geq n \geq m$ , aplicando (2.1) con  $p = n$  y  $q = \sigma(n)$  y luego (2.2), obtenemos

$$|x_n - L| \leq |x_n - x_{\sigma(n)}| + |x_{\sigma(n)} - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por tanto,  $\{x_n\} \rightarrow L$ , como queríamos. ■

**Ejemplo**

**Problema.** Consideremos la sucesión definida por

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{2}{x_n} \right) \quad n \in \mathbb{N}.$$

Vamos a demostrar que  $\{x_n\}$  es una sucesión de Cauchy en  $\mathbb{Q}$  que no es convergente.

**Resolución.**

- Comenzamos viendo por inducción que  $x_n \in \mathbb{Q}$  para todo  $n$ .

El caso  $n = 1$  es claro. Si  $x_n \in \mathbb{Q}$ , entonces también  $2/x_n \in \mathbb{Q}$  y su media aritmética  $\frac{1}{2} \left( x_n + \frac{2}{x_n} \right) = x_{n+1} \in \mathbb{Q}$ .

- Demostremos ahora que se cumplen las estimas  $\sqrt{2} \leq x_n \leq 2$  para todo  $n$ .

Para  $n = 1$  tenemos  $\sqrt{2} < 2 = x_1 \leq 2$ . Supongamos que  $\sqrt{2} \leq x_n \leq 2$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{2}{x_n} \right) \leq \frac{1}{2} \left( 2 + \frac{2}{x_n} \right) \leq \frac{1}{2} \left( 2 + \frac{2}{\sqrt{2}} \right) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} < 2.$$

Por otro lado, usando la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica, esto es,  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$  para todo  $a, b > 0$  (véase la nota al final de este ejemplo), se tiene

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{2}{x_n} \right) \geq \sqrt{x_n \frac{2}{x_n}} = \sqrt{2}.$$

Queda probado que  $\sqrt{2} \leq x_{n+1} \leq 2$ .

- Comprobamos que  $\{x_n\}$  es monótona decreciente: como  $x_n \geq \sqrt{2} > 0$ , se tiene  $x_n^2 \geq 2$  y

$$\frac{2}{x_n} \leq \frac{x_n^2}{x_n} = x_n \implies x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{2}{x_n} \right) \leq \frac{1}{2} (x_n + x_n) = x_n.$$

Por ser  $\{x_n\}$  decreciente y minorada, existe  $L \in \mathbb{R}$ ,  $L \geq \sqrt{2}$ , de forma que  $\{x_n\} \rightarrow L$ . En particular,  $\{x_n\}$  es una sucesión de Cauchy.

- Por último, calculamos el valor de  $L$ . Pasando al límite en la relación de recurrencia,

$$L = \frac{1}{2} \left( L + \frac{2}{L} \right) \implies 2L = L + \frac{2}{L} \implies L^2 = 2.$$

Como  $L \geq \sqrt{2}$ , se obtiene  $L = \sqrt{2}$ .

**Conclusión.**  $\{x_n\}$  es una sucesión en  $\mathbb{Q}$  decreciente y acotada, por tanto convergente en  $\mathbb{R}$ . Toda sucesión convergente es de Cauchy, y esta noción es independiente del límite, luego  $\{x_n\}$  es una sucesión de Cauchy en  $\mathbb{Q}$ . Sin embargo, su único límite posible es  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ , luego  $\{x_n\}$  no converge en  $\mathbb{Q}$ .

**La desigualdad entre la media aritmética y la geométrica:** Sean  $a, b > 0$ .

Claramente,  $(a - b)^2 \geq 0$ , lo que nos da

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab \geq 4ab \Rightarrow (a + b)^2 \geq 4ab.$$

Como  $a, b > 0$ , podemos tomar raíces cuadradas para conseguir

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow \frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

## 2.3 Sucesiones divergentes

En este curso, llamamos sucesión *divergente* a cualquier sucesión que no sea convergente. Es menester señalar que en algunos textos, esta terminología se reserva para un tipo concreto de sucesiones no convergentes, que son las que tienden a  $+\infty$  o  $-\infty$ .

**Definición 2.20.** Una sucesión  $\{x_n\}$  se dice *divergente* cuando no es convergente.

Entre las sucesiones divergentes, señalamos los dos tipos más interesantes:

**Definición 2.21.** Sea  $\{x_n\}$  una sucesión de números reales.

- Decimos que  $\{x_n\}$  *diverge a  $+\infty$*  si, para todo  $K > 0$ , existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq m \Rightarrow x_n > K$ . En tal caso escribimos  $\{x_n\} \rightarrow +\infty$ .
- Análogamente, decimos que  $\{x_n\}$  *diverge a  $-\infty$*  si, para todo  $K < 0$ , existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq m \Rightarrow x_n < K$ . En tal caso escribimos  $\{x_n\} \rightarrow -\infty$ .

Conviene insistir en que  $\infty$ ,  $+\infty$  y  $-\infty$  son solo *símbolos* para indicar que una sucesión diverge hacia los positivos o los negativos. Escribir  $\{x_n\} \rightarrow +\infty$  no significa que la sucesión sea convergente ni que tenga límite  $+\infty$ . Las nociones de sucesión convergente y de límite real no cambian por introducir estas definiciones. Por ello deben evitarse expresiones como “ $\{x_n\}$  converge a  $+\infty$ ” o “ $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ ”, que pueden inducir confusión y no aportan claridad.

Estudiamos ahora la relación entre las sucesiones que divergen a  $\pm\infty$  con los demás tipos de sucesiones que hemos visto.

**Proposición 2.22.** Sea  $\{x_n\}$  una sucesión y  $\{x_{\sigma(n)}\}$  una subsucesión de  $\{x_n\}$ .

- (I) Si  $\{x_n\} \rightarrow +\infty$ , entonces  $\{x_{\sigma(n)}\} \rightarrow +\infty$ .
- (II) Si  $\{x_n\} \rightarrow -\infty$ , entonces  $\{x_{\sigma(n)}\} \rightarrow -\infty$ .

### Demostración

- (1) Sea  $K \in \mathbb{R}$ . Como  $\{x_n\} \rightarrow +\infty$ , existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq m \Rightarrow x_n > K$ . La aplicación  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  es estrictamente creciente, luego existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  con  $\sigma(n) \geq m$  para todo  $n \geq n_0$ . Por tanto, para  $n \geq n_0$  se tiene  $x_{\sigma(n)} > K$ , y queda probado que  $\{x_{\sigma(n)}\} \rightarrow +\infty$ .
- (2) Si  $\{x_n\} \rightarrow -\infty$ , entonces  $\{-x_n\} \rightarrow +\infty$ . Aplicando (i) a la sucesión  $\{-x_n\}$  obtenemos  $\{-x_{\sigma(n)}\} \rightarrow +\infty$ , es decir,  $\{x_{\sigma(n)}\} \rightarrow -\infty$ .



**Proposición 2.23.** Si  $\{x_n\}$  creciente y no mayorada, entonces  $\{x_n\} \rightarrow +\infty$ . De la misma manera, si  $\{x_n\}$  es decreciente y no minorada, entonces  $\{x_n\} \rightarrow -\infty$ . Por tanto, toda sucesión monótona es convergente o tiende a infinito.

### Demostración

Si  $\{x_n\}$  es creciente y no mayorada, dado  $K \in \mathbb{R}$ , existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $x_m > K$ , pero entonces, para  $n \geq m$  se cumple  $x_n \geq x_m > K$ , y de aquí  $\{x_n\} \rightarrow +\infty$ .

De modo análogo, si  $\{x_n\}$  es decreciente y no minorada, entonces  $\{-x_n\}$  es creciente y no mayorada, luego  $\{-x_n\} \rightarrow +\infty$ , y por tanto  $\{x_n\} \rightarrow -\infty$ . ■

El criterio anterior nos permite dar ejemplos de sucesiones que divergen a  $\pm\infty$ :

- Si  $x \in \mathbb{R}$  con  $x > 1$ , la sucesión  $\{x^n\}$  es creciente y no está mayorada, luego  $\{x^n\} \rightarrow +\infty$ .
- Si  $x < -1$ , entonces  $\{|x^n|\} = \{|x|^n\} \rightarrow +\infty$ . Sin embargo, la sucesión no tiende ni a  $+\infty$  ni a  $-\infty$ , pues oscila de signo.

### Ejemplo

**Problema.** Demostrar que  $\{\sqrt{n}\} \rightarrow +\infty$ .

**Resolución. Creciente.** Como  $0 < n < n + 1$ , tomando raíces cuadradas queda  $\sqrt{n} < \sqrt{n + 1}$ , luego es creciente.

**No mayorada.** Razonamos por reducción al absurdo: si existiera  $M \in \mathbb{R}$  tal que  $\sqrt{n} \leq M$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $n \leq M^2$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , lo cual contradice la propiedad arquimediana.

Por tanto, la sucesión es creciente y no está mayorada; en consecuencia,

$$\{\sqrt{n}\} \rightarrow +\infty.$$

El siguiente criterio nos permite deducir que una sucesión que diverge a  $\pm\infty$  comparándola con otra con el mismo comportamiento. Puede entenderse como un resultado análogo al Teorema del sándwich para este tipo de sucesiones divergentes.

**Proposición 2.24.** Sean  $\{x_n\}$  y  $\{y_n\}$  sucesiones de números reales tales que existe un  $m \in \mathbb{N}$  de forma que  $x_n \leq y_n$  para todo  $n \geq m$ . Entonces:

$$\{x_n\} \rightarrow +\infty \implies \{y_n\} \rightarrow +\infty, \quad \{y_n\} \rightarrow -\infty \implies \{x_n\} \rightarrow -\infty.$$

### Ejemplo

**Problema.** Consideremos la sucesión

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = \left\{ 1, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}, \dots \right\}.$$

Demostrar que  $\{x_n\} \rightarrow +\infty$ .

**Resolución.** Para  $1 \leq k \leq n$  se cumple  $\sqrt{k} \leq \sqrt{n}$ , luego

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Sumando para  $k = 1, \dots, n$ ,

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} = n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Como  $\{\sqrt{n}\} \rightarrow +\infty$ , por comparación se obtiene  $\{x_n\} \rightarrow +\infty$ .

Finalmente, resumimos el álgebra del  $\pm\infty$  en la siguiente proposición.

**Proposición 2.25.** Sean  $\{x_n\}$  y  $\{y_n\}$  sucesiones de números reales.

- (1) Si  $\{x_n\} \rightarrow +\infty$  y  $\{y_n\}$  está minorada, entonces  $\{x_n + y_n\} \rightarrow +\infty$ . En particular, la segunda condición se tiene si  $\{y_n\} \rightarrow L$  o  $\{y_n\} \rightarrow +\infty$ .
- (2) Si  $\{x_n\} \rightarrow -\infty$  y  $\{y_n\}$  está mayorada, entonces  $\{x_n + y_n\} \rightarrow -\infty$ . En particular, la segunda condición se tiene si  $\{y_n\} \rightarrow L$  o  $\{y_n\} \rightarrow -\infty$ .
- (3) Si  $\{x_n\} \rightarrow +\infty$  y existen  $\alpha > 0$  y  $m \in \mathbb{N}$  tales que, para  $n \geq m$ , se cumple  $y_n > \alpha > 0$ , entonces  $\{x_n y_n\} \rightarrow +\infty$ . En particular, la segunda condición se tiene si  $\{y_n\} \rightarrow L > 0$  o  $\{y_n\} \rightarrow +\infty$ .
- (4) Si  $\{x_n\} \rightarrow -\infty$  y existen  $\alpha > 0$  y  $m \in \mathbb{N}$  tales que, para  $n \geq m$ , se cumple  $y_n > \alpha > 0$ , entonces  $\{x_n y_n\} \rightarrow -\infty$ .
- (5) Sea  $x_n \neq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces  $\{x_n\} \rightarrow 0 \iff \left\{ \frac{1}{|x_n|} \right\} \rightarrow +\infty$ .

### Demostración

- (1) Supongamos  $\{x_n\} \rightarrow +\infty$  y  $\{y_n\}$  está minorada. Existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $y_n \geq \alpha$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Sea  $K \in \mathbb{R}$ . Como  $\{x_n\} \rightarrow +\infty$ , existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq m \implies x_n > K - \alpha$ . Entonces, para  $n \geq m$ , se cumple  $x_n + y_n > K - \alpha + \alpha = K$ , lo que prueba que  $\{x_n + y_n\} \rightarrow +\infty$ .
- (2) La demostración es análoga a (1).
- (3) Sea  $K \in \mathbb{R}$ . Como  $\{x_n\} \rightarrow +\infty$ , existe  $q \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq q$  se cumple  $x_n > K/\alpha$ . Definimos  $p = \max\{q, m\}$ . Entonces, para  $n \geq p$ , se tiene simultáneamente  $y_n > \alpha$  y  $x_n > K/\alpha$ , luego

$$x_n y_n > \frac{K}{\alpha} \alpha = K,$$

lo que prueba que  $\{x_n y_n\} \rightarrow +\infty$ .

- (4) Demostración análoga a (3).
- (5) Supongamos que  $\{x_n\} \rightarrow 0$ , y sea  $K \in \mathbb{R}^+$ . Como  $\{x_n\} \rightarrow 0$ , existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq m \implies |x_n| < \frac{1}{K}$ . Entonces, para  $n \geq m$  se cumple

$$\frac{1}{|x_n|} > K,$$

lo que muestra que  $\{\frac{1}{|x_n|}\} \rightarrow +\infty$ .

Recíprocamente, supongamos que  $\{1/|x_n|\} \rightarrow +\infty$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , tomamos  $K = 1/\varepsilon$ . Por hipótesis, existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq m \implies |1/x_n| > K = 1/\varepsilon$ . Esto equivale a  $|x_n| < \varepsilon$ , lo que prueba que  $\{x_n\} \rightarrow 0$ . ■

Las situaciones no contempladas en la discusión anterior se conocen como **indeterminaciones**, que es un término que se usa para denotar que no existe un criterio general que nos permita decidir el comportamiento de la situación en ese caso. Tenemos principalmente dos indeterminaciones, una para la suma y otra para el producto:

$$[\infty - \infty] \quad [0 \cdot \infty],$$

si bien la indeterminación para el producto puede aparecer en dos variantes aparentemente diferentes:  $[0 / 0]$  y  $[\infty / \infty]$ .

Es interesante observar que **cualquier sucesión** puede expresarse en forma de las dos indeterminaciones mencionadas anteriormente:

- Dada una sucesión  $\{z_n\}$ , podemos escribir  $z_n = x_n + y_n$ , con  $\{x_n\} \rightarrow +\infty$  e  $\{y_n\} \rightarrow -\infty$ . Basta definir  $x_n = z_n + |z_n| + n$  e  $y_n = z_n - x_n$ , de modo que  $x_n \geq n \rightarrow +\infty$  e  $y_n \leq -n \rightarrow -\infty$ .
- De igual forma, cualquier sucesión  $\{z_n\}$  puede escribirse como  $z_n = x_n y_n$ , con  $\{x_n\} \rightarrow +\infty$  e  $\{y_n\} \rightarrow 0$ . Por ejemplo, tomando  $x_n = n(|z_n| + 1)$  e  $y_n = z_n/x_n$ , se cumple  $x_n \geq n \rightarrow +\infty$  y  $|y_n| \leq 1/n \rightarrow 0$ .

## 2.4 Criterios de convergencia de sucesiones

El siguiente tema tiene un enfoque práctico, pues presentaremos dos criterios para resolver tipos concretos de indeterminaciones.

Para las indeterminaciones del tipo  $[\infty / \infty]$ , es útil el siguiente criterio ideado por el matemático austriaco O. Stolz, cuya demostración es altamente técnica y preferimos omitir.

**Teorema 2.26** (Criterio de Stolz). Sea  $\{\rho_n\}$  una sucesión de números positivos, estrictamente creciente y no mayorada (es decir,  $0 < \rho_n < \rho_{n+1}$ , y  $\{\rho_n\} \rightarrow +\infty$ ).

Entonces, para toda sucesión  $\{x_n\}$  y todo  $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ , se tiene

$$\left\{ \frac{x_{n+1} - x_n}{\rho_{n+1} - \rho_n} \right\} \rightarrow L \implies \left\{ \frac{x_n}{\rho_n} \right\} \rightarrow L.$$

### Ejemplo

**Problema.** Demostrar que, para cualesquiera  $x \in \mathbb{R}$  con  $|x| > 1$  y  $p \in \mathbb{N}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{x^n} = 0.$$

**Resolución.** En primer lugar nos damos cuenta de que basta con tratar el caso  $x > 1$ , pues

$$\left| \frac{n^p}{x^n} \right| = \frac{n^p}{|x|^n}$$

y  $|x| > 1$ . Haremos una demostración por inducción en  $p \in \mathbb{N}$ , aplicando el criterio de Stolz con  $\rho_n = x^p$  (que es positiva, estrictamente creciente y no mayorada).

**Etapa base**  $p = 1$ . Tomamos  $x_n = n$ . Entonces

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\rho_{n+1} - \rho_n} = \frac{(n+1) - n}{x^{n+1} - x^n} = \frac{1}{x^n(x-1)} \rightarrow 0,$$

y por Stolz se concluye  $\frac{n}{x^n} \rightarrow 0$ .

**Paso inductivo.** Supongamos cierto para un  $p \in \mathbb{N}$ , es decir,  $\frac{n^p}{x^n} \rightarrow 0$ . Tomamos ahora  $x_n = n^{p+1}$ . Entonces

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\rho_{n+1} - \rho_n} = \frac{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}}{x^{n+1} - x^n} = \frac{1}{x-1} \cdot \frac{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}}{n^p} \cdot \frac{n^p}{x^n}.$$

Usando el binomio de Newton, podemos ver que  $(n+1)^{p+1} = n^{p+1} + (p+1)n^p + R(n)$ , donde  $R(n)$  es un polinomio de grado  $< p$ . Por tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}}{n^p} = \frac{(p+1)n^p + R(n)}{n^p} = p+1.$$

Por otro lado, el tercer factor tiende a 0 por hipótesis de inducción. Por tanto, el producto también tiende a 0. Aplicando de nuevo el criterio de Stolz, concluimos que

$$\left\{ \frac{n^{p+1}}{x^n} \right\} \rightarrow 0.$$

Ahora, si  $\{x_n\}$  es una sucesión de números reales positivos, vamos a estudiar el comportamiento de la sucesión  $\{ \sqrt[p]{x_n} \}$ . Esto anticipa un nuevo tipo de indeterminación, la del tipo  $[\infty^0]$ , que estudiaremos con más atención una vez que hayamos introducido las funciones *logaritmo* y *exponencial*.

**Teorema 2.27** (Criterio de la raíz para sucesiones). Sea  $\{x_n\}$  una sucesión con  $x_n > 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces, para  $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , se tiene

$$\left\{ \frac{x_{n+1}}{x_n} \right\} \rightarrow L \implies \{ \sqrt[p]{x_n} \} \rightarrow L.$$

### Ejemplo

**Problema.** Probar que  $\sqrt[n]{n!} \rightarrow +\infty$ .

**Resolución.** Consideramos  $x_n = n!$ , con  $x_n > 0$ . Entonces

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \rightarrow +\infty.$$

Por el criterio de la raíz para sucesiones, concluimos que

$$\sqrt[n]{n!} \longrightarrow +\infty.$$

**Nota:**  $n! = n(n - 1) \cdots 2 \cdot 1 = \prod_{i=1}^k i = n \cdot (n - 1)!$

# Capítulo 3

## Series

Al estudiar una sucesión de números reales  $\{x_n\}$  surge de forma natural una nueva idea: la de *sumar todos sus términos*. Para ello podemos considerar las sumas finitas

$$x_1, \quad (x_1 + x_2), \quad (x_1 + x_2 + x_3), \quad \dots, \quad (x_1 + x_2 + \dots + x_n), \quad \dots$$

Si esta nueva sucesión converge, es plausible interpretar su límite como la *suma infinita* de los términos de  $\{x_n\}$  a la que queríamos dar sentido.

**Definición 3.1.** Dada una sucesión de números reales  $\{x_n\}$ , la *serie de término general*  $\{x_n\}$  es la sucesión de *sumas parciales*

$$\{S_n\} = \left\{ \sum_{k=1}^n x_k \right\},$$

y la denotaremos simplemente  $\sum_{n \geq 1} x_n$ .

Con esta definición queda claro que las series no son un objeto nuevo; son sucesiones cuyo término general se obtiene sumando los términos de otra sucesión. Por tanto, podemos hablar de nociones como convergencia, acotación y monotonía de series simplemente trasladando las correspondientes definiciones para sucesiones.

**Definición 3.2.** Decimos que la serie  $\sum_{n \geq 1} x_n$  es *convergente* si  $\{S_n\}$  converge; en tal caso llamamos a su límite la *suma de la serie*, y lo denotamos por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n,$$

que recuerda la idea de que estamos sumando los infinitos términos de la sucesión  $\{x_n\}$ .

En el estudio de una serie intervienen dos sucesiones, así que conviene fijar una notación que indique claramente a cuál nos estamos refiriendo. La sucesión cuyos términos estamos sumando,  $\{x_n\}$ , la llamaremos *término general* de la serie, y los propios términos de la serie  $\sum_{n \geq 1} x_n$  se denotarán las *sumas parciales*  $\{S_n\}$ . Como ya hemos mencionado, al límite de la serie lo llamaremos *suma* de la serie, también para diferenciarlo del posible límite de  $\{x_n\}$ , del que hablaremos enseguida.

Por tanto, si decimos que  $\sum_{n \geq 1} x_n$  es una serie de términos no-negativos, nos referimos a que  $x_n \geq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Esta propiedad se traduce inmediatamente en que la sucesión de sumas parciales es creciente.

### 3.1 Ejemplos de series

Acabamos de ver que toda serie es, por definición, una sucesión. Además, el recíproco también es cierto: cualquier sucesión puede verse como una serie. Por tanto, series y sucesiones no son más que dos puntos de vista diferentes para estudiar el mismo concepto matemático. La utilidad del primero quedará de manifiesto más adelante.

Dada una sucesión  $\{y_n\}$ , adoptamos por convenio  $y_0 = 0$  y definimos

$$x_n = y_n - y_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Entonces

$$S_n = \sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n (y_k - y_{k-1}) = y_1 + (y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + \cdots + y_n = y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Así, estudiar la sucesión  $y_n$  equivale a estudiar la serie  $\sum_{n \geq 1} (y_n - y_{n-1})$ .

Merece la pena dar un nombre a las series cuyo estudio se reduce a considerar una única sucesión en la forma que hemos discutido anteriormente.

**Definición 3.3.** Diremos que una serie  $\sum_{n \geq 1} x_n$  es *telescopica* si su término general puede escribirse de la forma

$$x_n = y_{n+1} - y_n \quad \forall n \geq 1.$$

para alguna sucesión  $\{y_n\}$ . En ese caso, el estudio de  $\sum_{n \geq 1} x_n$  equivale al de  $\{y_{n+1} - y_n\}$ .

#### Ejemplo

**Problema.** Estudiar la convergencia de la *serie de Mengoli*

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}.$$

**Resolución.** Observamos que

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Por tanto, las sumas parciales son

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Luego  $\{S_n\} \rightarrow 1$  y la serie es convergente con

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Si bien series y sucesiones son conceptos equivalentes, muchos de los ejemplos de sucesiones más importantes que aparecerán en el Análisis Matemático vienen en forma de series. A menudo, no hay una forma cómoda de obtener una fórmula general para la sucesión de sumas parciales de una serie, por lo que nos centraremos en la información sobre la serie  $\sum_{n \geq 1} x_n$  que podemos obtener a través de su término general  $\{x_n\}$ .

Un primer hecho básico es que, si  $\{x_n\}$  no converge a 0, la serie  $\sum_{n \geq 1} x_n$  no puede ser convergente. De forma equivalente:

**Proposición 3.4.** Si la serie  $\sum_{n \geq 1} x_n$  es convergente, entonces  $\{x_n\} \rightarrow 0$ .

### Demostración

Sea  $S_n = \sum_{k=1}^n x_k$  la sucesión de sumas parciales. Si la serie converge, entonces  $\{S_n\} \rightarrow S \in \mathbb{R}$ . Para  $n \geq 1$ , podemos escribir

$$x_{n+1} = S_{n+1} - S_n \longrightarrow S - S = 0,$$

luego  $\{x_n\} \rightarrow 0$ . ■

En términos de sucesiones, tendríamos que necesariamente la sucesión de diferencias  $\{y_n - y_{n-1}\} \rightarrow 0$  (o equivalentemente  $\{y_{n+1} - y_n\} \rightarrow 0$ ). Es natural preguntarse por el recíproco, esto es, si  $\{y_{n+1} - y_n\} \rightarrow 0$  implica que  $\{y_n\}$  es convergente. Esta es una pregunta interesante sobre sucesiones que no nos habrían hecho de no haber adoptado el punto de vista de las series.

Naturalmente, el recíproco es falso:  $\{x_n\} \rightarrow 0$  no es suficiente para que  $\sum_{n \geq 1} x_n$  sea convergente. Veremos enseguida un ejemplo importante.

**Proposición 3.5.** La serie armónica

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$$

diverge positivamente.

### Demostración

Sea  $\{H_n\}$  la sucesión de sumas parciales, esto es,

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Como  $\frac{1}{k} > 0$ , la sucesión  $\{H_n\}$  es creciente. Probamos que no está acotada mostrando, por inducción en  $n \in \mathbb{N}$ , que

$$H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}.$$

Para  $n = 1$  es claro:

$$H_2 = 1 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}.$$

Supuesto cierto para  $n$ , entonces

$$H_{2^{n+1}} = H_{2^n} + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geq \left(1 + \frac{n}{2}\right) + (2 \cdot 2^n - 2^n) \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = 1 + \frac{n+1}{2}.$$

Concluimos que  $H_{2^n} \rightarrow +\infty$ , por lo que  $\{H_n\}$  no está acotada. Como además es  $\{H_n\}$  creciente, tenemos también  $H_n \rightarrow +\infty$ . ■

Fijado  $x_0 \in \mathbb{R}$ , puede interesar que las sumas parciales de una serie arranquen en  $x_0$ , esto es, en

$n = 0$ . Denotamos por  $\sum_{n \geq 0} x_n$  a la serie cuyas sumas parciales son

$$\tilde{S}_n = \sum_{k=0}^{n-1} x_k = \sum_{k=1}^n x_{k-1}, \quad n \geq 1.$$

En vista de la identidad anterior, está claro que  $\sum_{n \geq 0} x_n = \sum_{n \geq 1} x_{n-1}$ , y se cumple

$$\tilde{S}_{n+1} = x_0 + S_n, \quad n \geq 1,$$

de donde es claro que la convergencia de  $\sum_{n \geq 0} x_n$  equivale a la de  $\sum_{n \geq 1} x_n$ , y si ambas son convergentes se tiene además

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{S}_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_{n-1} = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

**Definición 3.6.** Dado  $a \in \mathbb{R}$ , llamamos *serie geométrica de razón a* a

$$\sum_{n \geq 0} a^n = 1 + a + a^2 + \dots$$

cuyo término general es  $\{a^n\}$ .

Como  $a^n \rightarrow 0$  sólo si  $|a| < 1$ , una condición necesaria de convergencia es  $|a| < 1$ . Vemos inmediatamente que el recíproco también es cierto:

**Proposición 3.7.** Si  $|a| < 1$ , la serie geométrica de razón  $a$  es convergente y

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}.$$

### Demostración

Para  $n \in \mathbb{N}$  y  $a \neq 1$ , la fórmula de la suma de los  $n$  primeros términos de una progresión geométrica es de sobra conocida, y puede demostrarse fácilmente por inducción:

$$\sum_{k=0}^{n-1} a^k = \frac{1-a^n}{1-a}.$$

Si  $|a| < 1$  entonces  $\{a^n\} \rightarrow 0$ , y por tanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} a^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-a^n}{1-a} = \frac{1}{1-a}.$$

■

También resulta útil poder cortar los primeros términos de una serie. Fijado  $p \in \mathbb{N}$ , la serie  $\sum_{n \geq p+1} x_n$  no es más que la sucesión de sumas parciales

$$\hat{S}_n = \sum_{k=p+1}^{p+n} x_k = \sum_{k=1}^n x_{k+p},$$

de modo que estamos considerando la serie  $\sum_{n \geq 1} x_{n+p}$ . Las sumas parciales de  $\sum_{n \geq p+1} x_n$  y  $\sum_{n \geq 1} x_n$  satisfacen la relación

$$\hat{S}_n = \sum_{k=p+1}^{p+n} x_k = S_{p+n} - S_p,$$

de donde es evidente que  $\sum_{n \geq p+1} x_n$  converge si, y sólo si, converge  $\sum_{n \geq 1} x_n$ , y en tal caso, sus sumas verifican

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{k=1}^p x_k + \sum_{n=p+1}^{\infty} x_n.$$

En resumidas cuentas, el carácter de una serie (convergente o divergente) no cambia al eliminar un número finito de términos.

**Ejercicio:** Demostrar que si  $\sum_{n \geq 1} x_n$  es convergente, entonces las colas

$$\left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

forman una sucesión que converge a 0.

Una sencilla consecuencia del álgebra de sucesiones convergentes nos permite ampliar fácilmente nuestro catálogo de series convergentes.

**Proposición 3.8.** Sean  $\sum_{n \geq 1} x_n$  y  $\sum_{n \geq 1} y_n$  series convergentes y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Entonces la serie  $\sum_{n \geq 1} (\alpha x_n + \beta y_n)$  es convergente y

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} y_n.$$

### Demostración

Para  $n \in \mathbb{N}$ , definimos

$$X_n = \sum_{k=1}^n x_k, \quad Y_n = \sum_{k=1}^n y_k, \quad Z_n = \sum_{k=1}^n (\alpha x_k + \beta y_k) = \alpha X_n + \beta Y_n.$$

Como  $\{X_n\}$  y  $\{Y_n\}$  convergen, también converge  $\{Z_n\}$  y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} X_n + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n.$$

Esto prueba la convergencia de  $\sum_{n \geq 1} (\alpha x_n + \beta y_n)$  y la identidad anunciada. ■

**Ejemplo**

**Problema.** Demostrar que la siguiente serie es convergente y calcular su suma

$$\sum_{n \geq 1} \frac{2^{n-1} + 3^{n+1}}{5^n}.$$

**Resolución.** Por linealidad de las series y la fórmula de la geométrica:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{2^{n-1} + 3^{n+1}}{5^n} = \frac{1}{5} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} + \frac{9}{5} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{5}} + \frac{9}{5} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{5}} = \frac{1}{3} + \frac{9}{2} = \frac{29}{6}.$$

### 3.2 Criterios de convergencia para series de términos no negativos

En lo que sigue trabajaremos con series de la forma  $\sum_{n \geq 1} a_n$  con  $a_n \geq 0$ . Este tipo de series son sucesiones crecientes, ya que  $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , lo que simplifica su estudio. De hecho, hemos visto que una sucesión creciente solo puede ser convergente o divergir a  $+\infty$ , dependiendo de si está mayorada o no.

$$\sum_{n \geq 1} a_n \text{ converge} \iff \{S_n\} \text{ está mayorada.}$$

Por tanto, de la convergencia de una serie podemos deducir la de muchas otras a las que esta mayorada.

**Proposición 3.9** (Criterio de comparación). Sean  $\sum_{n \geq 1} a_n$  y  $\sum_{n \geq 1} b_n$  dos series con  $a_n \geq 0$ ,  $b_n \geq 0$ . Supongamos que existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que  $a_n \leq b_n$  para todo  $n \geq p$ . Entonces,

$$\sum_{n \geq 1} b_n \text{ convergente} \implies \sum_{n \geq 1} a_n \text{ convergente.}$$

**Demostración**

Por ser  $\sum_{n \geq 1} b_n$  convergente, está mayorada, es decir, existe  $M \in \mathbb{R}$  tal que

$$\sum_{k=1}^n b_k \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sumando término a término la desigualdad  $0 < a_{k+p} \leq b_{k+p}$  para  $k = 1, \dots, n$ , se tiene

$$\sum_{k=1}^n a_{k+p} \leq \sum_{k=1}^n b_{k+p} \leq \sum_{k=1}^{n+p} b_k \leq M.$$

Al estar mayorada, la serie  $\sum_{n \geq 1} a_{n+p} = \sum_{n \geq p+1} a_n$  es convergente, lo que equivale a la convergencia de la serie  $\sum_{n \geq 1} a_n$ . ■

Si bien el anterior criterio de comparación tiene utilidad en sí mismo, su principal función es permitirnos demostrar el siguiente, que es más potente y práctico.

**Proposición 3.10** (Criterio de comparación por paso al límite). Sean  $a_n \geq 0$  y  $b_n > 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , y supongamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L \geq 0.$$

(1) Si  $L > 0$ ,  $\sum_{n \geq 1} a_n$  converge  $\iff \sum_{n \geq 1} b_n$  converge.

(2) Si  $L = 0$  y  $\sum_{n \geq 1} b_n$  converge  $\implies \sum_{n \geq 1} a_n$  converge.

### Demostración

(1) Tomando  $\varepsilon = L/2$ , encontramos un  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que, para  $n \geq n_0$ ,

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - L \right| < \frac{L}{2} \implies \frac{L}{2} b_n \leq a_n \leq \frac{3L}{2} b_n.$$

Aplicamos el criterio de comparación entre  $\sum_{n \geq 1} \frac{L}{2} b_n$  y  $\sum_{n \geq 1} a_n$ , y luego entre  $\sum_{n \geq 1} a_n$  y  $\sum_{n \geq 1} \frac{3L}{2} b_n$ , teniendo en cuenta que multiplicar una sucesión por una constante positiva no afecta a su convergencia.

(2) Tomemos  $\varepsilon = 1$ . Entonces existe  $n_0$  tal que, para  $n \geq n_0$ ,  $\frac{a_n}{b_n} < 1$ , es decir,  $0 \leq a_n \leq b_n$ . Si  $\sum_{n \geq 1} b_n$  converge, también lo hace  $\sum_{n \geq 1} a_n$  por el primer criterio de comparación. ■

**Nota:** Si  $a_n > 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y  $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\} \rightarrow +\infty$ , entonces  $\left\{ \frac{b_n}{a_n} \right\} \rightarrow 0$ . Aplicando el punto (2) intercambiando los papeles de  $\sum_{n \geq 1} a_n$  y  $\sum_{n \geq 1} b_n$ , tenemos:

$$\text{si } \sum_{n \geq 1} a_n \text{ converge } \implies \sum_{n \geq 1} b_n \text{ converge.}$$

Por contrarrecíproco, esta afirmación es equivalente a

$$\text{si } \sum_{n \geq 1} b_n \text{ diverge } \implies \sum_{n \geq 1} a_n \text{ diverge.}$$

### Ejemplo

**Problema.** Estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n}{n^2 + 3n + 4}.$$

**Resolución.** Tomamos  $b_n = \frac{1}{n}$ . Entonces

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{n}{n^2 + 3n + 4}}{\frac{1}{n}} = \frac{n^2}{n^2 + 3n + 4} \rightarrow 1 (> 0).$$

Por el criterio de comparación por paso al límite, la serie dada converge si y sólo si lo hace  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ , que es la armónica y diverge. Luego  $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{n^2 + 3n + 4}$  diverge positivamente.

**Ejemplo**

**Problema.** Para  $p \in \mathbb{N}$  con  $p \geq 2$ , la *serie armónica con exponente p* es convergente.

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^p}.$$

**Resolución.** En primer lugar, veamos que podemos reducirnos al caso  $n = 2$ : si  $p \geq 2$  y  $n \in \mathbb{N}$ , entonces de  $n^p \geq n^2$  se sigue que

$$0 < \frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Por el *criterio de comparación*, si  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  converge entonces también lo harán las de exponente  $p$  para todo  $p \geq 2$ .

Sea  $b_n = \frac{1}{n(n+1)}$ . Sabemos que la serie de Mengoli  $\sum_{n \geq 1} b_n$  es convergente, y se verifica

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \frac{n(n+1)}{n^2} = 1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1 (> 0).$$

Por el *criterio de comparación por paso al límite*,  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  converge.

**Observación.** Que la convergencia de dos series sea *equivalente* no significa en absoluto que tengan la misma *suma*. Los criterios de comparación miran el comportamiento *asintótico* (para  $n$  grandes), mientras que la suma depende de *todos* los sumandos, incluidos los primeros. En particular, por comparación, las series

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \quad \text{y} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$$

son asintóticas la una a la otra (su carácter es equivalente), pero sus sumas no coinciden:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

(La segunda igualdad requiere herramientas más avanzadas; por ejemplo, series de Fourier.)

**Teorema 3.11** (Criterio de la raíz para series). Sea  $a_n \geq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y supongamos que  $\{\sqrt[n]{a_n}\} \rightarrow L \geq 0$ .

- (1) Si  $L > 1$ , entonces  $\{a_n\} \nrightarrow 0$ , y la serie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  diverge positivamente.
- (2) Si  $L < 1$ , entonces la serie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  es convergente.

**Demostración**

- (1) Comprobemos que si  $\{a_n\} \rightarrow 0$ , entonces necesariamente  $L \leq 1$ . En efecto, si  $a_n \rightarrow 0$ , existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que, para  $n \geq m$ , se tiene  $0 \leq a_n < 1$ , luego

$$\sqrt[n]{a_n} < 1 \quad \forall n \geq m.$$

Pasando al límite, tenemos  $L \leq 1$ , como se buscaba.

- (2) Tomando  $\varepsilon > 0$  de forma que  $0 \leq L + \varepsilon < 1$  (por ejemplo,  $\varepsilon = \frac{1-L}{2}$ ), encontramos un  $m \in \mathbb{N}$  tal que, para  $n \geq m$ , se tiene

$$|\sqrt[n]{a_n} - L| < \varepsilon \implies \sqrt[n]{a_n} < (L + \varepsilon) \implies a_n < (L + \varepsilon)^n.$$

La serie geométrica  $\sum_{n \geq 1} (L + \varepsilon)^n$  converge, ya que  $0 < L + \varepsilon < 1$ , de modo que también lo hace  $\sum_{n \geq 1} a_n$  por el primer criterio de comparación. ■

**Nota:** Si  $L = 1$ , el criterio anterior no decide:

$$\left\{ \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \right\} \rightarrow 1 \text{ y } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \text{ diverge,} \quad \left\{ \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} \right\} \rightarrow 1 \text{ y } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \text{ converge.}$$

La combinación del criterio anterior junto al criterio de la raíz para sucesiones nos da el siguiente:

**Proposición 3.12** (Criterio del cociente o de d'Alembert). Sea  $a_n > 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y supongamos que

$$\left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\} \rightarrow L \geq 0.$$

- (1) Si  $L > 1$ , entonces  $a_n \rightarrow 0$ , luego la serie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  diverge.  
 (2) Si  $L < 1$ , entonces la serie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  es convergente.

**Ejemplo**

**Problema.** Fijados  $q \in \mathbb{N}$  y  $x \in \mathbb{R}$  con  $x > 1$ , la serie

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n^q}{x^n}.$$

es convergente.

**Resolución.** Sea  $a_n = \frac{n^q}{x^n}$ . Entonces

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^q}{n^q x} = \frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^q \rightarrow \frac{1}{x} < 1.$$

Por el *criterio del cociente*, la serie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  es convergente.

En particular,  $\{a_n\} = \{\frac{n^q}{x^n}\} \rightarrow 0$ , que es un resultado de sucesiones que tuvimos que demostrar por inducción usando el criterio de Stolz.

**Ejercicio:** Para  $a \in \mathbb{R}$  con  $|a| < 1$ , calcula la suma de las series

$$\sum_{n \geq 1} na^n, \quad \sum_{n \geq 1} n(n-1)a^n \quad \text{y} \quad \sum_{n \geq 1} n^2a^n.$$

Aunque *a priori* puedan parecernos criterios equivalentes, no es difícil comprobar que el *criterio de la raíz* puede decidir casos en los que el del *cociente* no lo hace. Consideremos

$$\sum_{n \geq 1} a_n, \quad a_n = \frac{3 + (-1)^n}{2^n}.$$

Para  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{3 + (-1)^n}}{2} = \begin{cases} \frac{\sqrt[n]{2}}{2} & \text{si } n \text{ es impar,} \\ \frac{\sqrt[n]{4}}{2} & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

En ambos casos  $\{\sqrt[n]{a_n}\} \rightarrow \frac{1}{2} < 1$ , luego, por el *criterio de la raíz*, la serie es convergente. Sin embargo,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3 + (-1)^{n+1}}{2(3 + (-1)^n)} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es impar,} \\ \frac{1}{4} & \text{si } n \text{ es par,} \end{cases}$$

de modo que el *criterio del cociente* no puede aplicarse.

### Ejemplo

**Problema.** Estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

**Resolución.** Sea  $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ . Claramente  $a_n > 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , y podemos considerar el cociente

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^2 (2n)!}{(2n+2)! (n!)^2} = \frac{(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{n^2 + 2n + 1}{4n^2 + 6n + 2} \rightarrow \frac{1}{4} < 1.$$

Por el criterio del cociente, la serie es convergente.

**Proposición 3.13** (Criterio de condensación de Cauchy). Sea  $\{a_n\}$  una sucesión *decreciente* con  $a_n > 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces

$$\sum_{n \geq 1} a_n \quad \text{converge} \iff \sum_{n \geq 0} 2^n a_{2^n} \quad \text{converge}$$

### Demostración

*Esta demostración no se vio en clase.*

Consideramos las sumas parciales de cada serie:

$$A_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad B_n = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k a_{2^k} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Empezamos mostraremos por inducción que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$A_{2^n-1} \leq B_n \leq 2A_{2^n-1}. \quad (1)$$

A partir de esta cadena de desigualdades deduciremos fácilmente que  $\{A_n\}$  está mayorada si y solo si lo está  $\{B_n\}$ .

**Etapa base**  $n = 1$ . Se tiene  $A_1 = a_1 \leq a_1 = B_1 \leq 2a_1 = 2A_1$ .

**Paso inductivo.** Supongamos que 1 es cierta para  $n$ . Por ser  $\{a_n\}$  decreciente, se tiene que  $j \leq 2^n \leq k \Rightarrow a_k \leq a_{2^n} \leq a_j$ , y deducimos que:

$$\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_k \leq 2^n a_{2^n} = 2 \cdot 2^{n-1} a_{2^n} \leq 2 \sum_{j=2^{n-1}+1}^{2^n} a_j, \quad (2)$$

donde hemos usado que la suma del primer miembro tiene  $2^n$  sumandos, y la del último tiene  $2^{n-1}$ . Usando la hipótesis de inducción y (2) tenemos

$$A_{2^{n+1}-1} = A_{2^n-1} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_k \leq A_{2^n-1} + 2^n a_{2^n} \leq B_n + 2^n a_{2^n} = B_{n+1},$$

y también

$$B_{n+1} = B_n + 2^n a_{2^n} \leq 2A_{2^n-1} + 2^n a_{2^n} \leq 2 \left( A_{2^n-1} + \sum_{j=2^{n-1}+1}^{2^n} a_j \right) = 2A_{2^n}.$$

Como  $\{A_n\}$  y  $\{B_n\}$  son crecientes,  $A_n \leq A_{2^n-1} \leq B_n$ , luego  $\{A_n\}$  está mayorada si lo está  $\{B_n\}$ . Recíprocamente, si  $\{A_n\}$  está mayorada, entonces también lo está su subsucesión  $A_{2^n-1}$ , y por tanto  $B_n$ . ■

### Idea de la demostración anterior

*Esta demostración no se vio en clase.*

La clave son las dos estimaciones que se obtienen de la monotonía decreciente de  $\{a_n\}$ :

$$\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_k \leq 2^n a_{2^n}, \quad 2^n a_{2^n} \leq 2 \sum_{j=2^{n-1}+1}^{2^n} a_j.$$

La primera *condensa*: en el bloque de  $2^n$  sumandos sustituimos cada uno por el mayor del bloque,  $a_{2^n}$ . La segunda *descondensa*: repartimos el único término  $2^n a_{2^n}$  en una suma de  $2^{n-1}$  términos, cada uno  $\geq a_{2^n}$ .

El mecanismo se visualiza comprobando el caso  $n = 4$ :

$$\begin{aligned} A_{15} &= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + (a_8 + a_9 + \cdots + a_{15}) \\ &\leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 = B_4 \\ &\leq 2(a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8)) = 2A_8. \end{aligned}$$

En la primera desigualdad cada bloque se *condensa* mayorando por su primer término; en la segunda,  $8a_8$  se *descondensa* mayorando por  $a_5 + a_6 + a_7 + a_8$  (y análogamente  $4a_4$  por  $(a_3 + a_4)$  y  $2a_2$  por  $a_1 + a_2$ ).

Esto ejemplifica por qué  $A_{2^n-1} \leq B_n \leq 2A_{2^n-1}$  y, por tanto, la equivalencia de convergencia. ■

La convergencia de la serie armónica de exponente  $p \in \mathbb{N}$  podría haberse estudiado aplicando un único criterio, de la siguiente manera:

### Ejemplo

**Problema.** Estudiar la convergencia de la serie armónica con exponente  $p$ ,

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^p}, \quad p \in \mathbb{N}.$$

**Resolución.** Aplicamos la condensación a  $a_n = \frac{1}{n^p}$  (sucesión decreciente y positiva):

$$\sum_{n \geq 0} 2^n a_{2^n} = \sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{(2^n)^p} = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n.$$

Es una geométrica de razón  $1/2^{p-1}$ . Converge si  $p > 1$  y diverge si  $p = 1$ . Por el criterio de condensación, la serie  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^p}$  converge para  $p > 1$  y diverge (positivamente) para  $p = 1$ .

### Ejemplo

**Problema.** Para  $q \in \mathbb{N}$ , estudiar la convergencia de

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n \sqrt[q]{n}}.$$

**Resolución.** Sea  $a_n = \frac{1}{n \sqrt[q]{n}}$ . Entonces  $a_n > 0$  y  $\{a_n\}$  es decreciente, por lo que podemos aplicar el *criterio de condensación*. Calculamos

$$2^n a_{2^n} = 2^n \cdot \frac{1}{2^n \sqrt[q]{2^n}} = \frac{1}{\sqrt[q]{2^n}} = \left(\frac{1}{2^{1/q}}\right)^n.$$

La serie condensada  $\sum_{n \geq 0} 2^n a_{2^n}$  es geométrica de razón  $2^{-1/q} < 1$ , luego es convergente.

Por el criterio de condensación, también converge la serie inicial

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n \sqrt[q]{n}}.$$

(Equivalente a la serie armónica de exponente  $1 + \frac{1}{q} > 1$ .)

### 3.3 Criterios de convergencia para series de signo variable

Hasta ahora hemos estudiado series de términos no negativos. Pasamos al caso general, y consideramos series  $\sum_{n \geq 1} x_n$  con  $x_n \in \mathbb{R}$ .

En primer lugar, nos damos cuenta de que el caso realmente nuevo es cuando aparecen infinitos términos positivos e infinitos términos negativos, ya que:

- (1) Si el conjunto  $\{n \in \mathbb{N} : x_n < 0\}$  es finito, existe  $m \in \mathbb{N}$  de forma que  $x_n \geq 0$  para  $n \geq m$ , y sabemos que la convergencia de  $\sum_{n \geq 1} x_n$  equivale entonces a la de

$$\sum_{n \geq m} x_n,$$

que es de términos no negativos.

- (2) De forma análoga, si  $\{n \in \mathbb{N} : x_n > 0\}$  es finito, estudiamos entonces la  $\sum_{n \geq 1} (-x_n)$ , que se encuentra en las condiciones del punto (1).

Cuando  $\sum_{n \geq 1} x_n$  tiene infinitos términos positivos e infinitos negativos, resulta natural comparar la serie con  $\sum_{n \geq 1} |x_n|$ , lo que nos lleva a la siguiente noción:

**Definición 3.14.** Dada una serie de números reales  $\sum_{n \geq 1} x_n$ , diremos que es *absolutamente convergente* cuando la serie de valores absolutos

$$\sum_{n \geq 1} |x_n|$$

es convergente.

Como la nomenclatura sugiere, toda serie absolutamente convergente es convergente. Este hecho es una consecuencia del Teorema de completitud de  $\mathbb{R}$ .

**Teorema 3.15.** Toda serie absolutamente convergente es convergente. Más aún, si  $\sum_{n \geq 1} |x_n|$  converge, entonces  $\sum_{n \geq 1} x_n$  también converge y

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|.$$

#### Demostración

Consideremos las sumas parciales de ambas series:  $S_n = \sum_{k=1}^n x_k$  y  $\sigma_n = \sum_{k=1}^n |x_k|$

para  $n \in \mathbb{N}$ . Para  $p, q \in \mathbb{N}$  con  $q < p$ ,

$$|S_p - S_q| = \left| \sum_{k=q+1}^p x_k \right| \leq \sum_{k=q+1}^p |x_k| = \sigma_p - \sigma_q = |\sigma_p - \sigma_q|.$$

Nótese que la desigualdad anterior es obvia cuando  $p = q$  y, si  $p < q$ , basta intercambiar las etiquetas de  $p$  y  $q$ . Por tanto, es válida para todo  $p, q \in \mathbb{N}$ .

Sabemos que  $\{\sigma_n\}$  converge, luego es de Cauchy. Por la desigualdad anterior,  $\{S_n\}$  también es de Cauchy y, por completitud de  $\mathbb{R}$ , converge. Es decir, la serie  $\sum_{n \geq 1} x_n$  es convergente.

Finalmente, como  $|S_n| \leq \sigma_n$  para todo  $n$  y  $\sigma_n \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ , pasamos al límite y obtenemos

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|.$$

■

El recíproco no es cierto, y para entender por qué estudiaremos las *series alternadas* y el *criterio de Leibniz*, que proporciona numerosos ejemplos de series convergentes que no lo son absolutamente.

**Definición 3.16.** Llamamos *serie alternada* a cualquier serie de la forma

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^n a_n \quad \text{o} \quad \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} a_n,$$

donde  $a_n \geq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Por ejemplo, la serie

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

recibe el nombre de *serie armónica alternada*. Claramente, esta serie no es absolutamente convergente, ya que  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  diverge, pero veremos enseguida que sí es convergente.

**Proposición 3.17** (Criterio de Leibniz). Sea  $\{a_n\}$  una sucesión decreciente con  $\{a_n\} \rightarrow 0$ . Entonces la serie alternada

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^n a_n$$

es convergente.

### Demostración

*Esta demostración no se vio en clase.*

Sea  $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k a_k$ . Vamos a demostrar que  $S_n$  es convergente probando que  $S_{2n-1}$  y  $S_{2n}$  convergen al mismo límite.

Usando que  $a_n$  es decreciente y  $a_n \geq 0$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$  se tiene

$$\begin{aligned} S_{2n-1} &\leq S_{2n-1} + \underbrace{a_{2n} - a_{2n+1}}_{\geq 0} = S_{2n+1} \\ &\leq S_{2n+1} + a_{2n+2} = S_{2n+2} = S_{2n} - \underbrace{a_{2n+1} + a_{2n+2}}_{\leq 0} \leq S_{2n}. \end{aligned}$$

En resumidas cuentas, hemos visto que  $S_{2n-1} \leq S_{2n+1} \leq S_{2n+2} \leq S_{2n}$ . Por tanto,  $\{S_{2n-1}\}$  es creciente y  $\{S_{2n}\}$  es decreciente. En particular,

$$S_1 \leq S_{2n-1} \leq S_{2n} < S_2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por ser sucesiones monótonas y acotadas, son convergentes, pero es claro que

$$\{S_{2n} - S_{2n-1}\} = \{a_{2n}\} \longrightarrow 0.$$

Esto nos da que  $S_{2n}$  y  $S_{2n-1}$  tienen el mismo límite, y por tanto  $S_n$  también converge a dicho límite (recuérdese el ejercicio de la página 28). ■

## Anexos del capítulo

### 3.A Convergencia incondicional

Complementamos este capítulo discutiendo sobre la pregunta que nos hicimos al principio: ¿es realmente correcto interpretar la suma de una serie convergente como la suma de todos los términos de una sucesión?

Hemos visto que en algunos casos la suma de una serie presenta ciertas propiedades de distributividad y de asociatividad. Nos preguntamos ahora por la posible conmutatividad en un sentido muy general: si permutamos de cualquier forma los sumandos de una serie, ¿se mantiene la convergencia y la suma de la serie sigue siendo la misma? Vamos a comentar algunos resultados acerca de esta cuestión, sin entrar en las demostraciones.

**Definición 3.18.** Una *permutación* de los números naturales es una aplicación biyectiva  $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ . Dadas una sucesión  $\{x_n\}$  y una permutación  $\pi$  de los números naturales, podemos formar la sucesión  $\{x_{\pi(n)}\}$ , que consiste en reordenar los términos de  $\{x_n\}$  según  $\pi$ .

Pues bien, si la serie  $\sum_{n \geq 1} x_n$  es convergente y la suma de series verificase la propiedad conmutativa, la serie *reordenada*  $\sum_{n \geq 1} x_{\pi(n)}$  debería ser convergente y tener la misma suma que la serie de partida. En principio esto no está nada claro, ya que es difícil relacionar las sumas parciales de ambas series.

**Definición 3.19.** Se dice que una serie de números reales  $\sum_{n \geq 1} x_n$  es *incondicionalmente convergente* cuando, para cualquier permutación  $\pi$  de los números naturales, la serie reordenada

$$\sum_{n \geq 1} x_{\pi(n)}$$

es convergente.

Es claro que toda serie incondicionalmente convergente es convergente, pues basta tomar  $\pi(n) = n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . De hecho, se tiene la siguiente equivalencia:

**Teorema 3.20.** Sea  $\sum_{n \geq 1} x_n$  una serie de números reales. Entonces,  $\sum_{n \geq 1} x_n$  es incondicionalmente convergente si, y solo si, es absolutamente convergente. En tal caso:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

para toda permutación  $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ .

Como se ha dicho, no vamos a exponer con detalle la demostración de esta equivalencia, pero sí vamos profundizar en un hecho que aparece tácitamente en el resultado anterior: si  $\sum_{n \geq 1} x_n$  converge pero no lo hace absolutamente, podemos reordenar sus términos para formar una sucesión divergente. Pero peor aún, incluso para las reordenaciones que dan lugar a series convergentes, la suma que se obtiene depende de la permutación de los números naturales que usemos. Este resultado se debe al matemático alemán Bernhard Riemann y puede enunciarse como sigue.

**Teorema 3.21** (Teorema de Riemann). Sea  $\sum_{n \geq 1} x_n$  una serie convergente, que no converja absolutamente, y fijemos  $s \in \mathbb{R}$ . Entonces existen permutaciones  $\pi_+$ ,  $\pi_-$  y  $\pi_s$  de los números naturales, tales que  $\sum_{n \geq 1} x_{\pi_+(n)} \rightarrow +\infty$ ,  $\sum_{n \geq 1} x_{\pi_-(n)} \rightarrow -\infty$  y la serie  $\sum_{n \geq 1} x_{\pi_s(n)}$  converge, con

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi_s(n)} = s.$$

Dicho de forma más intuitiva, toda serie convergente que no converja absolutamente, puede reordenarse para que diverja positivamente, para que diverja negativamente, y también para que converja a cualquier número real que queramos.

Como conclusión general, podemos decir que si la serie *converge absolutamente*, está justificado pensar que la suma de la serie responde a la idea intuitiva de sumar todos los términos de  $\{x_n\}$ . En particular, este es el caso de las series convergentes de términos no negativos. Sin embargo, cuando  $\sum_{n \geq 1} x_n$  es convergente, pero no absolutamente convergente, esa idea intuitiva debe manejarse con precaución.

## Capítulo 4

# Funciones reales de una variable real

### 4.1 Introducción

En muchos contextos científicos es necesario describir la forma en que una magnitud depende de otra. Una manera sistemática de hacerlo es mediante el concepto de *función*.

Históricamente, la idea de función surgió en el siglo XVII al estudiar relaciones entre cantidades variables en física y geometría. Por ejemplo, Galileo describía la posición de un cuerpo en movimiento como dependiente del tiempo, y en el siglo XVIII Leibniz y Euler consolidaron el término *función* para referirse a una regla que asigna a cada valor de una variable otro valor determinado.

#### **La primera función de la ciencia.**

A comienzos del siglo XVII, la física empezó a orientarse hacia la observación y la experimentación. Uno de los primeros grandes descubrimientos fue comprender que el mismo principio que explica muchos de los fenómenos terrestres es el que también gobierna los movimientos de los planetas en el cielo: la *Gravitación Universal*. En ese contexto, Galileo Galilei (Pisa 1564 – Florencia 1642) fue el primero en plantear que los fenómenos naturales podían analizarse cuantitativamente: midiendo magnitudes y relacionándolas mediante leyes matemáticas.

#### **La caída de los cuerpos.**

Galileo cuestionó la idea, heredada de Aristóteles, de que los cuerpos más pesados caen más rápido. Según narra la tradición, dejó caer dos esferas, una de hierro y otra de madera, desde la torre de Pisa, observando que llegaban al suelo al mismo tiempo. Concluyó que, en ausencia de resistencia del aire, todos los cuerpos caen con la misma aceleración. Sin embargo, comprobarlo con precisión era difícil en una época en la que no existían cronómetros como los que conocemos; la caída era demasiado rápida para medir los tiempos con exactitud.

Para superar esa dificultad, Galileo ideó un experimento más controlable: hacer rodar una esfera por un plano inclinado. Así suavizaba la acción de la gravedad, consiguiendo que el movimiento fuese más lento. Variando la inclinación del plano, podía comparar los resultados y extrapolarlos al caso de la caída vertical.

Galileo colocó pequeñas campanillas a lo largo de la rampa, de modo que sonaran al paso de la esfera. Ajustó su posición hasta lograr que sonaran a intervalos de tiempo

iguales, que media con una clepsidra (reloj de agua). Después midió las distancias entre las campanillas, es decir, los espacios recorridos por la esfera en intervalos iguales de tiempo.

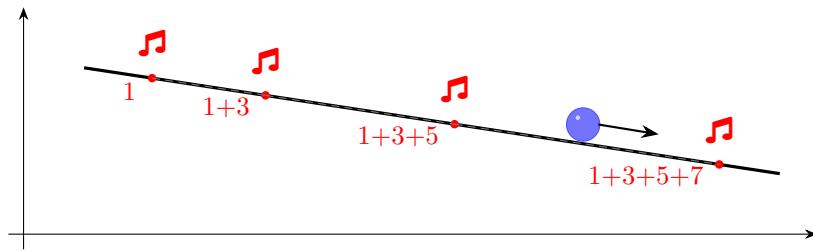
Según los resultados del experimento, esas distancias seguían la progresión  $1, 3, 5, 7, \dots$ , lo que indicaba que el cuerpo recorre espacios cada vez mayores, pero con una regularidad precisa. De hecho, la misma conclusión podía obtenerse cambiando la inclinación del plano y la masa de la esfera. Sumando esos incrementos, Galileo obtuvo

$$\begin{aligned}d(1) &= 1, \\d(2) &= 1 + 3 = 4, \\d(3) &= 1 + 3 + 5 = 9, \\d(4) &= 1 + 3 + 5 + 7 = 16,\end{aligned}$$

es decir, distancias proporcionales al cuadrado del tiempo transcurrido:

$$d(t) = C t^2.$$

Galileo había descubierto la primera relación funcional entre dos magnitudes físicas: la distancia recorrida por un cuerpo en caída (o en un plano inclinado) y el tiempo transcurrido. Esa expresión, aunque simple, representa un cambio radical en la forma de entender la naturaleza: a partir de entonces, describir un fenómeno significaría encontrar la función que relaciona sus variables.



Las funciones permiten, por tanto, expresar de manera precisa la *dependencia* que existe entre dos magnitudes reales. Algunos ejemplos cotidianos son:

- (1) La altura de una persona en función de su edad.
- (2) El número de ejemplares de una especie en un determinado hábitat en función del tiempo.

De forma general, el concepto de función recoge la idea de que un conjunto de datos puede depender de otro. En su formulación moderna, una función es una ley o correspondencia que asocia a cada elemento de un conjunto un único elemento de otro.

**Definición 4.1.** Sean  $A, B \subset \mathbb{R}$  no vacíos. Llamamos *función real de variable real* a cualquier aplicación  $f : A \rightarrow B$ , esto es, una correspondencia que asigna a cada elemento  $x \in A$  un **único** elemento  $f(x) \in B$ .

Para definir una función suele usarse la siguiente notación, que especifica el dominio de definición de una función  $f$ , así como la *ecuación* que nos permite obtener  $f(x)$  a partir de  $x$ .

$$f : A \rightarrow B, \quad x \mapsto f(x) = \dots \quad \text{o} \quad f : A \rightarrow B, \quad f(x) = \dots$$

Si  $f : A \rightarrow B$  es una función, decimos que  $A$  es su conjunto de definición o *dominio*.

Puesto que sólo vamos a trabajar con este tipo de funciones, cuando usemos la palabra *función*, nos referimos siempre a una función real de variable real.

**Definición 4.2.** El conjunto  $f(A)$  de los valores que toma  $f$  se llama *imagen* o *recorrido* de  $f$ .

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\} = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x) \text{ para algún } x \in A\}$$

Dado que toda aplicación  $f : A \rightarrow B$  es en particular una aplicación  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , siempre podemos escribir lo segundo. Especificar que una función  $f$  devuelve valores en  $B$  es una forma de enfatizar la propiedad  $f(A) \subset B$ . Por ejemplo, la función *parte entera de  $x$*  suele denotarse como  $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ , ya que  $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Nótese que si elegimos  $B = f(A)$ ,  $f$  se convierte automáticamente en una aplicación **sobreyectiva**.

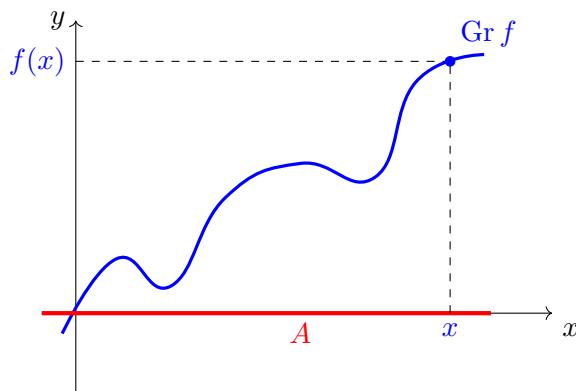
Toda función real queda completamente determinada por su *gráfica*, que es el siguiente subconjunto de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ :

$$\text{Gr } f = \{(x, f(x)) : x \in A\}$$

Si representamos este conjunto en el plano cartesiano  $\mathbb{R}^2$ , los puntos  $(x, y)$  que forman  $\text{Gr } f$  son aquellos que cumplen dos condiciones: la abscisa  $x$  es un punto de  $A$  y la ordenada  $y$  es su imagen por  $f$ . En resumidas cuentas:

$$\text{Gr } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in A, y = f(x)\}.$$

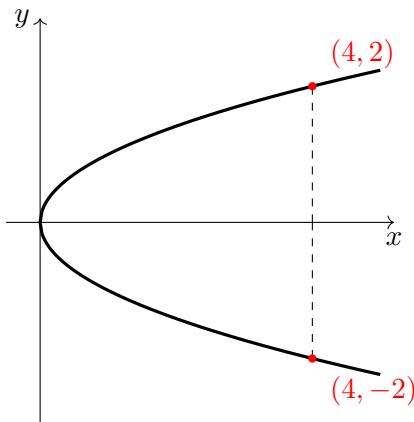
Por definición de función, para cada  $x \in A$  la recta vertical que pasa por  $(x, 0)$  contiene **un único punto de la gráfica**, el que verifica  $y = f(x)$ . Si  $x \notin A$ , dicha recta no corta a la gráfica de  $f$ .



Geométricamente, al proyectar  $\text{Gr } f$  sobre el eje de abscisas se obtiene el conjunto  $A$  donde  $f$  está definida y, para cada  $x \in A$ ,  $f(x)$  es el único  $y \in \mathbb{R}$  tal que  $(x, y) \in \text{Gr } f$ .

Esto motiva la notación  $y = f(x)$  para  $x \in A$  a la hora de definir funciones. Bajo ese punto de vista, a  $x$  se le llama *variable independiente*, e  $y$  se dice que es la *variable dependiente*. En términos de relaciones entre magnitudes, es conveniente pensar en  $x$  como en un *dato* y en  $y$  como en un *resultado*. La función  $f$  juega el papel del modelo que nos permite predecir el resultado  $y$  a partir del dato  $x$ .

**Date cuenta:** La relación  $y^2 = x$  en  $\mathbb{R}^2$  **no define** la gráfica de una función  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , ya que existen valores de  $x$  con dos imágenes. Por ejemplo, para  $x = 4$ , tenemos  $y = 2$  e  $y = -2$ .



En cambio,  $x \mapsto \sqrt{x}$  y  $x \mapsto -\sqrt{x}$  sí son funciones (definidas por ejemplo en  $[0, +\infty)$ ).

**Definición 4.3.** Dada una relación  $y = f(x)$ , llamamos *dominio natural* o *dominio maximal* de  $f$  al mayor subconjunto de  $\mathbb{R}$  donde puede definirse  $f$ , y lo denotamos por

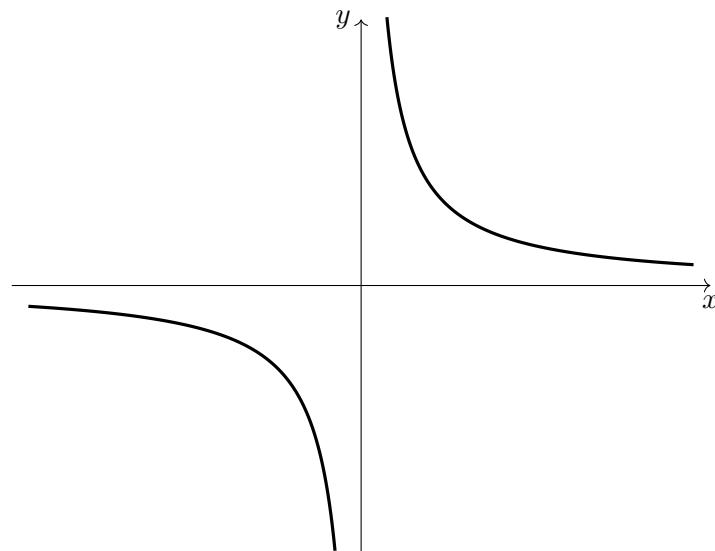
$$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\}.$$

### Ejemplos.

- (1) Si  $f$  es una función *polinómica*,  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ , ya que podemos sumar, multiplicar y elevar a potencias naturales cualquier número real.
- (2) Llamamos función *racional* a cualquier función  $f$  de la forma  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ , siendo  $p$  y  $q$  funciones polinómicas. En tal caso, se tiene

$$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\}.$$

La función racional  $x \mapsto \frac{1}{x}$  puede definirse para todo  $x \in \mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$ . Su representación gráfica es una *hipérbola* de dos ramas.

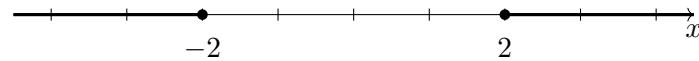


- (3) Para  $n \in \mathbb{N}$ , el dominio maximal de una *función radical* de la forma  $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$  son los puntos donde el radicando  $g$  es no negativo:

$$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \geq 0\}.$$

Si  $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ , entonces

$$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 > 0\} = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty).$$

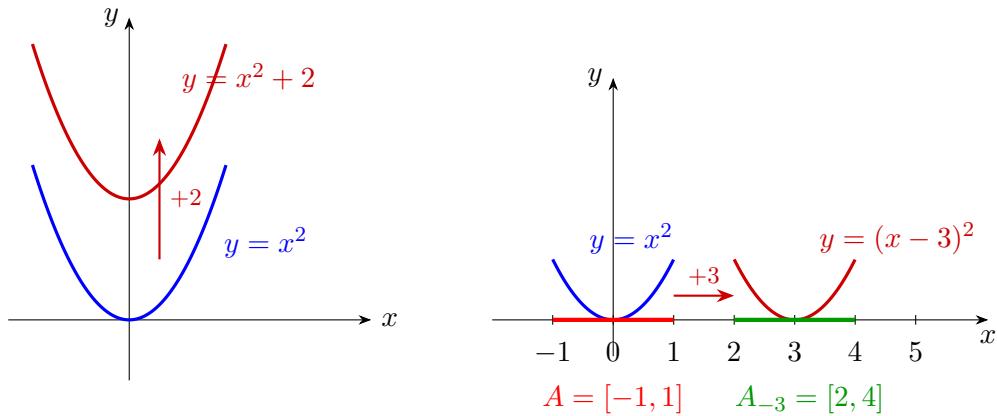


Conocida la gráfica de una función, es fácil obtener la de funciones similares obtenidas mediante *transformaciones elementales* de la original, como son las traslaciones, las dilataciones y las reflexiones.

**Definición 4.4.** Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Dado  $c \in \mathbb{R}$ , llamamos

$$A_c = \{z \in \mathbb{R} : z + c \in A\} = \{x - c : x \in A\}.$$

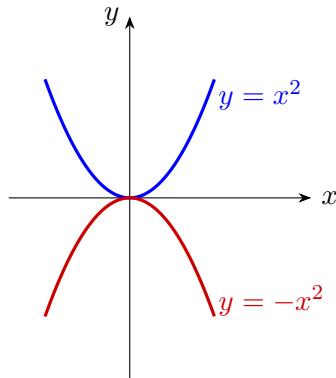
- (1) La **traslación horizontal** de  $c$  unidades de  $f$  es la función  $g : A_c \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $g(x) = f(x + c)$ . Si  $c > 0$ , se trata de una traslación a la izquierda, y si  $c < 0$ , una traslación a la derecha.
- (2) La **traslación vertical** de  $c$  unidades de  $f$  es la función  $g : A \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $g(x) = f(x) + c$ . Si  $c > 0$ , estamos trasladando la función  $f$  hacia arriba, y si  $c < 0$ , hacia abajo.



**Definición 4.5.** Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Dado un  $c \in \mathbb{R}^*$ , llamamos

$$cA = \{cx : x \in A\}.$$

- (1) La **reflexión respecto al eje  $x$**  de  $f$  es la función  $g : A \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $g(x) = -f(x)$ .
- (2) La **reflexión respecto al eje  $y$**  de  $f$  es la función  $g : -A \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $g(x) = f(-x)$ .
- (3) La **reflexión respecto al origen** de  $f$  es la función  $g : -A \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $g(x) = -f(-x)$ .

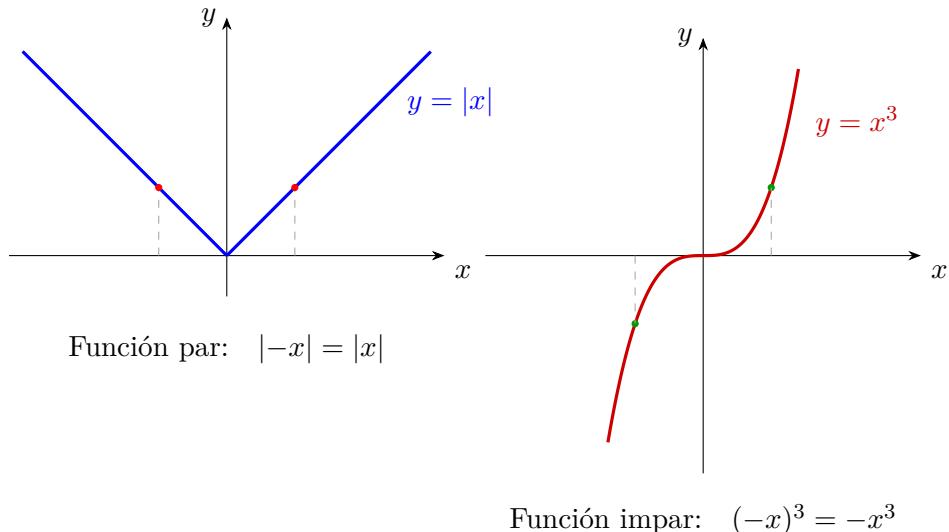


Reflexión respecto al eje  $x$ : cada punto  $(x, y) \in \text{Gr}(f)$  se transforma en  $(x, -y) \in \text{Gr}(g)$ .

Las funciones que permanecen invariantes ante las transformaciones (1) o (3) tienen gráficas simétricas, lo que se traducirá en propiedades analíticas útiles a la hora de calcular sus integrales.

**Definición 4.6.** Sea  $A \subset \mathbb{R}$  tal que  $-A = A$ . Se dice que una función  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  es

- (1) **simétrica par** si  $f(-x) = f(x)$  para todo  $x \in A$ .
- (2) **simétrica impar** si  $f(-x) = -f(x)$  para todo  $x \in A$ .



Las gráficas de las funciones pares tienen la propiedad de que al plegarlas a lo largo del eje  $y$ , las mitades a ambos lados del origen son coincidentes. Análogamente, si plegamos la gráfica de una función impar a lo largo de ambos ejes, las mitades a ambos lados del  $(0, 0)$  resultan coincidentes.

Finalmente, discutimos las transformaciones que consisten en *modificar la escala* de la variable o de la función.

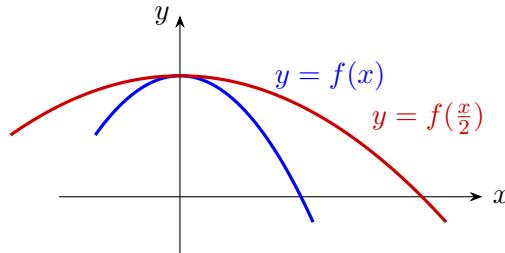
**Definición 4.7.** Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una función y  $c > 0$ .

Si  $c > 1$ :

- (1) La **contracción horizontal** de razón  $c$  es la función  $g : \frac{1}{c}A \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(x) = f(cx)$ .
- (2) La **dilatación vertical** de razón  $c$  es la función  $g : A \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(x) = cf(x)$ .

Si  $c < 1$ :

- (3) La **dilatación horizontal** de razón  $c$  es la función  $g : \frac{1}{c}A \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(x) = f(cx)$ .
- (4) La **contracción vertical** de razón  $c$  es la función  $g : A \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(x) = cf(x)$ .



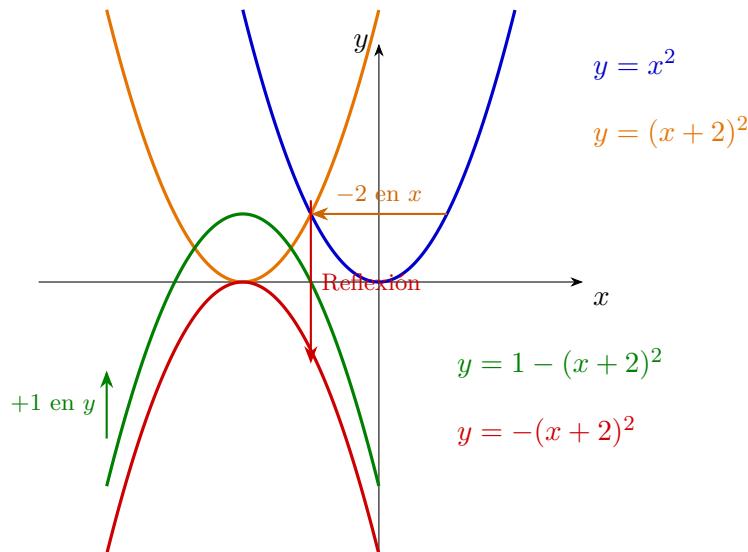
Dilatación horizontal de razón  $1/2$ .

En general, una función puede obtenerse combinando varias de las transformaciones anteriores. Por ejemplo, si partimos de  $f(x) = x^2$ , podemos representar la gráfica de la función

$$g(x) = 1 - (x + 2)^2,$$

su gráfica se obtiene aplicando sucesivamente:

- (1) una traslación 2 unidades a la izquierda ( $x + 2$ );
- (2) una reflexión respecto al eje  $x$  (signo negativo delante del cuadrado);
- (3) una traslación 1 unidad hacia arriba (el  $+1$  final).



Composición de transformaciones: traslación, reflexión y traslación vertical.

Enumeramos a continuación las operaciones algebraicas que podemos hacer con dos funciones definidas en un subconjunto  $A \subset \mathbb{R}$  no vacío. Para ello, definimos  $\mathcal{F}(A)$  como el conjunto de todas las funciones  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definición 4.8.** Para cualesquiera  $f, g \in \mathcal{F}(A)$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ , definimos las siguientes operaciones:

- (1) **Suma:**  $f + g \in \mathcal{F}(A)$ , siendo  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ ,  $\forall x \in A$ .
- (2) **Producto:**  $fg \in \mathcal{F}(A)$ , siendo  $(fg)(x) = f(x)g(x)$ ,  $\forall x \in A$ .
- (3) **Producto por escalares:**  $\alpha f \in \mathcal{F}(A)$ , siendo  $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ ,  $\forall x \in A$ .
- (4) **Cociente:** Si  $g(x) \neq 0$  para todo  $x \in A$ , entonces  $f/g \in \mathcal{F}(A)$ , con

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \forall x \in A.$$

Las propiedades de la suma y producto de números reales se traslada inmediatamente a la de funciones. La suma de funciones es asociativa y distributiva, y tiene como elemento neutro a la función  $x \mapsto 0$  para todo  $x \in A$ . Además, toda  $f \in \mathcal{F}(A)$  tiene una función opuesta,  $-f$ . El producto por su parte es asociativo, conmutativo y distributivo respecto de la suma, y además posee el elemento neutro  $x \mapsto 1$  para todo  $x \in A$ . Así pues,  $(\mathcal{F}(A), +, \cdot)$  es un anillo conmutativo con unidad.

Para  $\alpha \in \mathbb{R}$ , a menudo interpretaremos  $\alpha$  como la función que vale constantemente  $\alpha$ , esto es,  $f_\alpha : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_\alpha(x) = \alpha$ . En particular, escribimos  $f = 0$  para decir que  $f(x) = 0$  para todo  $x \in A$ , y por  $f \neq 0$  entendemos que existe un  $x \in A$  tal que  $f(x) \neq 0$ .

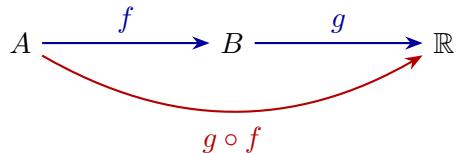
Entonces, el producto por escalares no es más que un caso particular del producto de funciones, aunque conviene resaltar que (1) y (3) dotan a  $\mathcal{F}(A)$  de estructura de *espacio vectorial* (de dimensión infinita).

Si  $f(x) \neq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f$  tiene una inversa para el producto; la función  $1/f$ . Sin embargo, salvo en el caso trivial en que  $A$  es un solo punto, esta condición es más fuerte que  $f \neq 0$ . Por tanto  $\mathcal{F}(A)$ , en general, no es un cuerpo.

Preferimos evitar la notación  $f^{-1}$  para referirnos a la función  $1/f$ , ya que esta se reserva para la función inversa respecto a la composición de funciones.

**Definición 4.9.** Sean  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$  funciones tales que  $f(A) \subset B$ . Definimos la composición de  $f$  con  $g$  como la función  $g \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad \forall x \in A.$$



**Ejemplo:** consideremos la función valor absoluto  $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $V(x) = |x|$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Para cualquier función  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  se tiene trivialmente que  $f(A) \subset \mathbb{R}$ , lo que nos permite considerar la función compuesta

$$(V \circ f)(x) = V(f(x)) = |f(x)|, \quad \forall x \in A,$$

que se suele denotar por  $|f|$ .

### Ejemplo

**Problema.** Consideremos las funciones  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por  $f(x) = |x|$ ,  $g(x) = x^3 - x$ . Comprobemos que  $(f \circ g) \neq (g \circ f)$ .

**Resolución.** Calculamos:

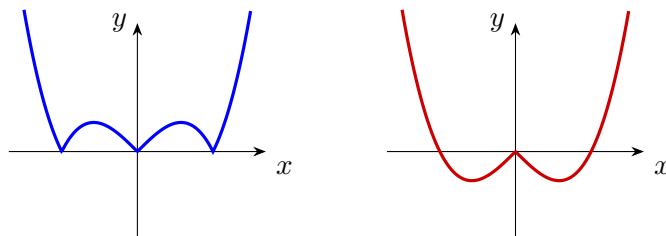
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = |x^3 - x|, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = |x|^3 - |x|.$$

A primera vista las expresiones son parecidas, pero no coinciden. Por ejemplo, para  $x = -\frac{1}{2}$ :

$$(f \circ g)(-\frac{1}{2}) = |(-\frac{1}{2})^3 + \frac{1}{2}| = \frac{3}{8}, \quad (g \circ f)(-\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^3 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{8}.$$

Si representamos ambas composiciones vemos de forma más clara las diferencias:

$$(f \circ g)(x) = |x^3 - x| \quad (g \circ f)(x) = |x|^3 - |x|$$

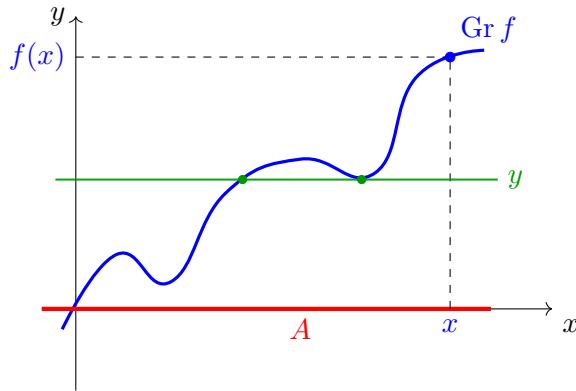


En conclusión, el orden en que se componen las funciones es esencial: aunque ambas composiciones tengan sentido, generalmente  $(f \circ g) \neq (g \circ f)$ .

**Definición 4.10.** Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Recordamos que  $f$  es **inyectiva** si nunca toma el mismo valor en dos puntos distintos del conjunto  $A$ , es decir, si se verifica que

$$x, y \in A, \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

Si  $f : A \rightarrow B$  es una función inyectiva, entonces la ecuación  $y = f(x)$  tiene una única solución (en  $x$ ), lo que se traduce gráficamente en que cada recta horizontal a altura  $y \in f(A)$  interseca a  $\text{Gr } f$  en un solo punto.



Gráfica de una función no inyectiva.

**Definición 4.11.** Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una función inyectiva. Entonces  $f$  puede considerarse como una aplicación biyectiva de  $A$  sobre  $f(A)$ , y podemos definir su **función inversa**

$$f^{-1} : f(A) \rightarrow A,$$

asociando a cada  $y \in f(A)$  el único  $x \in A$  que cumple  $f(x) = y$ , es decir,

$$f^{-1}(y) = x \quad \text{tal que} \quad f(x) = y.$$

Obsérvese que tiene sentido considerar las composiciones  $f^{-1} \circ f$  y  $f \circ f^{-1}$ , y se verifica, por definición:

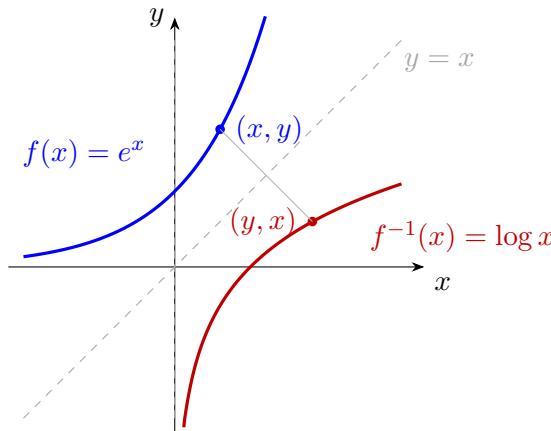
$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \forall x \in A, \quad \text{y} \quad (f \circ f^{-1})(y) = y \quad \forall y \in f(A).$$

Las igualdades anteriores suelen leerse diciendo que  $f^{-1} \circ f$  es la **función identidad** en  $A$ , y  $f \circ f^{-1}$  la identidad en  $f(A)$ . Además,  $f^{-1}$  también es inyectiva y su inversa es la función original, es decir,

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

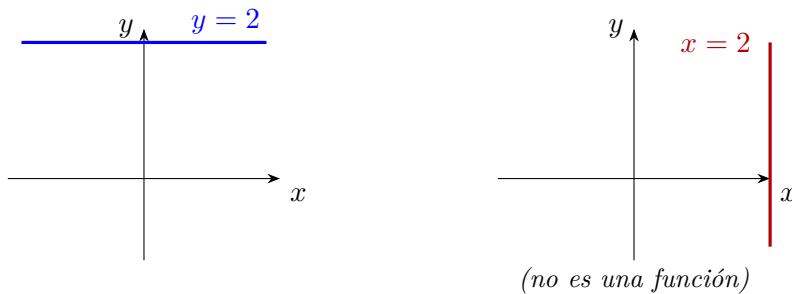
Cuando  $f^{-1}$  existe, su gráfica es la imagen especular de la gráfica de  $f$  respecto a la bisectriz del primer cuadrante de  $\mathbb{R}^2$ , esto es, la recta de ecuación  $y = x$ .

Para comprobarlo, basta darse cuenta de que  $y = f(x) \iff f^{-1}(y) = x$ . En particular, si el punto  $(x, y)$  pertenece a la gráfica de  $f$ , entonces el punto  $(y, x)$  pertenece a la gráfica de  $f^{-1}$ .



Las gráficas de  $f$  y  $f^{-1}$  son simétricas respecto a la recta  $y = x$ .

La simetría deja claro que la inversa no siempre existe como función. Por ejemplo, si  $f(x) = 2$ , su gráfica es la recta horizontal  $y = 2$ ; reflejada respecto a  $y = x$  se obtiene la recta vertical  $x = 2$ , que no es la gráfica de ninguna función  $y = h(x)$ .



## 4.2 Funciones continuas

Intuitivamente, una función  $f$  será continua en un punto  $x$  cuando, al acercarnos a  $x$ , los valores de la función se acerquen a  $f(x)$ . Como veremos, esta noción admite varias formulaciones equivalentes, siendo la más manejable la de acercarnos a  $x$  a través de una sucesión  $\{x_n\} \rightarrow x$ .

**Definición 4.12.** Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $x \in A$ . Decimos que  $f$  es *continua* en  $x$  si para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que, si  $y \in A$  verifica  $|y - x| < \delta$ , entonces  $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ . Es decir,

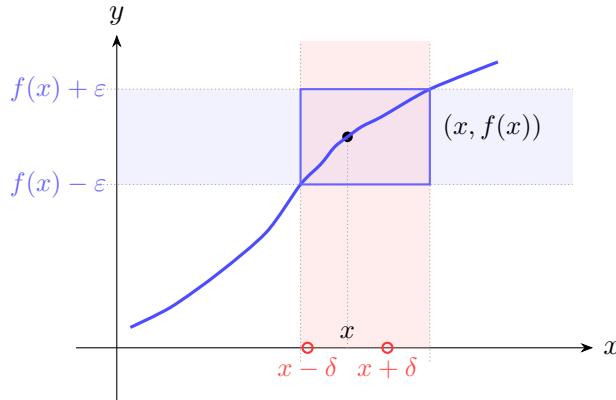
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : y \in A, |y - x| < \delta \implies |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Obsérvese que **no tiene sentido hablar de la continuidad de una función en puntos que no están en  $A$** .

Si  $\emptyset \neq B \subset A$ , diremos que  $f$  es *continua en  $B$*  si  $f$  es continua todo punto de  $B$ . En particular, diremos simplemente que  $f$  es *continua* cuando sea continua en  $A$ .

### Interpretación geométrica de la continuidad.

Fijados  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  y  $x \in A$ , para cada  $\varepsilon > 0$  consideramos la *banda horizontal* entre las rectas  $y = f(x) - \varepsilon$  y  $y = f(x) + \varepsilon$ . La condición de continuidad afirma que, por estrecha que sea esa banda, existe un  $\delta > 0$  tal que la parte de la gráfica de  $f$  correspondiente a los puntos  $y \in A$  con  $|y - x| < \delta$  queda *entera* dentro de la banda. Es decir, el trozo de gráfica sobre el intervalo  $(x - \delta, x + \delta) \cap A$  se mantiene entre  $f(x) - \varepsilon$  y  $f(x) + \varepsilon$ .



**Proposición 4.13** (Caracterización secuencial de la continuidad). Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  y fijemos  $x \in A$ . Son equivalentes:

- (i)  $f$  es continua en el punto  $x$ .
- (ii) Para toda sucesión  $\{x_n\}$  con  $x_n \in A$  y  $\{x_n\} \rightarrow x$ , se tiene  $\{f(x_n)\} \rightarrow f(x)$ . A esta propiedad se le suele dar el nombre de *continuidad secuencial*.
- (iii) Para toda sucesión *monótona*  $\{x_n\}$  de puntos de  $A$ , con  $\{x_n\} \rightarrow x$ , se tiene  $\{f(x_n)\} \rightarrow f(x)$ .

### Demostración

**(i)  $\Rightarrow$  (ii).** Sea  $\{x_n\} \subset A$  con  $x_n \rightarrow x$ . Debemos ver que  $f(x_n) \rightarrow f(x)$ . Sea  $\varepsilon > 0$ ; por (i) existe  $\delta > 0$  tal que  $|y - x| < \delta$  implica  $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ . Como  $x_n \rightarrow x$ , existe  $m \in \mathbb{N}$  con  $|x_n - x| < \delta$  para todo  $n \geq m$ . En consecuencia, para  $n \geq m$ ,

$$|f(x_n) - f(x)| < \varepsilon.$$

Esto prueba que  $f(x_n) \rightarrow f(x)$ .

**(ii)  $\Rightarrow$  (iii).** Es inmediato: si (i) vale para *toda* sucesión de puntos de  $A$  que converge a  $x$ , entonces en particular vale para las sucesiones monótonas.

**(iii)  $\Rightarrow$  (i).** Demostraremos el contrarrecíproco: si (i) *no* se verifica, entonces tampoco puede cumplirse (iii).

Si (i) es falso, entonces existe  $\varepsilon_0 > 0$  tal que, para todo  $\delta > 0$ , se puede encontrar  $y \in A$  con  $|y - x| < \delta$  y, sin embargo,  $|f(y) - f(x)| \geq \varepsilon_0$ .

Para cada  $n \in \mathbb{N}$  tomamos  $\delta = \frac{1}{n}$  y obtenemos un  $y_n \in A$  tal que

$$|y_n - x| < \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad |f(y_n) - f(x)| \geq \varepsilon_0.$$

Entonces  $\{y_n\} \rightarrow x$ . Sea  $\{x_n\}$  una subsucesión monótona de  $\{y_n\}$ , que existe por el lema del sol naciente. Se sigue que  $\{x_n\} \rightarrow x$  y

$$|f(x_n) - f(x)| \geq \varepsilon_0 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por tanto,  $\{f(x_n)\}$  *no* converge a  $f(x)$ . ■

La caracterización de la continuidad (ii) nos permite dar de forma inmediata los primeros ejemplos de funciones continuas.

**Primeros ejemplos.**

- Las *funciones constantes*  $f(x) = \alpha$ , con  $\alpha \in \mathbb{R}$ , son continuas.
- La *función identidad* en  $A$ , dada por  $f(x) = x$  para todo  $x \in A$ , también es continua.
- La función *valor absoluto* es continua. Si  $\{x_n\} \rightarrow x$ , entonces  $\{|x_n|\} \rightarrow |x|$ .

**Proposición 4.14.** Sean  $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$  funciones continuas en un conjunto no vacío  $B \subset A$ . Entonces  $f + g$  y  $fg$  son continuas en  $B$ . Si además  $g(x) \neq 0$  para todo  $x \in A$ , el cociente  $f/g$  es continuo en  $B$ .

**Demostración**

Sea  $x \in B$  y  $\{x_n\} \subset A$  una sucesión tal que  $x_n \rightarrow x$ . Por la continuidad de  $f$  y  $g$  en  $x$ ,

$$f(x_n) \rightarrow f(x) \quad \text{y} \quad g(x_n) \rightarrow g(x).$$

Entonces:

(1) Para la suma,

$$\{(f + g)(x_n)\} = \{f(x_n) + g(x_n)\} \longrightarrow f(x) + g(x) = (f + g)(x).$$

(2) Para el producto,

$$\{(fg)(x_n)\} = \{f(x_n)g(x_n)\} \longrightarrow f(x)g(x) = (fg)(x).$$

(3) Para el cociente,

$$\left\{\frac{f}{g}(x_n)\right\} = \left\{\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\right\} \longrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f}{g}(x).$$

■

Este resultado nos permite construir numerosas funciones continuas:

**Ejemplos:**

- Toda función polinómica  $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ , con  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_k \in \mathbb{R}$  para todo  $k = 0, \dots, n$  y  $a_n \neq 0$ , es continua en  $\mathbb{R}$ .
- Si  $p$  y  $q$  son funciones polinómicas con  $q \neq 0$ , entonces la función racional  $f = \frac{p}{q}$  es continua en su dominio natural de definición  $\{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$ .

Comprobamos ahora la continuidad de la composición.

**Proposición 4.15.** Sean  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g: C \rightarrow \mathbb{R}$  funciones tales que  $f(A) \subset C$ . Si  $f$  es continua en  $x \in A$  y  $g$  es continua en  $f(x) \in f(A)$ , la composición  $g \circ f$  es continua en  $x$ .

En particular, si  $f$  es continua en un subconjunto no vacío  $B \subset A$  y  $g$  es continua en  $g(B)$ , entonces  $g \circ f$  es continua en  $B$ .

**Demostración**

Sea  $x \in B$  y  $\{x_n\} \subset A$  una sucesión con  $x_n \rightarrow x$ . Por ser  $f$  continua en  $x$ , tenemos  $f(x_n) \rightarrow f(x)$ ; por tanto  $\{f(x_n)\}$  es una sucesión de puntos de  $C$  que converge a  $f(x)$ . Como  $g$  es continua en  $f(x) \in f(B)$ , concluimos que

$$\{g(f(x_n))\} \rightarrow g(f(x)).$$

Esto prueba que  $g \circ f$  es continua en  $x$ , y como  $x \in B$  era arbitrario, en todo  $B$ . ■

El recíproco **no es cierto en general**: puede ocurrir que  $g \circ f$  sea continua y, sin embargo,  $f$  o  $g$  no lo sean.

Para verlo, construimos una función extremadamente discontinua: definimos  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & x \in \mathbb{I}. \end{cases} \quad (4.1)$$

Dado  $x \in \mathbb{R}$ , la densidad de  $\mathbb{Q}$  y de  $\mathbb{I}$  en  $\mathbb{R}$  nos permiten construir sucesiones  $\{q_n\} \subset \mathbb{Q}$  y  $\{r_n\} \subset \mathbb{I}$  con  $\{q_n\} \rightarrow x$  y  $\{r_n\} \rightarrow x$  (esto puede verificarse como **ejercicio**).

Entonces  $\{f(q_n)\} \rightarrow -1$  y  $\{f(r_n)\} \rightarrow 1$ ; si  $f$  fuese continua en  $x$  tendríamos necesariamente  $-1 = 1$ , contradicción. Así,  $f$  no es continua en ningún punto de  $\mathbb{R}$ .

Podemos observar que  $|f| = 1$ , lo que nos da una composición continua sin que  $f$  lo sea.

**Función de Thomae.** Definimos  $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$T(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \text{ con } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \text{ y } \text{mcd}(|p|, q) = 1, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

(Obsérvese que la condición  $\text{mcd}(0, q) = 1$  implica necesariamente que  $T(0) = 1$ ).

Se tiene que  $T$  es continua en  $\mathbb{I}$  y discontinua en  $\mathbb{Q}$ .

**Continuidad en los irracionales.** Sea  $x \in \mathbb{I}$  y  $\varepsilon > 0$ . Elegimos un  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ . Puede comprobarse sin dificultad que en el intervalo  $(x - 1, x + 1)$  hay, como mucho, una cantidad finita de racionales de la forma  $p/q$  con  $0 < q \leq n_0$ . Esto nos permite tomar un  $\delta > 0$ , suficientemente pequeño, de forma que

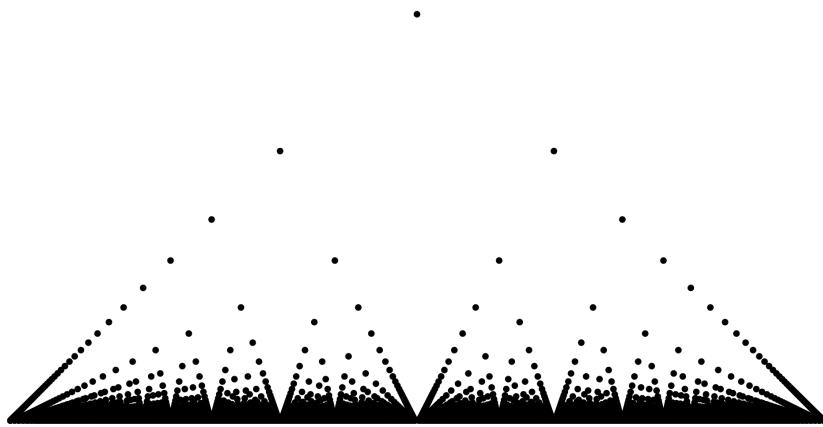
$$(x - \delta, x + \delta) \cap \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} : 0 < q \leq n_0 \right\} = \emptyset.$$

(En efecto, podemos tomar como  $\delta$  la mitad de la distancia al racional más cercano a  $x$  de la forma  $p/q$  con  $0 < q \leq n_0$ .) Sea entonces  $y \in \mathbb{R}$  con  $|y - x| \leq \delta$ . Si  $y$  es irracional, entonces  $|T(y) - T(x)| = 0 < \varepsilon$  trivialmente. Si  $y = \frac{p}{q}$  es racional, tenemos necesariamente  $q > n_0$ , lo que nos da

$$|T(y) - T(x)| = \frac{1}{q} < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Esto demuestra que  $T$  es continua en  $x$ .

**Discontinuidad en los racionales.** Sea  $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  en forma irreducible. Tomando cualquier sucesión de irracionales  $\{x_n\} \rightarrow x$ , se tiene  $T(x_n) = 0$  para todo  $n$ , luego  $\{T(x_n)\} \rightarrow 0 \neq \frac{1}{q} = T(x)$ . Por la caracterización secuencial de la continuidad,  $T$  no es continua en  $x$ .



Fuente: Wikipedia, [https://en.wikipedia.org/wiki/Thomae%27s\\_function](https://en.wikipedia.org/wiki/Thomae%27s_function).

El matemático inglés John H. Conway dotó a esta función del nombre *Estrellas sobre Babilonia* debido a la forma de su gráfica.

**Ejercicio:** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ -x & \text{si } x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

Estudiar en qué puntos de  $\mathbb{R}$  es continua  $f$ .

La continuidad de una función  $f$  es una característica de las que llamaremos *locales*, es decir, para estudiar si  $f$  es continua en  $x$ , solo nos interesan los valores que toma  $f$  cerca de  $x$ . Para formalizar esto, necesitamos la siguiente definición:

**Definición 4.16.** Sean  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\emptyset \neq B \subset A$ . La *restricción* de  $f$  a  $B$  es la función  $f|_B : B \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$(f|_B)(x) = f(x), \quad \forall x \in B.$$

En este contexto, también suele decirse que  $f$  es una *extensión* de  $g$ .

**Proposición 4.17 (Carácter local de la continuidad).** Sean  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\emptyset \neq B \subset A$  y  $x \in B$ .

- (1) Si  $f$  es continua en  $x$ , entonces  $f|_B$  también es continua en  $x$ .
- (2) Si existe  $\delta > 0$  tal que  $(x - \delta, x + \delta) \cap A \subset B$ , y  $f|_B$  es continua en  $x$ , entonces  $f$  es continua en  $x$ .

**Demostración**

- (1) Sea  $\{x_n\} \subset B$  con  $x_n \rightarrow x$ . Entonces  $\{x_n\} \subset A$  y, por la continuidad de  $f$  en  $x$ , se tiene  $f(x_n) \rightarrow f(x)$ . Como  $(f|_B)(x_n) = f(x_n)$ , concluimos  $(f|_B)(x_n) \rightarrow (f|_B)(x)$ .
- (2) Sea ahora  $\{x_n\} \subset A$  con  $x_n \rightarrow x$ . Por la definición de convergencia, existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que para  $n \geq m$  se cumple  $|x_n - x| < \delta$ , luego  $x_n \in (x - \delta, x + \delta) \cap A \subset B$ . Usando la continuidad de  $f|_B$  en  $x$ , obtenemos

$$n \geq m, \quad f(x_n) = (f|_B)(x_n) \longrightarrow (f|_B)(x) = f(x).$$

Así,  $f$  es continua en  $x$ . ■

**Nota:** La hipótesis adicional en (2) no puede eliminarse; dicho de otro modo, el recíproco de (1) es falso en general.

Para comprobar esto, basta considerar la función  $f$  definida en (4.1) y  $B = \{x\}$  para cualquier  $x \in \mathbb{R}$ .  $f|_B$  es trivialmente continua, pero  $f$  no es continua en  $x$  para ningún  $x \in \mathbb{R}$ .

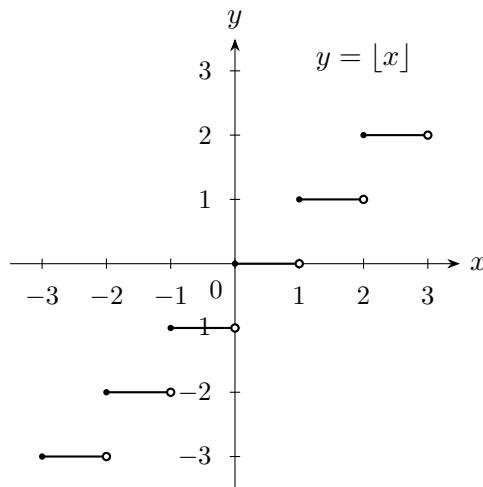
Este resultado es especialmente útil para estudiar funciones cuya definición  $f(x)$  cambia a lo largo de su conjunto de definición.

**Ejemplo**

**Problema.** Estudiar la continuidad de la función *parte entera*

$$\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} : z \leq x\}$$



**Resolución.** En primer lugar, veamos que  $\lfloor \cdot \rfloor$  es discontinua en todo  $x \in \mathbb{Z}$ . Para esto, basta considerar la sucesión  $x_n = x - \frac{1}{2n}$ , ya que  $\{x_n\} \rightarrow x$  y  $\lfloor x_n \rfloor = x - 1$  para todo  $n$ , luego  $\{\lfloor x_n \rfloor\} \rightarrow x - 1 \neq \lfloor x \rfloor$ .

Sea ahora  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ , y definamos  $B = (\lfloor x \rfloor, \lfloor x + 1 \rfloor)$ . Claramente  $x \in B$  y si tomamos

$0 < \delta < \min\{\lfloor x+1 \rfloor - x, x - \lfloor x \rfloor\}$ , se tiene

$$(x - \delta, x + \delta) \cap \mathbb{R} \subset B.$$

Por el carácter local de la continuidad, si  $\lfloor \cdot \rfloor|_B$  es continua en  $x$ , lo será también  $\lfloor \cdot \rfloor$ . La primera lo es, ya que es constantemente igual a  $\lfloor x \rfloor$ , esto es:

$$\lfloor y \rfloor = \lfloor x \rfloor \quad \forall y \in B.$$

Por tanto,  $\lfloor \cdot \rfloor$  es continua en  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ .

**Ejercicio:** Estudiar la continuidad de las funciones  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por

$$f(x) = \lfloor x^2 \rfloor \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

### Ejemplo

**Problema.** Sean  $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funciones continuas tales que  $g(0) = h(0)$ . Definimos

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x \leq 0, \\ h(x), & x \geq 0. \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de  $f$  en  $\mathbb{R}$ .

**Resolución.** Notamos primero que  $f|_{\mathbb{R}_0^+} = h$  y  $f|_{\mathbb{R}_0^-} = g$ , por lo que  $f$  es continua en  $\mathbb{R}^+$  y en  $\mathbb{R}^-$  por el carácter local de la continuidad.

Queda  $x = 0$ . Tomemos una sucesión  $\{x_n\} \rightarrow 0$ . Por la caracterización secuencial con sucesiones monótonas, podemos suponer que  $\{x_n\}$  es monótona.

Si  $\{x_n\}$  es creciente, entonces  $x_n \leq 0 \ \forall n$ , y por tanto  $\{f(x_n)\} = \{g(x_n)\} \rightarrow g(0) = f(0)$ .

Si  $\{x_n\}$  es decreciente, entonces  $x_n \geq 0 \ \forall n$ , y  $\{f(x_n)\} = \{h(x_n)\} \rightarrow h(0) = f(0)$ .

En ambos casos  $\{f(x_n)\} \rightarrow f(0)$ , luego  $f$  es continua en 0. Concluimos que  $f$  es continua en todo  $\mathbb{R}$ .

## 4.3 Límite funcional

En esta sección estudiaremos el comportamiento de una función al acercarnos a un punto de la recta real, que no necesariamente pertenecerá al dominio de la función. Solo necesitaremos que, desde el conjunto en el que trabajamos, podamos acercarnos a dicho punto sin pasar por él.

**Definición 4.18.** Sea  $A \subset \mathbb{R}$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Diremos que  $\alpha$  es *punto de acumulación* de  $A$  (o que  $A$  *se acumula* en  $\alpha$ ) si para todo  $\delta > 0$  se verifica

$$(\alpha - \delta, \alpha + \delta) \cap (A \setminus \{\alpha\}) \neq \emptyset.$$

Intuitivamente,  $\alpha \in \mathbb{R}$  es un punto de acumulación de  $A$  si existen puntos de  $A$  distintos de  $\alpha$  arbitrariamente cerca de  $\alpha$ .

Denotaremos  $A' = \{\alpha \in \mathbb{R} : A \text{ se acumula en } \alpha\}$ .

Los puntos de acumulación de  $A$  se caracterizan por ser puntos de  $\mathbb{R}$  a los que se puede llegar mediante sucesiones de  $A$  que no pasen por dicho punto.

**Proposición 4.19.** Sea  $A \subset \mathbb{R}$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Entonces

$$\alpha \in A' \iff \exists \{x_n\} \subset A \setminus \{\alpha\} \text{ tal que } \{x_n\} \rightarrow \alpha.$$

### Demostración

- ( $\Rightarrow$ ) Supongamos  $\alpha \in A'$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$  tomamos  $\delta = \frac{1}{n}$ . Por la definición, existe  $x_n \in (\alpha - \frac{1}{n}, \alpha + \frac{1}{n}) \cap (A \setminus \{\alpha\})$ , luego  $0 < |x_n - \alpha| < \frac{1}{n}$ , y por tanto  $\{x_n\} \rightarrow \alpha$ .
- ( $\Leftarrow$ ) Si existe  $\{x_n\} \subset A \setminus \{\alpha\}$  con  $\{x_n\} \rightarrow \alpha$ , dado  $\delta > 0$  podemos escoger  $m$  tal que  $|x_m - \alpha| < \delta$ . Entonces  $x_m \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta) \cap (A \setminus \{\alpha\})$ , luego la intersección es no vacía para todo  $\delta > 0$ . Así,  $\alpha \in A'$ . ■

Pasamos a calcular los puntos de acumulación de un intervalo real.

**Proposición 4.20.** Sea  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo. Entonces:

- (1) Si  $I = \emptyset$  o  $I = \{a\}$  es un punto, entonces  $I' = \emptyset$ .
- (2) Si  $I$  es un intervalo no trivial (contiene al menos dos puntos), entonces:

$$\begin{aligned} (a, b)' &= (a, b)' = [a, b)' = [a, b]' = [a, b] \\ (a, +\infty)' &= [a, +\infty)' = [a, +\infty) \\ (-\infty, b)' &= (-\infty, b)' = (-\infty, b] \\ \mathbb{R}' &= \mathbb{R}. \end{aligned}$$

### Demostración

*Esta demostración no se vio en clase.*

- (1) Es claro: si  $I = \emptyset$  no hay puntos en  $I$ ; si  $I = \{a\}$ , ningún punto  $\alpha \neq a$  puede ser de acumulación, ya que todas las sucesiones de puntos de  $I$  convergen a  $a$ . Además,  $a \notin I'$ , ya que  $I \setminus \{a\} = \emptyset$ .
- (2) Sea  $I$  un intervalo no trivial, esto es, un intervalo que contiene al menos dos puntos. Empezaremos probando que todos los puntos de  $I$  son de acumulación, esto es,  $I \subset I'$ . Dado  $x \in I$ , existe  $y \in I$  con  $y \neq x$ . Para  $0 < \delta < |y - x|$  se tiene

$$(x - \delta, x + \delta) \cap (I \setminus \{x\}) \neq \emptyset,$$

ya que todos los puntos entre  $x$  e  $y$  pertenecen a  $I$ . Esto nos da que  $x \in I'$ . Como consecuencia inmediata tenemos  $\mathbb{R}' = \mathbb{R}$ .

A continuación, demostraremos que si  $I$  está acotado y  $a = \inf I$ ,  $b = \sup I$ , entonces  $a, b \in I'$ . Por tanto, tendremos  $[\alpha, \beta] \subset I'$ .

Por definición de intervalo,  $(a, b) \subset I$ , lo que nos da que para  $0 < \delta < \beta - \alpha$  se tiene

$$(a, a + \delta) \cap I \neq \emptyset,$$

luego  $\alpha \in I'$ . Un razonamiento análogo nos da  $\beta \in I'$ .

Recíprocamente, probemos que  $I' \subset [a, b]$ .

Sea  $x \in I'$ , y  $\{x_n\} \subset I \setminus \{x\}$  una sucesión con  $\{x_n\} \rightarrow x$ . Puesto que  $a \leq x_n \leq b$  para todo  $n$ , pasando al límite tenemos  $a \leq x \leq b$ , luego  $x \in [a, b]$ , como queríamos.

Si  $I$  es una semirecta (abierta o cerrada), un argumento análogo muestra que  $I'$  está contenido en la correspondiente semirecta cerrada. ■

Una regla sencilla que nos permite simplificar el cálculo de los puntos de acumulación de un conjunto es la siguiente:

**Proposición 4.21.** Para  $A, B \subset \mathbb{R}$  se tiene  $(A \cup B)' = A' \cup B'$ . ■

El ejemplo de los intervalos muestra que, en general, no existe una relación de inclusión entre  $A$  y  $A'$ . Pueden existir puntos de acumulación de  $A$  que no sean elementos de  $A$  y puntos de  $A$  que no sean de acumulación. A los segundos se les da el nombre de *puntos aislados*, que describe de forma muy clara a qué tipo de puntos de  $A$  nos referimos.

**Definición 4.22.** Dado  $A \subset \mathbb{R}$  no vacío, decimos que  $x \in A$  es un *punto aislado* de  $A$  si  $x \notin A'$ .

De forma manifiesta, toda función  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en todo punto aislado  $x \in A \setminus A'$ , ya que la única forma de acercarnos arbitrariamente a  $x$  es a través de la sucesión constantemente igual a  $x$ .

**Proposición 4.23.** Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una función y  $x \in A \setminus A'$ . Entonces  $f$  es continua en  $x$ .

### Demostración

Puesto que  $x \notin A'$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $(x - \delta, x + \delta) \cap A = \{x\}$ . Entonces, dado  $\varepsilon > 0$ , es claro que si  $y \in A$  es tal que  $|y - x| < \delta$ , entonces  $y = x$ . Por tanto,

$$|f(y) - f(x)| = 0 < \varepsilon.$$

■

**Definición 4.24.** Sea  $A \subset \mathbb{R}$  y  $\alpha \in A'$ . Decimos que  $f$  tiene límite  $L \in \mathbb{R}$  en el punto  $\alpha$  si para todo  $\varepsilon > 0$  puede encontrarse un  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x \in A \setminus \{\alpha\}$  con  $|x - \alpha| < \delta$  se tiene  $|f(x) - L| < \varepsilon$ . Simbólicamente,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : (x \in A, 0 < |x - \alpha| < \delta) \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

En tal caso escribimos

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = L, \quad \text{o} \quad f(x) \rightarrow L \quad (x \rightarrow \alpha).$$

**Nota:** Esta definición de límite no es buena si  $\alpha \notin A'$ , ya que en ese caso existe un  $\delta_0 > 0$  tal que

$$\{x \in A : 0 < |x - \alpha| < \delta_0\} = \emptyset.$$

Por lo tanto, para **cualquier** valor  $L \in \mathbb{R}$ ,  $\delta_0$  hace cierta la condición de límite ( $0 < |x - \alpha| < \delta_0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ ), pues esta debe ser verificada para un conjunto vacío de puntos. Esta observación se apoya en un hecho básico de la lógica proposicional, a saber,

$$p \rightarrow q \iff \neg p \vee q,$$

y en este caso siempre tenemos  $\neg p$ . Esto puede resultar extraño, pues en matemáticas acostumbramos a probar la implicación  $p \rightarrow q$  partiendo de que  $p$  es cierta, y rara vez contemplamos la posibilidad de que la premisa sea falsa.

Aceptando esta definición para  $\alpha \notin A'$ , podríamos probar atrocidades contra el sentido común como

$$\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{x} = 27, \quad \text{o también que } \lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{x} = -8,$$

perdiendo de vista la noción intuitiva de acercarnos al punto  $\alpha$  a través de puntos de  $A \setminus \{\alpha\}$ , además de propiedades fundamentales como la unicidad del límite.

Nótense las diferencias con la definición de continuidad en  $x$ : en primer lugar, podemos calcular el valor del límite de  $f$  en puntos que no están en el dominio de definición de  $f$ . Aunque tuviéramos definido  $f(\alpha)$ , este no influye en la existencia del límite ni en su valor. Por otro lado, no tiene sentido hablar de límite en los puntos aislados de  $A$ , pero sí de continuidad. De hecho, como vimos anteriormente, toda función es continua en los puntos aislados de su dominio.

Al igual que la continuidad, el límite puede caracterizarse mediante sucesiones monótonas. La demostración es completamente análoga a la que se hizo para la continuidad, y la omitiremos en aras de la brevedad.

**Proposición 4.25** (Caracterización secuencial del límite funcional). Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una función,  $\alpha \in A'$  y  $L \in \mathbb{R}$ . Son equivalentes:

- (i)  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = L$ .
- (ii) Para toda sucesión  $\{x_n\} \subset A \setminus \{\alpha\}$  con  $\{x_n\} \rightarrow \alpha$ , se tiene  $\{f(x_n)\} \rightarrow L$ .
- (iii) Para toda sucesión *monótona*  $\{x_n\} \subset A \setminus \{\alpha\}$  tal que  $\{x_n\} \rightarrow \alpha$ , se tiene  $\{f(x_n)\} \rightarrow L$ .

La similitud entre las definiciones de continuidad y de límite se concreta en el siguiente hecho elemental.

**Proposición 4.26.** Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  y  $a \in A \cap A'$ . Entonces  $f$  es continua en  $a$  si, y sólo si,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

### Demostración

( $\Rightarrow$ ) Si  $f$  es continua en  $a$ , para cualquier sucesión  $\{x_n\} \subset A \setminus \{a\}$  con  $\{x_n\} \rightarrow a$  se tiene  $\{f(x_n)\} \rightarrow f(a)$ . Por la caracterización secuencial del límite, esto es equivalente

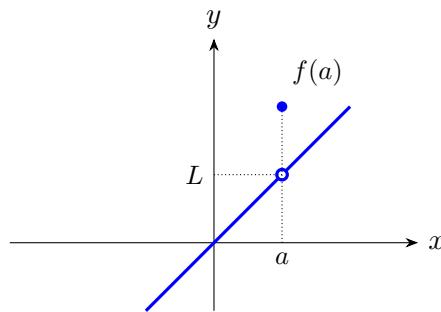
a decir que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

( $\Leftarrow$ ) Recíprocamente, si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ , entonces para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ . La desigualdad sigue siendo cierta si permitimos  $x = a$ , luego  $f$  es continua en  $a$ .  $\blacksquare$

Esta equivalencia nos permite identificar un primer tipo de discontinuidades: aquellas en las que existe el valor del límite en  $a \in A \cap A'$  pero no coincide con  $f(a)$ . En este caso, redefiniendo  $f(a)$  puede hacerse que la función  $f$  sea continua, lo que les da el nombre de discontinuidades evitables.

**Definición 4.27.** Decimos que  $f$  tiene una *discontinuidad evitable* en  $a \in A \cap A'$  cuando existe el límite  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  pero  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$ .



Queda por ver el caso en que  $\alpha \in A' \setminus A$ . Aunque no tengamos  $f$  definida en  $\alpha$ , la existencia de límite nos permite extender su definición a dicho punto, y la función resultante, además, es continua en  $\alpha$ .

**Proposición 4.28.** Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\alpha \in A' \setminus A$ . Son equivalentes:

(i)  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$  existe.

(ii) La extensión

$$\tilde{f} : A \cup \{\alpha\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A, \\ \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) & \text{si } x = \alpha. \end{cases}$$

es continua en  $\alpha$ .

### Demostración

(i)  $\Rightarrow$  (ii). Basta aplicar la proposición anterior en  $\alpha$ , ya que

$$\tilde{f}(\alpha) = \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} \tilde{f}(x).$$

(ii)  $\Rightarrow$  (i). Sea  $\{x_n\} \subset A$  (no hace falta eliminar  $\alpha$  porque  $\alpha \notin A$ ) con  $\{x_n\} \rightarrow \alpha$ . Por continuidad de  $\tilde{f}$  en  $\alpha$ ,

$$\{f(x_n)\} = \{\tilde{f}(x_n)\} \rightarrow \tilde{f}(\alpha),$$

y la caracterización secuencial del límite da que  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$  existe y es  $\tilde{f}(\alpha)$ .  $\blacksquare$

A modo de resumen de lo probado anteriormente, enunciamos una proposición que recoge la relación que existe entre límites y continuidad.

**Proposición 4.29.** Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una función e  $y \in A \cup A'$ .

- Si  $y \in A \cap A'$ ,  $f$  es continua en  $y \iff \lim_{x \rightarrow y} f(x) = f(y)$ .
- Si  $y \in A \setminus A'$ ,  $f$  siempre es continua en  $f(y)$ .
- Si  $y \in A' \setminus A$ , existe  $\lim_{x \rightarrow y} f(x) \iff f$  puede extenderse de forma continua a  $y$ .

■

Al igual que la continuidad, el límite es una propiedad local de  $f$ . Esta establece que la existencia y el valor del límite de una función en un punto  $\alpha \in A'$  solo dependen de los puntos de

$$(\alpha - \delta, \alpha + \delta) \cap (A \setminus \{\alpha\}),$$

para  $\delta > 0$  arbitrario.

**Proposición 4.30** (Carácter local del límite). Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $B \subset A$  y  $\beta \in B'$ . Entonces:

- (i) Si  $f$  tiene límite en  $\beta$ , también lo tiene  $f|_B$  en  $\beta$  y ambos coinciden:

$$\lim_{x \rightarrow \beta} (f|_B)(x) = \lim_{x \rightarrow \beta} f(x).$$

- (ii) Si existe  $\delta > 0$  tal que  $(\beta - \delta, \beta + \delta) \cap (A \setminus \{\beta\}) \subset B$ , y  $f|_B$  tiene límite en  $\beta$ , entonces  $f$  tiene límite en  $\beta$  y ambos coinciden.

### Demostración

*Esta demostración no se vio en clase.*

(i) Sea  $L = \lim_{x \rightarrow a} f$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , si  $(0 < |x - \beta| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$  se cumple para todo punto  $x \in A$ , entonces en particular también para todo punto  $x \in B$ .

(ii) Sea  $L = \lim_{x \rightarrow \beta} (f|_B)(x)$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , por la definición del límite de  $f|_B$  existe  $\eta > 0$  tal que

$$x \in B, 0 < |x - \beta| < \eta \implies |(f|_B)(x) - L| < \varepsilon.$$

Tomamos  $r = \min\{\eta, \delta\}$ . Si  $x \in A$  y  $0 < |x - \beta| < r$ , entonces

$$x \in (\beta - r, \beta + r) \cap (A \setminus \{\beta\}) \subset B,$$

y además  $|x - \beta| < \eta$ ; por tanto  $|f(x) - L| = |(f|_B)(x) - L| < \varepsilon$ . ■

### Ejemplo

**Problema.** Calcular

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}.$$

**Resolución.** En primer lugar, aunque no sea necesario, discutimos por qué tiene sentido este límite. En efecto, si  $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$ , está claro que

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty).$$

Por tanto,

$$1 \in \text{Dom}(f)' = (-\infty, 1] \cup [1, +\infty) = \mathbb{R}.$$

Sea  $\{x_n\} \subset \mathbb{R} \setminus \{1\}$  con  $\{x_n\} \rightarrow 1$ . Para todo  $n$ ,

$$\frac{x_n^2 + x_n - 2}{x_n - 1} = \frac{(x_n - 1)(x_n + 2)}{x_n - 1} = x_n + 2,$$

donde el último paso (dividir por  $x_n - 1$  numerador y denominador) puede hacerse ya que  $x_n \neq 1$ . Al pasar al límite,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2 + x_n - 2}{x_n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + 2) = 1 + 2 = 3.$$

Como el valor del límite a lo largo de cualquier sucesión  $\{x_n\} \rightarrow 1$  con  $x_n \neq 1$  es 3, concluimos que

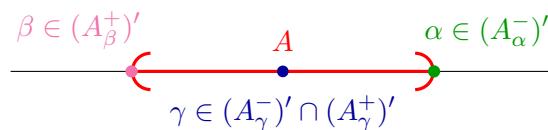
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = 3.$$

Al igual que cuando estudiábamos la continuidad usando sucesiones monótonas, para estudiar el comportamiento de una función al acercarnos a un punto de la recta real, podemos analizar por separado lo que ocurre al aproximarnos por la izquierda o por la derecha. Esto motiva las definiciones de límites a izquierda y a derecha, que veremos enseguida que no son sino casos particulares de la noción de límite que ya conocemos.

Dado  $A \subset \mathbb{R}$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ , introducimos la notación

$$A_\alpha^- = \{x \in A : x < \alpha\}, \quad A_\alpha^+ = \{x \in A : x > \alpha\}.$$

Razonando por contrarrecíproco, nos damos cuenta inmediatamente de que si  $\alpha \in A'$ , entonces  $\alpha \in (A_\alpha^+)' \cup (A_\alpha^-)'$ , ya que si  $A$  no se acumula ni a la izquierda ni a la derecha de  $\alpha$ , entonces no se acumula en  $\alpha$ .



**Definición 4.31** (Límites laterales). Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ .

- Si  $\alpha \in (A_\alpha^-)'$  (esto es,  $A$  se acumula a la *izquierda* de  $\alpha$ ), decimos que  $f$  tiene *límite por la izquierda* en  $\alpha$  cuando  $f|_{A_\alpha^-}$  tiene límite  $L$  en  $\alpha$ . En tal caso escribimos

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^-} f(x) = L.$$

- Si  $\alpha \in (A_\alpha^+)'$  (esto es,  $A$  se acumula a la *derecha* de  $\alpha$ ), decimos que  $f$  tiene *límite por la derecha* en  $\alpha$  cuando  $f|_{A_\alpha^+}$  tiene límite  $L$  en  $\alpha$ . En tal caso escribimos

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = L.$$

Por supuesto, las propiedades del límite ordinario se trasladan a los límites laterales, lo que nos da una triple definición equivalente para los mismos.

**Proposición 4.32.** Para  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\alpha \in (A_\alpha^-)'$  y  $L \in \mathbb{R}$ , son equivalentes:

- (i)  $\lim_{x \rightarrow \alpha^-} f(x) = L$ .
- (ii)  $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : (x \in A, \alpha - \delta < x < \alpha) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ .
- (iii) Para toda sucesión  $\{x_n\} \subset A$  con  $x_n < \alpha$  y  $\{x_n\} \rightarrow \alpha$ , se tiene  $\{f(x_n)\} \rightarrow L$ .
- (iv) Para toda sucesión *creciente*  $\{x_n\} \subset A \setminus \{\alpha\}$  con  $x_n < \alpha$  y  $\{x_n\} \rightarrow \alpha$ , se tiene  $\{f(x_n)\} \rightarrow L$ .

■

La versión para el límite por la derecha se obtiene sustituyendo en (iv) “creciente” por “decreciente”,  $x < \alpha$  por  $x > \alpha$  en (iii) y, en (ii), la condición  $\alpha - \delta < x < \alpha$  por  $\alpha < x < \alpha + \delta$ .

La principal utilidad de los límites laterales es su relación con el límite ordinario. Cuando  $A$  se acumula solo a un lado de un punto  $\alpha \in A'$ , está claro que las nociones de límite y límite lateral son equivalentes, por lo que el resultado más interesante se tiene cuando  $A$  se acumula a ambos lados de un punto  $\alpha \in A'$ .

**Proposición 4.33.** Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\alpha \in A'$  y  $L \in \mathbb{R}$ . Entonces:

- (a) Si  $A$  se acumula a la *izquierda* de  $\alpha$  pero no a la derecha, entonces

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow \alpha^-} f(x) = L.$$

- (b) Si  $A$  se acumula a la *derecha* de  $\alpha$  pero no a la izquierda, entonces

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = L.$$

- (c) Si  $A$  se acumula a la izquierda y a la derecha de  $\alpha$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow \alpha^-} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x).$$

### Demostración

Las implicaciones hacia la derecha ( $\Rightarrow$ ) son todas inmediatas, pues siempre podemos pasar del límite de  $f$  al límite de una restricción cualquiera usando el carácter local del límite funcional.

Para las implicaciones a la izquierda ( $\Leftarrow$ ), tomemos una sucesión monótona  $\{x_n\} \subset A \setminus \{\alpha\}$  con  $\{x_n\} \rightarrow \alpha$ :

- (a)  $\{x_n\}$  no puede ser decreciente por tanto es creciente y  $x_n < \alpha$  para todo  $n$ , de modo que  $\{f(x_n)\} \rightarrow L$  por el límite por la existencia de límite a la izquierda.
- (b) Se sigue de un razonamiento análogo al de (a).
- (c) Si  $\{x_n\}$  es creciente, usamos el punto (a), y si  $\{x_n\}$  es decreciente, el (b). En ambos casos obtenemos  $\{f(x_n)\} \rightarrow L$ .

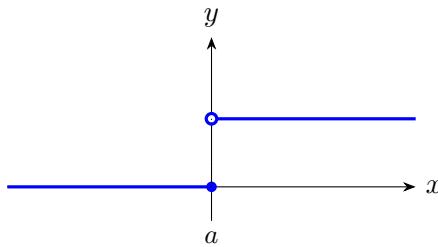
La caracterización secuencial del límite ordinario por sucesiones monótonas concluye la prueba. ■

Como consecuencia del ítem (c), si los límites laterales a izquierda y a derecha de  $\alpha$  no coinciden,  $f$  no puede tener límite en el punto  $\alpha$ . En particular, si  $f$  presenta este comportamiento en un punto  $a \in A \cap A'$ , no puede ser continua en  $a$ , independientemente del valor de  $f(a)$ .

**Definición 4.34.** Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  y  $a \in A \cap A'$  tal que  $a \in (A_a^+)' \cap (A_a^-)'$ . Si existen los límites laterales a izquierda y a derecha de  $a$  pero

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x),$$

entonces  $f$  no es continua en  $a$ , y decimos que  $f$  tiene una *discontinuidad de salto finito* en  $a$ .



### Ejemplo

**Problema.** Determinar si es posible elegir  $f(1)$  para que la función

$$f(x) = \frac{x-1}{|x-1|}, \quad x \neq 1,$$

sea continua en  $x = 1$ .

**Resolución.** El dominio de  $f$  es  $A = \mathbb{R} \setminus \{1\}$  y  $1 \in A'$ , luego para poder extender  $f$  de forma continua a 1 debe existir el límite de  $f$  en 1. Dado que  $A$  se acumula a izquierda y derecha de 1, esto es equivalente a que existan y coincidan los límites laterales.

*Límite por la izquierda.* Tomemos cualquier sucesión  $\{x_n\} \subset A$  con  $x_n < 1$  para todo  $n$  y  $\{x_n\} \rightarrow 1$ . Para  $x < 1$  se tiene  $|x-1| = 1-x$ , luego

$$\frac{x_n - 1}{|x_n - 1|} = \frac{x_n - 1}{1 - x_n} = -1 \quad \text{para todo } n,$$

y por tanto  $\{f(x_n)\} \rightarrow -1$ . Así,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$ .

*Límite por la derecha.* Tomemos ahora  $\{x_n\} \subset A$  con  $x_n > 1$  para todo  $n$  y  $\{x_n\} \rightarrow 1$ . Para  $x > 1$  se tiene  $|x-1| = x-1$ , luego

$$\frac{x_n - 1}{|x_n - 1|} = \frac{x_n - 1}{x_n - 1} = 1 \quad \text{para todo } n,$$

y por tanto  $\{f(x_n)\} \rightarrow 1$ . Así,  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$ .

Como los límites laterales existen pero no coinciden, no existe  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ . En consecuencia, no hay elección posible de  $f(1)$  que haga a  $f$  continua en  $x = 1$ .

## 4.4 Límites en el infinito y divergencia de funciones

Nuestro objetivo ahora es extender la noción de límite funcional en dos direcciones. Por un lado, estudiaremos cómo se comporta una función cuando la variable crece o decrece sin cota,

introduciendo el límite en el infinito. Por otro, en paralelo con las sucesiones divergentes, veremos también la *divergencia de funciones* en puntos de  $\mathbb{R}$ . Cerraremos con reglas básicas que permiten interpretar los límites en el infinito como límites ordinarios.

**Definición 4.35.** Sea  $A \subset \mathbb{R}$  no mayorado,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  y  $L \in \mathbb{R}$ . Diremos que  $f$  tiene límite  $L$  en  $+\infty$  si para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $K > 0$  tal que

$$x \in A, x > K \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

En tal caso, escribimos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \quad \text{o} \quad f(x) \rightarrow L \quad (x \rightarrow +\infty).$$

De forma análoga tenemos la definición de límite en  $-\infty$ .

**Definición 4.36.** Sea  $A \subset \mathbb{R}$  no minorado,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  y  $L \in \mathbb{R}$ . Diremos que  $f$  tiene límite  $L$  en  $-\infty$  si para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $K < 0$  tal que

$$x \in A, x < K \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

En tal caso, escribimos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \quad \text{o} \quad f(x) \rightarrow L \quad (x \rightarrow -\infty).$$

Por supuesto, estas nuevas nociones de límite pueden caracterizarse mediante sucesiones que divergen a  $+\infty$  o  $-\infty$ . Omitimos la demostración porque sigue la misma idea que la que hicimos para la continuidad.

**Proposición 4.37.** Sea  $A \subset \mathbb{R}$  no mayorado,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  y  $L \in \mathbb{R}$ . Son equivalentes:

- (i)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ .
- (ii) Para toda sucesión  $\{x_n\} \subset A$  con  $\{x_n\} \rightarrow +\infty$ , se tiene  $\{f(x_n)\} \rightarrow L$ .
- (iii) Para toda sucesión *creciente* y no mayorada  $\{x_n\} \subset A$ , se tiene  $\{f(x_n)\} \rightarrow L$ .

■

### Ejemplo

**Problema.** Calcular

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}).$$

**Resolución.** Racionalizamos con el conjugado:

$$\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x} = \frac{(x + \sqrt{x}) - x}{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x}}.$$

Como  $x \rightarrow +\infty$ , podemos restringirnos a considerar valores de  $x > 0$ , lo que nos permite dividir numerador y denominador por  $\sqrt{x}$ :

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} + 1}.$$

Como  $\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow +\infty$ , se obtiene

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{1+0} + 1} = \frac{1}{2}.$$

El siguiente resultado nos demuestra que el concepto de límite funcional generaliza al de límite de una sucesión. Para ver esto basta recordar que una sucesión  $\{x_n\}$  no es más que una función  $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  con  $s(n) = x_n$ . Dado que  $\mathbb{N}$  no está mayorado, tiene sentido hablar de límite (funcional) en  $+\infty$  de la función  $S$ :

**Proposición 4.38.** Sea  $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $L \in \mathbb{R}$ . Entonces

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = L \iff \{S(n)\} \rightarrow L.$$

### Demostración

*Esta demostración no se vio en clase.*

( $\Rightarrow$ ) Basta tomar la sucesión  $\{n\}$ , que diverge positivamente: por caracterización secuencial del límite en  $+\infty$ ,  $\{S(n)\} \rightarrow L$ .

( $\Leftarrow$ ) Supongamos  $\{S(n)\} \rightarrow L$ . Sea  $\{y_n\} \subset \mathbb{N}$  una sucesión con  $\{y_n\} \rightarrow +\infty$ .

Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|S(k) - L| < \varepsilon$  para todo  $k \geq n_0$ . Como  $\{y_n\} \rightarrow +\infty$ , existe  $m \in \mathbb{N}$  con  $y_n > n_0$  para todo  $n \geq m$ , y entonces  $|S(y_n) - L| < \varepsilon$  para  $n \geq m$ .

Por tanto,  $\{S(y_n)\} \rightarrow L$  y, por la caracterización secuencial,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = L$ . ■

El carácter local del límite en  $+\infty$  se enuncia diciendo que para estudiar el límite de una función en  $+\infty$ , basta considerar valores de la variable suficientemente grandes.

**Proposición 4.39.** Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  y supongamos que  $A$  no está mayorado. Fijado  $\rho > 0$ , sea  $B = \{x \in A : x > \rho\}$ . Entonces, para cualquier  $L \in \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow +\infty} (f|_B)(x) = L.$$

### Demostración

*Esta demostración no se vio en clase.*

( $\Rightarrow$ ) Puesto que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ , dado  $\varepsilon > 0$  encontramos  $K > 0$  tal que si  $x > K$ , entonces  $|f(x) - L| < \varepsilon$ . En particular, esto vale para  $x \in B$  con  $x > K$ .

( $\Leftarrow$ ) Sea  $\{x_n\} \subset A$  con  $\{x_n\} \rightarrow +\infty$ . Por definición de divergencia a  $+\infty$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  de forma que, si  $n \geq n_0$ , entonces  $x_n > \rho$ , luego  $x_n \in B$ . Entonces, para  $n \geq n_0$ :

$$\{f(x_n)\} = \{f|_B(x_n)\} \rightarrow L.$$

■

Pasamos ahora al estudio de un tipo concreto de sucesiones que no tienen límite en un punto de acumulación de su dominio de definición: aquellas en las que las imágenes se hacen arbitrariamente grandes o pequeñas al acercarnos a dicho punto.

**Definición 4.40.** Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\alpha \in A'$ .

(i) Diremos que  $f$  *diverge a  $+\infty$  en  $\alpha$*  (y escribiremos  $f(x) \rightarrow +\infty (x \rightarrow \alpha)$ ) si

$$\forall K > 0 \exists \delta > 0 : x \in A, 0 < |x - \alpha| < \delta \implies f(x) > K.$$

(ii) Análogamente,  $f$  *diverge a  $-\infty$  en  $\alpha$*  (y escribiremos  $f(x) \rightarrow -\infty (x \rightarrow \alpha)$ ) si

$$\forall K < 0 \exists \delta > 0 : x \in A, 0 < |x - \alpha| < \delta \implies f(x) < K.$$

La divergencia de una función en un punto puede caracterizarse mediante sucesiones. Por supuesto, en este caso se tendrá que la sucesión de imágenes es una sucesión que diverge a  $+\infty$ . Damos el resultado para divergencia hacia  $+\infty$ , pues el otro caso es análogo. La demostración a estas alturas debería ser un ejercicio sencillo.

**Proposición 4.41.** Son equivalentes:

(i)  $f(x) \rightarrow +\infty (x \rightarrow \alpha)$ .

(ii) Para toda sucesión  $\{x_n\} \subset A \setminus \{\alpha\}$  con  $\{x_n\} \rightarrow \alpha$ , se tiene  $\{f(x_n)\} \rightarrow +\infty$ .

(iii) Para toda sucesión *monótona*  $\{x_n\} \subset A \setminus \{\alpha\}$  con  $\{x_n\} \rightarrow \alpha$ , se tiene  $\{f(x_n)\} \rightarrow +\infty$ .

■

**Nota:** Como en el caso de sucesiones, una función que diverge a  $\pm\infty$  en un punto está muy lejos de tener límite allí. No es aconsejable decir que una función tiene límite  $+\infty$  en  $\alpha$  ni escribir  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = +\infty$ ; la formulación que debemos seguir para evitar confusiones es  $f(x) \rightarrow +\infty$  cuando  $x \rightarrow \alpha$ .

Por supuesto, la divergencia a  $\pm\infty$  en  $\alpha$  es una propiedad local cuyo enunciado puede trasladarse directamente del de límite en  $\alpha$ .

Dado  $\alpha \in A'$ , podemos hablar de *divergencia lateral* a  $\pm\infty$  cuando las correspondientes restricciones de  $f$  a izquierda o derecha de  $\alpha$  presenten este tipo de divergencia.

**Definición 4.42.** Sean  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\alpha \in A'$ . Entonces:

(i) Si  $\alpha \in (A_\alpha^+)'$ , decimos que  $f$  *diverge a  $+\infty$  por la derecha en  $\alpha$*  si  $f|_{A_\alpha^+} \rightarrow +\infty$  cuando  $(x \rightarrow \alpha)$ . En tal caso, escribimos  $f(x) \rightarrow +\infty (x \rightarrow \alpha^+)$ .

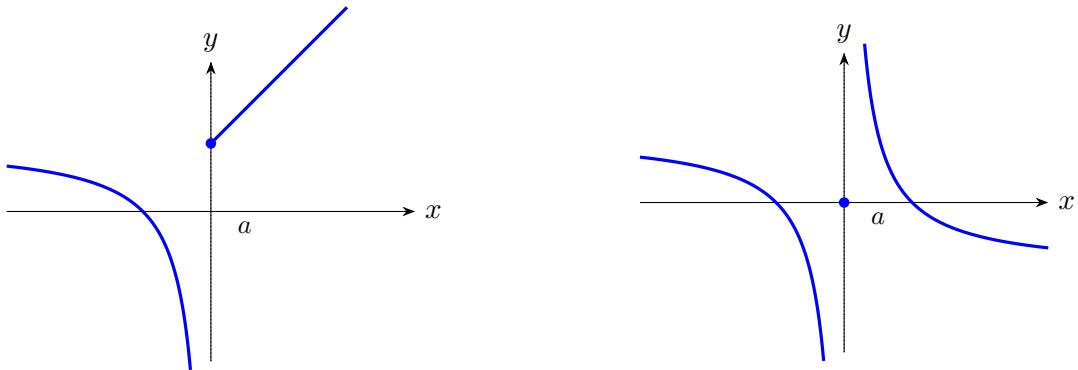
(ii) Si  $\alpha \in (A_\alpha^-)'$ , decimos que  $f$  *diverge a  $+\infty$  por la izquierda en  $\alpha$*  si  $f|_{A_\alpha^-} \rightarrow +\infty$  cuando  $(x \rightarrow \alpha)$ . En tal caso, escribimos  $f(x) \rightarrow +\infty (x \rightarrow \alpha^-)$ .

Como cabe esperar, esta noción admite una caracterización  $K - \delta$  y mediante sucesiones monótonas, que omitimos por cuestiones de brevedad.

**Definición 4.43.** Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  y  $a \in A \cap A'$  con  $a \in (A_a^+)' \cap (A_a^-)'$ .

- Decimos que  $f$  tiene en  $a$  una *discontinuidad de salto infinito* si uno de los límites laterales existe pero la función diverge a  $+\infty$  o  $-\infty$  al otro lado de  $a$ .

- Decimos que  $f$  tiene en  $a$  una *discontinuidad asintótica* en  $a$  si  $f$  diverge a  $+\infty$  o  $-\infty$  a ambos lados de  $a$ .



Para completar el esquema, describimos ahora la divergencia de una función en  $+\infty$  y en  $-\infty$ .

**Definición 4.44.** Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A$  no mayorado.

- Diremos que  $f$  *diverge a  $+\infty$*  en  $+\infty$  y escribiremos  $f(x) \rightarrow +\infty$  ( $x \rightarrow +\infty$ ) si

$$\forall K > 0 \exists M \in \mathbb{R} : x \in A, x > M \implies f(x) > K.$$

- Diremos que  $f$  *diverge a  $-\infty$*  en  $+\infty$  y escribiremos  $f(x) \rightarrow -\infty$  ( $x \rightarrow +\infty$ ) si

$$\forall K < 0 \exists M \in \mathbb{R} : x \in A, x > M \implies f(x) < K.$$

**Proposición 4.45.** Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A$  no mayorado. Son equivalentes:

- $f(x) \rightarrow +\infty$  ( $x \rightarrow +\infty$ ).
- Para toda sucesión  $\{x_n\} \subset A$  con  $\{x_n\} \rightarrow +\infty$ , se tiene  $\{f(x_n)\} \rightarrow +\infty$ .
- Para toda sucesión  $\{x_n\} \subset A$  *creciente y no mayorada*, se tiene  $\{f(x_n)\} \rightarrow +\infty$ .

■

La noción de divergencia a  $\pm\infty$  en  $-\infty$  se obtiene de forma análoga, al igual que la caracterización mediante sucesiones.

**Definición 4.46.** Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A$  no está minorado.

- $f(x) \rightarrow +\infty$  ( $x \rightarrow -\infty$ ) si  $\forall K \in \mathbb{R} \exists M \in \mathbb{R} : x \in A, x < M \implies f(x) > K$ .
- $f(x) \rightarrow -\infty$  ( $x \rightarrow -\infty$ ) si  $\forall K \in \mathbb{R} \exists M \in \mathbb{R} : x \in A, x < M \implies f(x) < K$ .

**Proposición 4.47.** Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A$  no está minorado. Son equivalentes:

- $f(x) \rightarrow +\infty$  ( $x \rightarrow -\infty$ ).
- Para toda sucesión  $\{x_n\} \subset A$  con  $\{x_n\} \rightarrow -\infty$ , se tiene  $\{f(x_n)\} \rightarrow +\infty$ .
- Para toda sucesión  $\{x_n\} \subset A$  *decreciente y no minorada*, se tiene  $\{f(x_n)\} \rightarrow +\infty$ .

Nuevamente, cambiamos “ $> K$ ” por “ $< K$ ” para la divergencia hacia  $-\infty$ .

■

Finalmente, vemos que podemos transformar un límite en  $+\infty$  con uno en  $-\infty$  y viceversa, además de transformar cualquiera de ellos en un límite lateral en 0.

**Proposición 4.48.** Sean  $A \subset \mathbb{R}$  no mayorado,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  y  $L \in \mathbb{R}$ . Admitimos también que  $L$  pueda ser el símbolo  $+\infty$  o  $-\infty$ .

(a) Consideramos  $g : -A \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g(x) = f(-x)$  para todo  $x \in -A$ . Entonces

$$f(x) \rightarrow L \ (x \rightarrow +\infty) \iff g(x) \rightarrow L \ (x \rightarrow -\infty).$$

Esto suele escribirse de forma más directa como

$$f(x) \rightarrow L \ (x \rightarrow -\infty) \iff f(-x) \rightarrow L \ (x \rightarrow +\infty).$$

(b) Sean  $B = \{y \in \mathbb{R}^+ : 1/y \in A\}$  y  $h : B \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $h(y) = f(1/y)$ . Entonces  $0 \in B'$  y

$$f(x) \rightarrow L \ (x \rightarrow +\infty) \iff h(y) \rightarrow L \ (y \rightarrow 0^+),$$

es decir,

$$f(x) \rightarrow L \ (x \rightarrow +\infty) \iff f(1/y) \rightarrow L \ (y \rightarrow 0^+).$$

Combinando (a) y (b) podemos transformar un límite en  $-\infty$  en un límite en 0 por la izquierda.

### Demostración

*Esta demostración no se vio en clase.*

- (a) Sea  $\{x_n\} \subset A$  con  $\{x_n\} \rightarrow +\infty$ , entonces  $\{-x_n\} \subset -A$  y  $\{-x_n\} \rightarrow -\infty$ . Así,  $\{f(x_n)\} \rightarrow L$  equivale a  $\{g(x_n)\} \rightarrow L$ . El otro sentido se hace de forma idéntica.
- (b) ( $\Rightarrow$ ) Sea  $\{y_n\} \subset B$  una sucesión con  $\{y_n\} \rightarrow 0$ . Entonces,  $\frac{1}{y_n} \in A$  y  $\{\frac{1}{y_n}\} \rightarrow +\infty$ . Por tanto  $\{f(\frac{1}{y_n})\} = h(y_n) \rightarrow L$ .
- ( $\Leftarrow$ ) Recíprocamente, si  $\{x_n\} \subset A$  con  $x_n \rightarrow +\infty$ , entonces existe  $m \in \mathbb{N}$  de forma que  $x_n > 0$  para  $n \geq m$ . Entonces, para  $n \geq m$  se tiene  $\{\frac{1}{x_n}\} \subset B$ ,  $\{\frac{1}{x_n}\} \rightarrow 0$ . Por tanto,  $\{f(x_n)\} = \{h(\frac{1}{x_n})\} \rightarrow L$ . ■

### Ejemplo

**Problema.** Determinar razonadamente si existe

$$\lim_{x \rightarrow 0} x e^{1/x}.$$

**Resolución.** Tenemos que  $\text{Dom}(xe^{1/x}) = \mathbb{R}^*$ , que se acumula a la izquierda y a la derecha de 0. Por tanto, podemos estudiar los límites laterales  $x \rightarrow 0^+$  y  $x \rightarrow 0^-$ . Usamos el cambio  $y = 1/x$ , de modo que

$$xe^{1/x} = \frac{e^y}{y}.$$

*Límite por la izquierda.* Si  $x \rightarrow 0^-$  entonces  $y = 1/x \rightarrow -\infty$  y

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} xe^{1/x} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{e^y}{y} = 0.$$

*Límite por la derecha.* Si  $x \rightarrow 0^+$  entonces  $y = 1/x \rightarrow +\infty$  y

$$\frac{e^y}{y} \rightarrow +\infty,$$

lo que nos da  $xe^{1/x} \rightarrow +\infty$  cuando  $x \rightarrow 0^+$ .

Como uno de los límites laterales no existe, el límite no existe.

**Nota.** En el ejemplo anterior hemos usado que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p}{a^x} = 0 \quad (a > 1, p > 0).$$

Hasta ahora solo hemos justificado esta afirmación cuando  $x = n \in \mathbb{N}$  y  $p \in \mathbb{N}$ . La versión general con  $x \in \mathbb{R}$  se demostrará más adelante, cuando dispongamos de una definición rigurosa de las funciones exponencial, logaritmo y potencia. Mientras tanto, la daremos por conocida para poder presentar ejemplos no triviales de la utilidad del cambio de variable.

## 4.5 Propiedades de las funciones continuas

Estudiaremos dos resultados fundamentales sobre funciones continuas en intervalos reales. El primero afirma que si una función continua toma dos valores dentro de un intervalo, entonces toma también todos los valores intermedios; dicho de otro modo, las funciones continuas transforman intervalos en intervalos. El segundo identifica un caso especialmente importante: si el intervalo de partida es cerrado y acotado, su imagen también lo es; en particular, la función alcanza un máximo y un mínimo. Este puede considerarse el primer resultado de optimización que se verá en el curso de cálculo.

Empezamos con una sencilla observación: si una función continua es positiva en un punto, se mantiene positiva en un pequeño entorno de dicho punto. A esto se le llama **propiedad de conservación del signo**.

**Proposición 4.49.** Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua en un punto  $x \in A$ . Si  $f(x) > 0$ , entonces existe  $\delta > 0$  tal que, para todo  $y \in A$  con  $|y - x| < \delta$ , se tiene  $f(y) > 0$ . Análogamente, si  $f(x) < 0$ , entonces existe  $\delta > 0$  tal que  $|y - x| < \delta \Rightarrow f(y) < 0$ .

### Demostración

Si  $f(x) > 0$ , tomando  $\varepsilon = f(x)$  en la caracterización  $(\varepsilon - \delta)$  de la continuidad, existe  $\delta > 0$  tal que  $|y - x| < \delta$ , entonces:

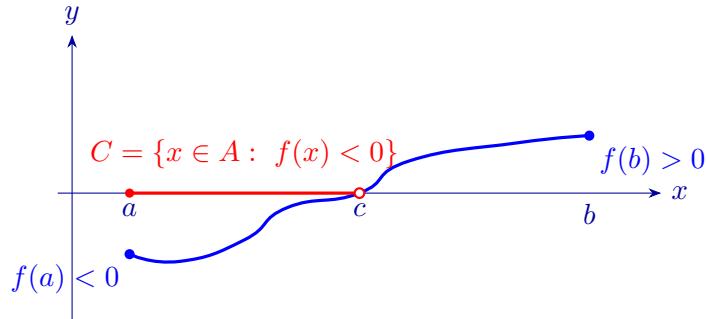
$$|f(y) - f(x)| < f(x) \Rightarrow -f(x) < f(y) - f(x) \Rightarrow f(y) > 0.$$

El caso  $f(x) < 0$  se reduce al anterior aplicándolo a  $-f$ , que es continua en  $x$  y verifica  $(-f)(x) > 0$ . ■

**Teorema 4.50 (de los ceros de Bolzano).** Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$  y  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua tal que  $f(a) < 0$  y  $f(b) > 0$ . Entonces existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = 0$ .

**Demostración**

Sea  $C = \{x \in [a, b] : f(x) < 0\}$ . El conjunto  $C$  es no vacío (contiene a  $a$ ) y está acotado, luego podemos considerar  $c = \sup C \in [a, b]$ . La idea es probar que  $f(c) = 0$ .



Razonamos por reducción al absurdo: si  $f(c) < 0$ , entonces por conservación del signo existe un  $\delta > 0$  tal que si  $x \in [a, b]$  y  $|x - c| < \delta \Rightarrow f(x) < 0$ . Nos damos cuenta de que  $c + \delta \leq b$ , pues si se tuviera  $c \leq b < c + \delta$  entonces  $f(b) < 0$ , que contradice nuestra hipótesis  $f(b) > 0$ . Si tomamos  $x \in (c, c + \delta)$  obtenemos un  $x \in [a, b]$ ,  $x > c$ , con  $f(x) < 0$ , que contradice que  $c$  sea el supremo de  $C$ .

Supongamos ahora que  $f(c) > 0$ , de nuevo por conservación del signo existiría  $\delta > 0$  tal que  $|x - c| < \delta \Rightarrow f(x) > 0$ . Entonces, todos los puntos de  $x \in C$  deben cumplir  $|x - c| \geq \delta$ . Además, como  $c$  es el supremo de  $C$ , también ha de darse  $x \leq c$ , es decir,  $|x - c| = c - x$ . Combinando esta información tenemos que

$$x \in C \Rightarrow x \leq c - \delta.$$

Esta desigualdad nos dice que  $c - \delta$  es un mayorante de  $C$ , lo cual es imposible porque  $c - \delta < c$ .

Concluimos  $f(c) = 0$ . ■

Por supuesto, el teorema sigue siendo cierto si  $f(a) > 0$  y  $f(b) < 0$ , ya que basta con aplicar la versión anterior a  $-f$ .

Además, el teorema de Bolzano puede trasladarse para encontrar valores de  $f$  entre  $f(a)$  y  $f(b)$ , siempre que estos sean distintos. La forma clásica de enunciar esta propiedad es la que sigue:

**Teorema 4.51 (del Valor Intermedio).** Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Si  $I \subset A$  es un intervalo, entonces  $f(I)$  es un intervalo. Esto es, si  $\alpha, \beta \in f(I)$  con  $\alpha < \beta$  entonces  $[\alpha, \beta] \subset f(I)$ .

**Demostración**

Basta comprobar que si  $\alpha, \beta \in f(I)$  con  $\alpha < \beta$  y  $\lambda \in (\alpha, \beta)$ , entonces  $\lambda \in f(I)$ .

Sean  $x, y \in I$  tales que  $f(x) = \alpha$  y  $f(y) = \beta$ . Como  $f(x) \neq f(y)$ , no puede darse  $x = y$ . Así pues, distinguimos casos según el orden de  $x$  e  $y$ .

Si  $x < y$ , consideraremos  $[x, y] \subset I$  y la función continua  $g(t) = f(t) - \lambda$  en  $[x, y]$ . Se tiene  $g(x) = \alpha - \lambda < 0$  y  $g(y) = \beta - \lambda > 0$ . Por el teorema de Bolzano, existe  $c \in (x, y)$  con  $g(c) = 0$ , es decir,  $f(c) = \lambda \in f(I)$ .

El caso  $y < x$  es idéntico usando  $[y, x]$  y la función  $g(t) = \lambda - f(t)$ . ■

El teorema anterior motiva la siguiente definición:

**Definición 4.52.** Sea  $I$  un intervalo no trivial y  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Decimos que  $f$  tiene la propiedad del valor intermedio si, para todo subintervalo  $J \subset I$ ,  $f(J)$  es un intervalo.

Por supuesto, si  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua e  $I \subset A$  es un intervalo no trivial, entonces  $f|_I$  satisface la propiedad del valor intermedio, ya que  $f|_J$  sigue siendo continua para todo  $J \subset I$ , y por tanto  $f|_I(J) = f|_J(J)$  es un intervalo por el teorema del valor intermedio.

Lo interesante de esta distinción es que el recíproco no es cierto; existen funciones que satisfacen la propiedad del valor intermedio sin ser continuas, aunque en estos momentos no disponemos de las herramientas necesarias para definirlas de forma sencilla. Queda pues prometido este contraejemplo para capítulos posteriores del curso.

Lo que sí podemos ver sin apenas esfuerzo es que no es suficiente con que  $f(I)$  sea un intervalo para que  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  tenga la propiedad del valor intermedio:

**Contraejemplo.** Sea  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \in (0, 1], \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Tenemos de forma clara  $f([0, 1]) = [0, 1]$ , que es un intervalo. Sin embargo, tomando  $J = [0, \frac{1}{2}] \subset I$ , se tiene  $f(J) = \{0\} \cup [\frac{1}{2}, 1)$ , que no es un intervalo.

Por otro lado, la hipótesis de que  $I$  sea un intervalo es fundamental para garantizar que  $f(I)$  es un intervalo para una función continua  $f$ , como ilustra el siguiente resultado:

**Proposición 4.53.** Si  $A \subset \mathbb{R}$  no es un intervalo, existe una función continua  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(A)$  tiene exactamente dos elementos.

### Demostración

*Esta demostración no se vio en clase.*

Como  $A$  no es un intervalo, existen  $x, y \in A$  y  $z \in \mathbb{R} \setminus A$  con  $x < z < y$ . Definimos  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$f(t) = \frac{t - z}{|t - z|} \quad \forall t \in A.$$

El denominador no se anula (porque  $z \notin A$ ) y  $f$  es cociente de funciones continuas, luego es continua en  $A$ . Además  $|f(t)| = 1$ , así que  $f(t) \in \{-1, 1\}$  para todo  $t \in A$ , y como  $f(y) = 1$  y  $f(x) = -1$ , resulta  $f(A) = \{-1, 1\}$ . ■

Como motivación para la segunda propiedad fundamental de las funciones continuas, nos preguntamos si, en el teorema del valor intermedio, puede conocerse el tipo de intervalo  $f(I)$  a partir del tipo de  $I$ . En general no hay relación: por ejemplo, una función constante transforma cualquier intervalo en un intervalo cerrado y acotado formado por un único punto, por lo que la acotación de  $f(I)$  no nos da ninguna información sobre la de  $I$ .

Un ejemplo menos trivial es la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}.$$

No es difícil demostrar que  $f$  es continua e inyectiva con  $f(\mathbb{R}) = (-1, 1)$ , y su inversa, que es la función  $f^{-1} : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{1 - |y|}$$

también es continua y envía el intervalo acotado  $(-1, 1)$  en  $\mathbb{R}$ , que no está ni mayorado ni minorado.

Tampoco se conserva ser abierto o cerrado: el valor absoluto lleva  $(-1, 1)$  a  $[0, 1]$ , y con  $I = [1, +\infty)$  y  $f(x) = 1/x$  aparece  $f(I) = (0, 1]$ , que no es cerrado.

Sin embargo, hay un caso que sí se preserva: cuando  $I$  es cerrado y acotado, también lo es  $f(I)$ . Esto es precisamente el contenido del teorema de Weierstrass.

**Teorema 4.54 (de Weierstrass).** Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$  y sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Entonces, el intervalo  $f([a, b])$  es cerrado y acotado.

### Demostración

Empezamos probando que  $f([a, b])$  es un conjunto acotado, es decir, que el conjunto  $\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$  está mayorado.

Razonamos por contradicción: si no está mayorado, para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe  $x_n \in [a, b]$  tal que  $|f(x_n)| > n$ . Como  $\{x_n\}$  es una sucesión acotada, el teorema de Bolzano-Weierstrass nos proporciona una sucesión parcial convergente:  $\{x_{\sigma(n)}\} \rightarrow x \in \mathbb{R}$ .

Como  $a \leq x_n \leq b$  para todo  $n$ , es claro que  $x \in [a, b]$ , lo que nos permite usar que  $f$  es continua en  $x$ , para concluir que  $\{f(x_{\sigma(n)})\} \rightarrow f(x)$ . Pero esto es una contradicción, ya que  $|f(x_{\sigma(n)})| > \sigma(n) \geq n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , luego  $\{f(x_{\sigma(n)})\} \rightarrow +\infty$ .

Sabido que el intervalo  $J = f([a, b])$  está acotado, tomamos  $\alpha = \inf J$ ,  $\beta = \sup J$  y tenemos  $(\alpha, \beta) \subset J \subset [\alpha, \beta]$ , luego bastará probar que  $\alpha, \beta \in J$  para concluir que  $J = [\alpha, \beta]$ , un intervalo cerrado y acotado.

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , puesto que  $\alpha + 1/n$  no es minorante del conjunto  $f([a, b])$ , por definición de ínfimo existirá un  $y_n \in [a, b]$  verificando que  $\alpha < f(y_n) < \alpha + 1/n$ . Obtenemos así una sucesión  $\{y_n\}$  de puntos de  $[a, b]$  tal que  $\{f(y_n)\} \rightarrow \alpha$ .

Aplicando aquí una vez más el teorema de Bolzano-Weierstrass, obtenemos una sucesión parcial  $\{y_{\tau(n)}\} \rightarrow y \in [a, b]$ . Puesto que  $f$  es continua en el punto  $y$ , deducimos que  $\{f(y_{\tau(n)})\} \rightarrow f(y)$ . Ahora bien,  $\{f(y_{\tau(n)})\}$  es una sucesión parcial de  $\{f(y_n)\}$ , luego  $\{f(y_{\tau(n)})\} \rightarrow \alpha$  y concluimos que  $\alpha = f(y) \in f([a, b])$ , como queríamos.

Para comprobar que también  $\beta \in f([a, b])$  se razona de manera completamente análoga. ■

Al igual que hicimos con sucesiones, definimos a continuación la monotonía de una función de la forma que cabría esperarse. Veremos entonces dos resultados que relacionan la monotonía de una función y su continuidad, y como consecuencia, un tercero que nos permite deducir la continuidad de la función inversa de una función inyectiva.

**Definición 4.55.** Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Diremos que  $f$  es

- **creciente** si:  $x, y \in A, x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ .
- **estRICTAMENTE CRECIENTE** si:  $x, y \in A, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ .
- **decreciente** si:  $x, y \in A, x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ .
- **estRICTAMENTE DECRECIENTE** si:  $x, y \in A, x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$ .
- **monótona** si  $f$  es creciente o decreciente.
- **estRICTAMENTE MONÓTONA** si  $f$  es estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

Es fácil observar que las únicas funciones crecientes y decrecientes a la vez son las constantes. Nótese también que una función es estrictamente monótona si es monótona e inyectiva.

Para trabajar con comodidad, dado  $B \subset A$ , decimos que  $f$  es creciente en  $B$  si  $f|_B$  es una función creciente, con idéntica definición para las otras 5 propiedades vistas.

Por ejemplo, la función valor absoluto  $x \mapsto |x|$  es decreciente en  $(-\infty, 0]$  y creciente en  $[0, +\infty)$ , pero no es monótona en  $\mathbb{R}$ .

Sabemos que toda función estrictamente monótona es inyectiva. A poco que se piense, el recíproco es falso en general. Sin embargo, podemos obtenerlo bajo ciertas condiciones adicionales.

**Teorema 4.56.** Sea  $I$  un intervalo y  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua e inyectiva. Entonces  $f$  es estrictamente monótona.

La demostración de este resultado es técnica, y conviene dividirla en varios pasos para que sea más fácil de leer y comprender.

**Lema 4.57** (Lema 1). Dados  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$ , si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua e inyectiva, tal que  $f(a) < f(b)$ , entonces  $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$  para todo  $x \in [a, b]$ .

#### Demostración del lema

Razonemos por reducción al absurdo:

Si  $f(x) < f(a)$ , aplicamos el teorema del valor intermedio a  $f|_{[x, b]}$  que es continua y toma los valores  $f(x)$  y  $f(b)$ , luego debe tomar también el valor intermedio  $f(a)$ . Por tanto, existe  $z \in [x, b]$  tal que  $f(z) = f(a)$ , pero esto contradice la inyectividad de  $f$ , ya que  $a \neq z$ .

Análogamente, si fuese  $f(x) > f(b)$  aplicaremos el teorema del valor intermedio a  $f|_{[a, x]}$ , obteniendo  $z \in [a, x]$  con  $f(z) = f(b)$ , contradiciendo otra vez la inyectividad de  $f$ . ■

**Lema 4.58** (Lema 2). La función del Lema 4.57 es creciente.

#### Demostración

Dados  $x, y \in [a, b]$  con  $x < y$ , por el primer lema tenemos  $f(x) \leq f(b)$ , de hecho  $f(x) < f(b)$ , ya que  $x < b$  y  $f$  es inyectiva. Pero ahora podemos aplicar el mismo lema

a  $f|_{[x,b]}$ , que es continua e inyectiva, con  $f(x) < f(b)$ , obteniendo  $f(x) \leq f(y)$ , como queríamos. ■

### Demostración del teorema

*Esta demostración no se vio en clase.*

Basta probar que  $f$  es monótona, pues de la inyectividad se deduce que la monotonía es estricta. Empezamos observando que el Lema 4.58 nos resuelve directamente el caso en que  $I$  es un intervalo no trivial cerrado y acotado  $[a, b]$ .

En efecto, si  $f(a) < f(b)$ , entonces aplicamos el resultado al pie de la letra. Si en cambio  $f(a) > f(b)$ , aplicamos dicho lema a la función  $-f$ . Por supuesto,  $f(a) = f(b)$  no puede tenerse ya que  $f$  es inyectiva.

Vamos al caso general:  $I$  es un intervalo arbitrario y  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es continua e inyectiva. Razonando por reducción al absurdo, si  $f$  no es monótona, existen  $x_1, y_1, x_2, y_2 \in I$  tales que:

$$x_1 < y_1, \quad x_2 < y_2, \quad f(x_1) > f(y_1), \quad f(x_2) < f(y_2).$$

Escribiendo  $a = \min\{x_1, x_2\} < \max\{y_1, y_2\} = b$ , por ser  $I$  un intervalo, tenemos  $[a, b] \subset I$ , lo que permite considerar  $f|_{[a,b]}$ , que es continua e inyectiva. Como  $x_1, y_1, x_2, y_2 \in [a, b]$ , dicha función no puede ser monótona, lo cual contradice directamente lo demostrado en el paso anterior. ■

De la monotonía de una función también puede pasarse a la continuidad. El siguiente resultado no requiere que  $f$  esté definida en un intervalo, pero sí que lo sea su imagen.

**Teorema 4.59.** Si  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  es una función monótona, y  $f(A)$  es un intervalo, entonces  $f$  es continua.

### Demostración

*Esta demostración no se vio en clase.*

Podemos evidentemente suponer que  $f$  es creciente, pues en otro caso bastaría usar la función  $-f$ , cuya imagen también es un intervalo.

Fijado  $x \in A$ , para probar que  $f$  es continua en el punto  $x$ , tomamos una sucesión monótona  $\{x_n\}$  de puntos de  $A$  tal que  $\{x_n\} \rightarrow x$  y bastará ver que  $\{f(x_n)\} \rightarrow f(x)$ . Cubriremos solo el caso en que  $\{x_n\}$  es una sucesión creciente, pues el otro se sigue de un razonamiento enteramente análogo.

Por ser  $\{x_n\}$  creciente, para todo  $n \in \mathbb{N}$  tenemos  $x_n \leq x_{n+1} \leq x$ , luego  $f(x_n) \leq f(x_{n+1}) \leq f(x)$ , ya que  $f$  es creciente. Por tanto, la sucesión  $\{f(x_n)\}$  es creciente y mayorada por  $f(x)$ , luego convergente. Escribimos

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n).$$

En principio tenemos que  $L \leq f(x)$ , pero en seguida vemos que suponer que  $L < f(x)$  nos lleva a una contradicción.

En efecto, si tomamos un  $y \in \mathbb{R}$  tal que  $L < y < f(x)$ , tenemos  $f(x_1) < y < f(x)$  y, usando que  $f(A)$  es un intervalo, deberá existir  $a \in A$  tal que  $f(a) = y$ .

Si fuese  $x < a$  el crecimiento de  $f$  nos daría  $f(x) \leq f(a) = y$ , que no es cierto. Pero si se tuviese  $a < x$ , como  $\{x_n\} \rightarrow x$ , podríamos tomar  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $a < x_m$ , con lo que  $y = f(a) \leq f(x_m) < L$ , que tampoco puede ser cierto.

Hemos demostrado que  $L = f(x)$ , es decir,  $\{f(x_n)\} \rightarrow f(x)$  como queríamos. ■

Conviene resaltar que, en el teorema anterior, el conjunto  $A$  no tiene por qué ser un intervalo.

Para una función continua e inyectiva, es natural preguntarse si la inversa también será continua. Usando la relación entre las gráficas de  $f$  y de  $f^{-1}$  es fácil convencerse de que esto no tiene por qué ser siempre así.

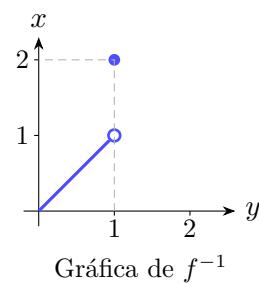
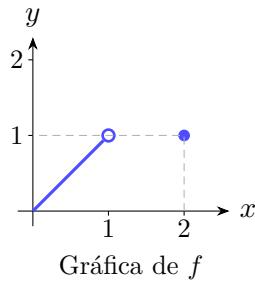
Sean  $A = [0, 1[ \cup \{2\}$  y  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1[, \\ 1, & x = 2. \end{cases}$$

El carácter local de la continuidad nos dice inmediatamente que  $f$  es continua, y también es fácil comprobar que  $f$  es inyectiva, con  $f(A) = [0, 1]$ . La inversa  $f^{-1} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  viene dada por

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y, & y \in [0, 1[, \\ 2, & y = 1. \end{cases}$$

Tomando la sucesión  $\{y_n\}$  con  $y_n = 1 - \frac{1}{n}$  se tiene  $\{y_n\} \rightarrow 1$  pero  $\{f^{-1}(y_n)\} = \{y_n\} \rightarrow 1 \neq 2 = f^{-1}(1)$ . Por tanto,  $f^{-1}$  no es continua en 1. Las gráficas ayudan a visualizar que  $f$  es continua mientras que  $f^{-1}$  no lo es:



Como podemos adivinar, esta situación es posible porque  $A$  no es un intervalo. El resultado al que queremos llegar afirma que, siempre que  $A$  sea un intervalo y  $f$  continua e inyectiva,  $f^{-1}$  también será continua. Para ello, necesitamos un resultado preliminar que es interesante por sí mismo.

**Proposición 4.60.** Si  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  es una función estrictamente creciente, entonces  $f^{-1} : f(A) \rightarrow \mathbb{R}$  también es estrictamente creciente. Si  $f$  es estrictamente decreciente,  $f^{-1}$  también lo es.

**Demostración**

*Esta demostración no se vio en clase.*

Supongamos que  $f$  es estrictamente creciente. Tomamos  $u, v \in f(A)$  con  $u < v$  y sean  $x = f^{-1}(u)$ ,  $y = f^{-1}(v)$ . Si fuese  $y \leq x$ , aplicando que  $f$  es creciente tendríamos  $v = f(y) \leq f(x) = u$ , que es una contradicción, luego deberá ser  $x < y$ , es decir,  $f^{-1}(u) < f^{-1}(v)$ . Esto prueba que  $f^{-1}$  es estrictamente creciente, como queríamos. En el caso de que  $f$  sea estrictamente decreciente, se razona de forma enteramente análoga.  $\blacksquare$

**Teorema 4.61.** Si  $I$  es un intervalo y  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es estrictamente monótona, entonces  $f^{-1}$  es continua. En particular, si  $f$  es continua e inyectiva, entonces  $f^{-1}$  es continua.

**Demostración**

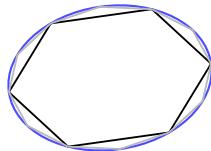
*Esta demostración no se vio en clase.*

En efecto, acabamos de ver que  $f^{-1} : f(I) \rightarrow \mathbb{R}$  también es estrictamente monótona, pero su imagen es un intervalo, ya que  $f^{-1}(f(I)) = I$ , luego  $f^{-1}$  es continua.  $\blacksquare$

# Capítulo 5

## Funciones derivables

La noción de *límite* aparece por primera vez en la antigua Grecia, en el contexto de los problemas de cuadratura y rectificación, en los que se pretenden medir el perímetro y el área de una figura plana curvilínea. Eudoxo y Arquímedes propusieron el *método de exhaución*, mediante el cual se aproximaron áreas y perímetros de figuras curvilíneas mediante polígonos inscritos y circunscritos cada vez más finos, en lo que puede considerarse una idea primitiva del concepto de paso al límite.



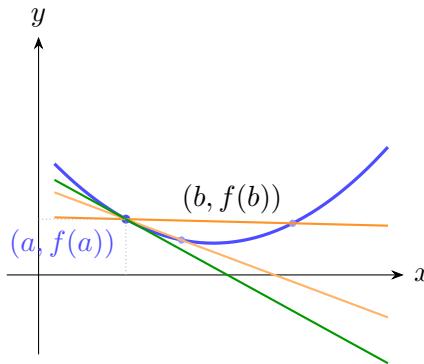
La cuestión geométrica de aproximar contornos curvilíneos a través de rectas aparece tácitamente en lo que consideramos uno de los primeros antecedentes para la noción de derivada, que es el *problema de las tangentes*: dada una curva y un punto sobre la misma, hallar la recta que mejor aproxima a la curva en ese punto.

*Fermat* aborda este problema con su método de la *adecuación*, que era un algoritmo diseñado para encontrar extremos de funciones: se escribe  $f(a + h)$  en función de  $f(a)$  y se aplican las mismas reglas que para el cálculo de extremos, esto es, se desprecian en un cierto sentido los términos de orden superior a  $h$ . Su condición conduce, en notación moderna, a que la pendiente buscada sea el límite de las pendientes de las secantes.

Para ilustrarlo, consideremos la siguiente situación simplificada: sea  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo no trivial y  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continua. El teorema del valor intermedio nos permite interpretar la gráfica

$$\text{Gr}(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in I\}$$

como una curva del plano. El problema consiste por tanto en encontrar, para un punto dado  $a \in I$ , la recta tangente a  $\text{Gr}(f)$  en  $(a, f(a))$ . El método de Fermat sugiere considerar rectas secantes que pasan por  $(a, f(a))$  y  $(b, f(b))$  para  $b \in I$  con  $b \neq a$ , y estudiar qué ocurre cuando  $b$  se aproxima a  $a$ .



La ecuación *punto-pendiente* de una recta de  $\mathbb{R}^2$  que pasa por  $(a, f(a))$  tiene la forma

$$y - f(a) = m(x - a).$$

Si imponemos que dicha recta pase por un punto  $(b, f(b))$  con  $b \neq a$ , obtenemos

$$f(b) - f(a) = m(b - a) \implies m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Por tanto, la pendiente de la recta tangente será la magnitud obtenida al calcular

$$\lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

que es lo que solemos denotar como  $f'(a)$  cuando dicho límite es un número real.

Paralelamente, Descartes, quien era muy crítico con los razonamientos de Fermat, llegó a la misma conclusión usando su método de las normales. Según este, se debería tomar otro punto variable sobre la curva, y calcular la ecuación de una circunferencia con centro  $(0, 0)$  que pase por ambos puntos. La ecuación que determina las intersecciones entre la circunferencia y la curva es de segundo grado, así que para hallar la circunferencia tangente bastaba con igualar el discriminante a cero. Conocido el centro, se determinaban fácilmente las rectas normal y tangente a la curva en el punto.

Casi al mismo tiempo, la física impulsa la misma idea desde otra dirección: describir *tasa de variación instantánea*. La velocidad de un móvil, concebida inicialmente como media en un intervalo de tiempo, debe definirse en el instante. Esto obliga a pasar del cociente incremental

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \underset{a}{\longrightarrow} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

que puede entenderse como la versión física de la pendiente de la secante que desemboca en la pendiente de la *tangente*.

Analíticamente, puede comprobarse que la recta tangente a  $\text{Gr}(f)$  en  $(a, f(a))$  es la *mejor aproximación afín* de  $f$  cerca de  $a$ . Conocida la ecuación que determina su gráfica, es fácil calcular cuál es esta función, que no es otra que:

$$r(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Más concretamente,  $r(x)$  es el único polinomio de primer grado que cumple

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - r(x)}{x - a} = 0.$$

La identidad anterior puede leerse como sigue: el error cometido al aproximar  $f(x)$  por  $r(x)$  cerca de  $a$  es de *orden* inferior a  $x - a$ .

La lectura geométrica y la analítica son, por tanto, dos caras de la misma moneda: la existencia de  $f'(a)$  asegura que  $f$  es localmente “casi lineal”, y la pendiente de esa linealización coincide con la de la recta tangente en  $(a, f(a))$ .

## 5.1 Definición de derivada

Iniciamos el estudio del cálculo diferencial introduciendo el concepto de derivada de una función, que se obtiene como el límite concreto que acabamos de introducir. Nuestros primeros resultados consistirán en la relación entre derivada y continuidad, y la importancia de las derivadas laterales, en analogía con los límites laterales.

**Definición 5.1.** Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  y  $a \in A \cap A'$ . Consideramos la función

$$f_a : A \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Como  $a \in (A \setminus \{a\})'$ , podemos preguntarnos si  $f_a$  tiene límite en  $a$ . Pues bien, se dice que  $f$  es *derivable en a* si  $f_a$  tiene límite en  $a$ . En tal caso, dicho límite recibe el nombre de *derivada de f en a* y se denota por

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Dado  $B \subseteq A \cap A'$ , decimos que  $f$  es *derivable en B* si es derivable en todo punto de  $B$ .

Sea  $A_1 \subseteq A \cap A'$  el conjunto de puntos donde  $f$  es derivable. Si  $A_1 \neq \emptyset$ , podemos definir la *función derivada* de  $f$  como

$$f' : A_1 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f'(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Resaltamos que no tiene sentido discutir la derivabilidad de una función en puntos donde no está definida ni en sus puntos aislados. El caso más interesante es cuando  $A$  es un intervalo no trivial de  $\mathbb{R}$ , ya que  $A \subseteq A'$  y, por tanto, podemos hablar de derivada en todo punto de  $A$ .

Como los límites son invariantes por traslaciones, podemos hacer el cambio de variable  $x = a + h$ , de modo que si  $x \rightarrow a$  entonces  $h \rightarrow 0$ , y obtenemos una definición equivalente de derivada que a veces resulta útil para hacer los cálculos:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

**Proposición 5.2.** Si  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  es derivable en  $a \in A \cap A'$ , entonces  $f$  es continua en  $a$ .

### Demostración

La demostración es bien sencilla. Como  $a \in A \cap A'$ , será continua en  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$

$f(a)$ , y vemos que

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0.$$

Dicho en modo equivalente, si  $f$  no es continua en  $a$ , no puede ser derivable en  $a$ . ■

El carácter local del límite funcional se traslada inmediatamente a la derivada. Nótese que en esta proposición no necesitamos eliminar el punto base del subconjunto  $B$ , pues  $f|_B$  tiene que estar definida en dicho punto.

**Proposición 5.3** (Carácter local de la derivabilidad). Sean  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una función,  $B \subset A$  y  $b \in B \cap B' \subset A \cap A'$ .

- (I) Si  $f$  es derivable en  $b$ , entonces  $f|_B$  es derivable en  $b$ , con  $(f|_B)'(b) = f'(b)$ .
- (II) Si  $f|_B$  es derivable en  $b$  y existe  $\delta > 0$  tal que  $(b - \delta, b + \delta) \cap A \subset B$ , entonces  $f$  es derivable en  $b$ .

Como en otras situaciones previas, el carácter local suele aplicarse tomando un intervalo abierto  $I$  de  $\mathbb{R}$  tal que  $b \in I$  y

$$B = I \cap A,$$

con lo que  $f$  es derivable en  $b$  si, y sólo si, lo es  $f|_B$ , en cuyo caso ambas derivadas coinciden.

Usando límites laterales llegamos lógicamente a las *derivadas laterales*. Recordamos que el estudio de estos sólo tiene interés cuando  $A$  se acumula a ambos lados del punto en cuestión. Por tanto, para estudiar las derivadas laterales nos restringimos a ese único caso que interesa.

**Definición 5.4.** Sea  $a \in A \cap A' \cap (A_a^+)' \cap (A_a^-)'$ . Decimos que  $f$  es *derivable por la izquierda* en  $a$  si  $f_a$  tiene límite en  $a$  por la izquierda, y *derivable por la derecha* en  $a$  si  $f_a$  tiene límite por la derecha en  $a$ . En esos casos, escribimos

$$f'(a+) = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{y} \quad f'(a-) = \lim_{x \rightarrow a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

La relación entre el límite ordinario y los límites laterales nos da directamente la siguiente relación:

**Proposición 5.5.** Para  $L \in \mathbb{R}$  se tiene  $f'(a) = L \iff f'(a+) = f'(a-) = L$ . ■

Las derivadas laterales permiten precisar aún más la relación con la continuidad, como muestra el siguiente resultado.

**Proposición 5.6.** Si existe  $f'(a+)$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a)$ , y si existe  $f'(a-)$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = f(a)$ . En particular, si existen ambas derivadas laterales, aunque no coincidan,  $f$  es continua en  $a$ . ■

### Ejemplo

**Problema.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Probar que  $f$  es derivable en  $\mathbb{R}$  con derivada  $f'(x) = 2ax + b$ .

**Resolución.** Para  $y \neq x$  consideramos el cociente incremental:

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \frac{a(y^2 - x^2) + b(y - x)}{y - x} = a(y + x) + b.$$

Haciendo  $y \rightarrow x$  obtenemos

$$f'(x) = \lim_{y \rightarrow x} (a(y + x) + b) = 2ax + b, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Como caso particular, si  $a = b = 0$  la función es constante  $f = c$  y entonces  $f'(x) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

### Ejemplo

**Problema.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = |x|$ . Probar que  $f$  es derivable en  $\mathbb{R}^*$  y no en 0, con derivada

$$f'(x) = \operatorname{sgn}(x) = \frac{x}{|x|} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

**Resolución.** Por el carácter local de la derivabilidad,  $f$  es derivable en  $\mathbb{R}^+$  ya que  $f|_{\mathbb{R}^+}(x) = x$ , y se tiene  $f'(x) = 1$ . Análogamente,  $f$  es derivable en  $\mathbb{R}^-$  con  $f'(x) = -1$ . En  $x = 0$  calculamos las derivadas laterales:

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1, \quad f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$$

Existen ambas derivadas laterales pero no coinciden, luego  $f$  no es derivable en 0 (aunque sí es continua en 0).

## 5.2 Reglas de derivación

Pasamos a presentar las reglas de cálculo de derivadas, que a su vez nos permitirán ampliar el catálogo de funciones derivables que conocemos. Empezamos naturalmente con la suma y el producto de funciones derivables.

**Proposición 5.7.** Sean  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$  funciones derivables en un punto  $a \in A \cap A'$ . Entonces:

- (I) La función  $f + g$  es derivable en  $a$ , con  $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$ .
- (II) (Regla de Leibniz) La función  $fg$  es derivable en  $a$ , con  $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ .
- (III) Para  $\lambda \in \mathbb{R}$ , la función  $\lambda f$  es derivable en  $a$  con  $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$ .

### Demostración

- (i) Para  $x \in A \setminus \{a\}$ ,

$$\frac{(f + g)(x) - (f + g)(a)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \frac{g(x) - g(a)}{x - a},$$

y pasando a límite cuando  $x \rightarrow a$  se obtiene  $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$ .

(ii) De nuevo, para  $x \in A \setminus \{a\}$ ,

$$\frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} g(x) + f(a) \frac{g(x) - g(a)}{x - a}.$$

Como  $g$  es continua en  $a$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$ , y tomando límites:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

(iii) Basta aplicar (ii) al producto con  $g \equiv \lambda$ , usando que  $g'(a) = 0$ . ■

Vemos ahora la regla de derivación de un cociente.

**Proposición 5.8.** Sean  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones derivables en un punto  $a \in A \cap A'$ . Supongamos que  $g(a) \neq 0$  y sea

$$B = \{x \in A : g(x) \neq 0\}.$$

Entonces  $a \in B \cap B'$  y la función  $f/g : B \rightarrow \mathbb{R}$  es derivable en  $a$  con

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

### Demostración

Como  $g$  es continua en  $a$  y  $g(a) \neq 0$ , por conservación del signo tenemos un  $\delta > 0$  tal que  $g(x) \neq 0$  en  $(a - \delta, a + \delta) \cap A$ . Así  $(a - \delta, a + \delta) \cap A \subset B$  y  $a \in B \cap B'$ , lo que nos permite estudiar la diferenciabilidad en  $a$  restringiendo  $f/g$  a  $B$ , por su carácter local.

Para  $x \in B \setminus \{a\}$  escribimos

$$\frac{(f/g)(x) - (f/g)(a)}{x - a} = \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{g(x)g(a)(x - a)} = \frac{(f(x) - f(a))g(a) - f(a)(g(x) - g(a))}{g(x)g(a)(x - a)}.$$

Tomando límites y usando la derivabilidad de  $f$  y  $g$  en  $a$  (y que  $g(x) \rightarrow g(a) \neq 0$ ),

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(f/g)(x) - (f/g)(a)}{x - a} = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$
■

Las reglas anteriores nos permiten deducir fácilmente la derivabilidad de las funciones racionales. Empezamos probando por inducción cómo se deriva un monomio de grado  $k \in \mathbb{N}$ .

### Ejemplo

Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , la función  $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_k(x) = x^k$ , es derivable en  $\mathbb{R}$  y

$$f'_k(x) = k x^{k-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Resolución.** Por inducción en  $k$ . El caso  $k = 1$  está hecho en un ejemplo anterior.

Supongamos cierta la fórmula para  $k \in \mathbb{N}$  y consideremos  $f_{k+1}(x) = x^{k+1} = x \cdot x^k$ . Por la regla del producto,

$$f'_{k+1}(x) = (x)' x^k + x (x^k)' = 1 \cdot x^k + x \cdot kx^{k-1} = (k+1)x^k,$$

como queríamos.

Usando el ejemplo recién probado y la regla de derivación de la suma, es fácil adivinar que las funciones polinómicas son derivables y cómo se obtienen sus funciones derivadas. Más en general, tenemos:

**Proposición 5.9.** Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una función racional, esto es,

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad \forall x \in A,$$

donde  $P$  y  $Q$  son polinomios y  $Q(x) \neq 0$  para todo  $x \in A$ . Suponiendo  $A \cap A' \neq \emptyset$ , la regla del cociente garantiza que  $f$  es derivable en  $A \cap A'$  y

$$f'(x) = \frac{P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x)}{Q(x)^2} \quad \forall x \in A \cap A'.$$

■

**Proposición 5.10** (Regla de la cadena). Sean  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f(A) \subset B$ . Sea  $a \in A \cap A'$  y  $b = f(a)$ , y supongamos además que  $b \in B'$ . Si  $f$  es derivable en  $a$  y  $g$  es derivable en  $b$ , entonces  $g \circ f$  es derivable en  $a$  y

$$(g \circ f)'(a) = g'(b) f'(a) = g'(f(a)) f'(a).$$

### Demostración

Definimos la función  $\Phi : B \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\Phi(y) = \begin{cases} \frac{g(y) - g(b)}{y - b} & \text{si } y \neq b, \\ g'(b) & \text{si } y = b. \end{cases}$$

Como  $g$  es derivable en  $b$ , la función  $\Phi$  es continua en  $b$ . Para  $x \in A \setminus \{a\}$ , tomando  $y = f(x) \in B$ , tenemos

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} = \frac{g(y) - g(b)}{x - a} = \Phi(y) \frac{y - b}{x - a} = (\Phi \circ f)(x) \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Como  $f$  es derivable en  $a$ , es continua en  $a$ ; y como  $\Phi$  es continua en  $b = f(a)$ , la composición  $\Phi \circ f$  es continua en  $a$ . Pasando al límite cuando  $x \rightarrow a$ ,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} = \underbrace{(\Phi \circ f)(a)}_{= \Phi(b) = g'(b)} \underbrace{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}_{= f'(a)} = g'(b) f'(a),$$

como queríamos.

■

**Una sutileza:** Exigir  $b = f(a) \in B'$  es necesario para hablar de la derivada de  $g$  en  $b$ . Sin embargo, aún si  $b$  fuese un punto aislado de  $B$ , tiene sentido considerar  $(g \circ f)'(a)$ .

En tal caso, sabemos que existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $(b - \varepsilon, b + \varepsilon) \cap B = \{b\}$ . Por la continuidad de  $f$  en  $a$ , existe  $\delta > 0$  con  $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$ , y por tanto  $f(x) = b$  cerca de  $a$ . Así,  $g \circ f$  es constante en torno a  $a$ . El carácter local de la derivabilidad nos dice que entonces  $g \circ f$  es derivable en  $a$  con

$$(g \circ f)'(a) = 0,$$

sin necesidad de hipótesis adicionales sobre  $g$ . En esencia, estamos derivando una función constante.

**Proposición 5.11** (Derivabilidad de la función inversa). Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una función inyectiva, sea  $B = f(A)$  y consideremos la función inversa  $f^{-1} : B \rightarrow \mathbb{R}$ . Supongamos que  $f$  es derivable en un punto  $a \in A \cap A'$  y sea  $b = f(a)$ . Entonces  $b \in B'$  y son equivalentes:

- (i)  $f'(a) \neq 0$  y  $f^{-1}$  es continua en  $b$ .
- (ii)  $f^{-1}$  es derivable en  $b$ .

En tal caso,

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

### Demostración

En primer lugar, probamos que  $b \in B'$ . Como  $a \in A'$  existe una sucesión  $\{x_n\} \subset A \setminus \{a\}$  con  $\{x_n\} \rightarrow a$ . Por la continuidad de  $f$  en  $a$  (derivabilidad  $\Rightarrow$  continuidad) se tiene  $\{f(x_n)\} \rightarrow b$  y, por inyectividad de  $f$ ,  $f(x_n) \neq b$ . Así, hay una sucesión de puntos de  $B$  distintos de  $b$ , que converge a  $b$ ; por tanto  $b \in B'$ .

**(i)  $\Rightarrow$  (ii)** Sea  $\{b_n\} \subset B \setminus \{b\}$  con  $\{b_n\} \rightarrow b$ . Queremos demostrar que se cumple

$$\frac{f^{-1}(b_n) - f^{-1}(b)}{b_n - b} \rightarrow \frac{1}{f'(a)}.$$

Definimos  $a_n = f^{-1}(b_n) \in A \setminus \{a\}$ . La continuidad de  $f^{-1}$  en  $b$  da  $\{a_n\} \rightarrow f^{-1}(b) = a$ . Como  $f(a_n) = b_n$  y  $f(a) = b$ , obtenemos

$$\frac{f^{-1}(b_n) - f^{-1}(b)}{b_n - b} = \frac{a_n - a}{f(a_n) - f(a)}.$$

Usando la derivabilidad de  $f$  en  $a$  y que  $f'(a) \neq 0$ , tenemos

$$\frac{f(a_n) - f(a)}{a_n - a} \rightarrow f'(a) \quad \Rightarrow \quad \frac{a_n - a}{f(a_n) - f(a)} \rightarrow \frac{1}{f'(a)}.$$

**(ii)  $\Rightarrow$  (i).** Si  $f^{-1}$  es derivable en  $b$ , entonces es continua en  $b$ .

Para ver que  $f'(a) \neq 0$ , aplicamos la regla de la cadena a  $f^{-1} \circ f = \text{id}_A$  en  $a$ :

$$1 = (\text{id}_A)'(a) = (f^{-1} \circ f)'(a) = (f^{-1})'(b) f'(a).$$

Luego  $f'(a) \neq 0$  y, además,  $(f^{-1})'(b) = 1/f'(a)$ . ■

**Ejemplo**

Dado  $q \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ , la función  $g_q(x) = \sqrt[q]{x}$  es derivable en  $\text{Dom}(g_q) \setminus \{0\}$  con

$$g'_q(x) = \frac{\sqrt[q]{x}}{q x}.$$

**Resolución.** Como es natural, el dominio de definición de  $g_q$  depende de la paridad de  $q$ , que determina a su vez el dominio de  $f_q(x) = x^q$  del cual  $g_q$  es inversa. Para agrupar ambos casos, ponemos

$$A_q = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{si } q \text{ es impar,} \\ [0, +\infty), & \text{si } q \text{ es par.} \end{cases}$$

En ambos casos  $A_q$  es un intervalo y la función  $f_q : A_q \rightarrow \mathbb{R}$  es estrictamente creciente, luego  $f^{-1}$  existe y es continua en  $f_q(A_q) = A_q$ .

Además,  $f_q$  es derivable en  $A_q$  con  $f'_q(x) = qx^{q-1}$ . Por tanto,  $f'_q(x) \neq 0$  cuando  $x \neq 0$ , esto es, en  $A_q \setminus \{0\}$ .

Se tiene  $f_q(A_q \setminus \{0\}) = A_q \setminus \{0\}$ . Tomemos pues  $y \in A_q \setminus \{0\}$ . Usando la regla de derivación de la función inversa:

$$(g_q)'(y) = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{q f^{-1}(y)^{q-1}} = \frac{1}{q (\sqrt[q]{y})^{q-1}} = \frac{\sqrt[q]{y}}{q y}.$$

### 5.3 Teorema del Valor Medio

Las siguientes definiciones son tan intuitivas que no precisan motivación alguna:

**Definición 5.12.** Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ .

- Diremos que  $f$  tiene un *máximo absoluto* en  $a \in A$  si  $f(a)$  es el máximo del conjunto  $f(A)$ , esto es, si  $f(a) \geq f(x)$  para todo  $x \in A$ .
- Diremos que  $f$  tiene un *mínimo absoluto* en  $a \in A$  si  $f(a)$  es el mínimo del conjunto  $f(A)$ , esto es,  $f(a) \leq f(x)$  para todo  $x \in A$ .
- Diremos que  $f$  tiene un *extremo absoluto* en  $a$  si  $f$  tiene en  $a$  un máximo absoluto o un mínimo absoluto.

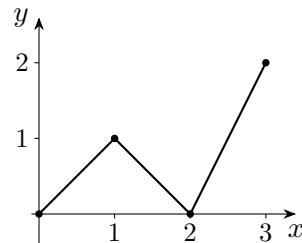
**Definición 5.13.** Para  $A \subset \mathbb{R}$ , un punto  $a \in A$  es *interior* a  $A$  si existe  $r > 0$  tal que  $(a - r, a + r) \subset A$ . Denotamos por  $A^\circ$  al conjunto de puntos interiores de  $A$ , también llamado el *interior* de  $A$ .

**Definición 5.14.** Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ .

- Diremos que  $f$  tiene un *máximo relativo* en  $a \in A$  si existe  $\delta > 0$  tal que  $(a - \delta, a + \delta) \subset A$  y  $f(a) \geq f(x)$  para todo  $x \in (a - \delta, a + \delta)$ .
- $f$  tiene un *mínimo relativo* en  $a$  si  $f(a) \leq f(x)$  para todo  $x$  en dicho intervalo.
- Un *extremo relativo* es un máximo relativo o un mínimo relativo.

En vista de la definición anterior, solo hablamos de extremos relativos en puntos interiores de  $A$ . Para ilustrar la diferencia entre extremos absolutos y relativos, consideraremos el siguiente ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2, \\ 2x - 4, & 2 < x \leq 3. \end{cases}$$



En vista de la gráfica, no es difícil intuir que  $f$  tiene

- En  $x = 0$ , un mínimo absoluto que no es relativo.
- En  $x = 1$ , un máximo relativo que no es absoluto.
- En  $x = 2$ , un mínimo absoluto y relativo.
- En  $x = 3$ , un máximo absoluto que no es relativo.

Intuitivamente, vemos claro que si  $f$  tiene un extremo relativo en un punto en el que puede definirse la recta tangente a su gráfica, esta será horizontal. Esta idea nos lleva a la siguiente condición necesaria para que una función derivable tenga un extremo relativo.

**Proposición 5.15.** Si  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  tiene un extremo relativo en  $a \in A$  y  $f$  es derivable en  $a$ , entonces  $f'(a) = 0$ .

### Demostración

Supongamos que  $f$  tiene un máximo relativo en  $a$ . Entonces existe  $\delta > 0$  tal que  $(a - \delta, a + \delta) \subset A$  y  $f(a) \geq f(x)$  para todo  $x$  de ese intervalo. De aquí,

$$a - \delta < x < a \Rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0, \quad a < x < a + \delta \Rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0.$$

De la primera inecuación deducimos que  $f'(a-) \geq 0$  y de la segunda que  $f'(a+) \leq 0$ .

Si  $f$  es derivable en  $a$ ,  $f'(a+) = f'(a-) = f'(a)$ , lo que implica que  $f'(a) = 0$ .

Si  $f$  tiene en  $a$  un mínimo relativo, aplicamos lo anterior a  $-f$ , que tiene un máximo relativo en  $a$ . Entonces  $0 = (-f)'(a) = -f'(a)$ , es decir,  $f'(a) = 0$ . ■

**Ejercicio:** Dar un ejemplo de una función no constante que tenga un máximo relativo en todos sus puntos.

Aunque el resultado anterior solo permite encontrar extremos relativos, puede usarse para obtener una regla práctica para optimizar una función, es decir, encontrar su máximo y mínimo absoluto, si es que los tiene. Basta pensar en qué condiciones debe cumplir un punto de extremo absoluto para no ser detectado por la proposición anterior.

**Regla práctica:** Si  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  tiene un extremo absoluto en  $a \in A$ , entonces necesariamente  $a$  está en una de las siguientes situaciones:

- (1)  $a \notin A^\circ$ ;
- (2)  $a \in A^\circ$  y  $f$  no es derivable en  $a$ ;

(3)  $a \in A^\circ$  y  $f'(a) = 0$ .

En la práctica, el conjunto de puntos que cumplen una de las tres condiciones anteriores suele ser finito, lo que nos permite encontrar los extremos absolutos de  $f$  simplemente comparando las imágenes de dichos puntos.

### Ejemplo

**Problema.** Calcular los extremos absolutos y relativos de  $f(x) = x^2 - 2|x|$  en el intervalo  $[-2, 2]$ .

**Resolución.** Como  $f$  es una función continua,  $f([-2, 2])$  es un intervalo cerrado y acotado por el teorema de Weierstrass. Por lo tanto  $f$  alcanza su máximo y su mínimo en  $[-2, 2]$ .

Para encontrar los extremos absolutos, construimos nuestro conjunto de *candidatos* usando la regla anterior:

① **Puntos no interiores:**  $x = -2$  y  $x = 2$ .

② **Puntos interiores donde  $f$  no es derivable.**

Para  $x \neq 0$ ,  $f$  es derivable porque  $x^2$  y  $|x|$  lo son. En  $x = 0$  vemos fácilmente que  $f'(0+) = 1$  y  $f'(0-) = -1$ , por lo que  $f$  no es derivable en 0. Añadimos este punto a nuestro conjunto de sospechosos.

③ **Puntos interiores que cumplan  $f'(x) = 0$ .**

Para  $x \neq 0$ , tenemos que

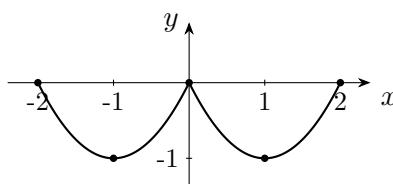
$$f'(x) = 0 \iff 2x - 2 \frac{|x|}{x} = 0 \iff x^2 = |x|.$$

Si  $x > 0$ , la ecuación anterior es equivalente a  $x^2 = x$ , que tiene como única solución  $x = 1$ . En cambio, si  $x < 0$ , se tiene  $x^2 = -x$  y por tanto  $x = -1$ .

Candidatos a extremos absolutos:  $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ . Comparamos las imágenes, teniendo en cuenta que  $f$  es una función par ( $f(x) = f(-x)$ ):

$$f(-2) = f(2) = 0, \quad f(-1) = f(1) = -1, \quad f(0) = 0.$$

Por tanto,  $f$  tiene mínimos absolutos y relativos en 1 y  $-1$ , un máximo absoluto y relativo en 0 y máximos absolutos en  $-2$  y 2.



Con el objetivo de abreviar los enunciados que aparecerán a partir de ahora, introducimos una notación que recoja las distintas hipótesis de continuidad y derivabilidad que usaremos.

Sea  $A \subset \mathbb{R}$  y  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Denotamos por  $C(A)$  al subconjunto de  $\mathcal{F}(A)$  de las funciones continuas en  $A$ , y  $D(A)$  al subconjunto de este formado por las funciones derivables en  $A$ ,

teniéndose

$$D(A) \subset C(A) \subset \mathcal{F}(A).$$

Cuando  $A^\circ \neq \emptyset$ , una hipótesis que aparecerá a menudo será que  $f$  sea derivable en  $A^\circ$ . Abusando de la notación, esto lo escribiremos como  $f \in D(A^\circ)$ , entendiendo que  $f|_{A^\circ}$  es una función derivable en  $A^\circ$ . Por tanto, si pedimos que una función  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  sea continua en todo  $A$  pero derivable solo en los puntos de  $A^\circ$ , escribiremos simplemente  $f \in C(A) \cap D(A^\circ)$ .

Uno podría preguntarse por la posibilidad de trabajar con la hipótesis más cómoda  $f \in D[a, b]$ , pero entonces estaríamos descartando funciones tan elementales como  $x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$  para  $x \in [-1, 1]$ , que no son derivables en los extremos de los intervalos donde están definidas y aún así satisfacen todas las propiedades que listaremos a continuación.

Comenzamos sacando partido a la condición  $f'(a) = 0$  que se tiene en los extremos relativos  $a$  donde  $f$  es derivable, poniéndonos en una situación en la que podamos garantizar la existencia de estos.

**Teorema 5.16** (Teorema de Rolle). Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$  y  $f \in C[a, b] \cap D(a, b)$  tales que  $f(a) = f(b)$ . Entonces existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$ .

### Demostración

Por ser  $f$  continua en  $[a, b]$ , el teorema de Weierstrass garantiza que  $f([a, b])$  tiene mínimo y máximo, esto es, existen  $m, M \in [a, b]$  con  $f(m) = \min f([a, b])$  y  $f(M) = \max f([a, b])$ .

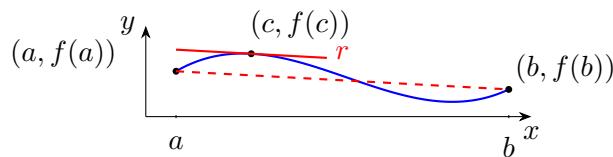
Si  $m \in (a, b)$ , entonces serán además un mínimo relativo, y por tanto  $f'(m) = 0$ , proporcionándonos el  $c$  que buscábamos, y lo mismo ocurre si  $M \in (a, b)$ .

Si esto no ocurre, es porque  $m$  y  $M$  son los extremos del intervalo  $[a, b]$ . Pero entonces, dado que  $f(a) = f(b)$ , se tiene que  $\min f([a, b]) = \max f([a, b])$ , luego  $f$  es constante en  $[a, b]$ . Por tanto  $f'(x) = 0$  en todo  $(a, b)$ . ■

A continuación enunciamos y demostramos uno de los teoremas más importantes del cálculo diferencial.

**Teorema 5.17** (Teorema del valor medio). Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$  y  $f \in C[a, b] \cap D(a, b)$ . Entonces existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$



### Demostración

La intuición geométrica de esta demostración es clara: entre los puntos  $(a, f(a))$  y  $(b, f(b))$  existe un  $(c, f(c))$  de forma que la recta tangente a  $\text{Gr } f$  en  $(c, f(c))$  es paralela a la recta secante que une  $(a, f(a))$  con  $(b, f(b))$ . Esto además nos da una pista de

cómo demostrar el resultado: restando a  $f$  dicha recta secante

$$r(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

y aplicando el teorema de Rolle a la función resultante.

Consideramos pues la función  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$g(x) = f(x) - r(x) \quad (x \in [a, b]).$$

Claramente  $g \in C[a, b] \cap D(a, b)$  y

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad x \in (a, b).$$

Además,  $g(a) = g(b) = 0$ , lo que nos permite aplicar el teorema de Rolle para obtener un  $c \in (a, b)$  con  $g'(c) = 0$ . Por tanto  $f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$ , como queríamos. ■

**Nota:** Al igual que sucedía con el teorema de Bolzano y el del valor intermedio, el teorema del valor medio implica a Rolle como caso particular tomando  $f(b) = f(a)$  y, a su vez, el teorema de Rolle permite demostrar el teorema del valor medio.

**Ejercicio:** Sea  $f \in D[0, 1]$  verificando que  $f(0) = 0$  y  $|f'(x)| \leq |f(x)|$  para todo  $x \in [0, 1]$ . Probar que  $f(x) = 0$  para todo  $x \in [0, 1]$ .

Pasamos a comentar algunas consecuencias importantes del teorema del valor medio. Empezamos estudiando cómo el signo de  $f'$  determina la monotonía de  $f$ , lo que a su vez nos permite detectar extremos relativos.

**Proposición 5.18.** (De la derivabilidad a la monotonía) Sea  $I$  un intervalo no trivial y  $f \in C(I) \cap D(I^\circ)$ . Entonces

$$\begin{aligned} f \text{ es creciente en } I &\iff f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I^\circ, \\ f \text{ es decreciente en } I &\iff f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I^\circ. \end{aligned}$$

### Demostración

Demostramos solo el caso en que  $f$  es creciente, pues el segundo se puede obtener aplicando el anterior a  $-f$ .

⇒ Sea  $x \in I^\circ$ .

- Si  $h > 0$ , como  $f$  es creciente,  $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$ .
- Si  $h < 0$ , entonces  $f(x+h) \leq f(x)$  y, al dividir por  $h < 0$ ,  $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$ .

Tomando  $h \rightarrow 0$ , se obtiene  $f'(x) \geq 0$ .



Tomemos  $y < z$  en  $I$ . Por el TVM aplicado en  $[y, z]$ ,

$$f(z) - f(y) = f'(c)(z - y) \quad \text{para algún } c \in (y, z) \subset I^\circ.$$

Como  $f'(c) \geq 0$  y  $z - y > 0$ , se sigue  $f(z) \geq f(y)$ . ■

**Proposición 5.19.** De la derivabilidad a la monotonía estricta] Sea  $I$  un intervalo no trivial y  $f \in C(I) \cap D(I^\circ)$ . Si  $f'(x) \neq 0$  para todo  $x \in I^\circ$ , entonces  $f$  es estrictamente monótona en  $I$ .

En tal caso, si  $f$  es estrictamente creciente, entonces  $f'(x) > 0$  para todo  $x \in I^\circ$ , y  $f'(x) < 0$  en  $I^\circ$  si  $f$  es estrictamente decreciente.

### Demostración

Veamos que si  $f'(x) \neq 0$  en  $I^\circ$ , entonces  $f$  es inyectiva, lo que sumado a la continuidad de  $f$  nos dará la monotonía estricta.

Tomamos  $x \neq y$  en  $I$ . Por el teorema del valor medio existe  $c \in (x, y) \subset I^\circ$  con

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x).$$

Si  $f(y) = f(x)$ , se tendría  $f'(c) = 0$ , contradicción. Luego  $f$  es inyectiva en  $I$ .

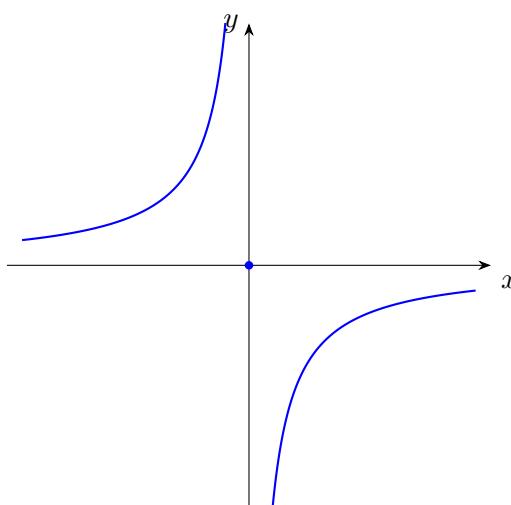
Si  $f$  es estrictamente creciente, por la Proposición 5.18 se tiene  $f'(x) \geq 0$  en  $I^\circ$ ; como nunca se anula, en realidad  $f'(x) > 0$  en  $I^\circ$ . Análogamente, si  $f$  es estrictamente decreciente, entonces  $f'(x) < 0$  en  $I^\circ$ . ■

**Nota:** Obsérvese que al hablar de monotonía estricta perdemos la afirmación recíproca; que una función  $f$  sea derivable en un intervalo y estrictamente monótona no implica que  $f'$  no se anule en dicho intervalo.

Encontramos un contraejemplo sencillo en la función  $f(x) = x^3$  definida para todo  $x \in \mathbb{R}$ , que es estrictamente creciente en  $\mathbb{R}$  pero  $f'(0) = 0$ .

★ **Ejercicio:** Sea  $I$  un intervalo no trivial,  $a \in I^\circ$  y  $f \in C(I) \cap D(I^\circ \setminus \{a\})$  tal que  $f'(x) > 0$  para todo  $x \in I^\circ \setminus \{a\}$ . Probar que  $I$  es estrictamente creciente en  $I$ .

**Importante:** Nótese que este resultado es falso en general si prescindimos de la hipótesis de que  $f$  es continua en  $a$ . No es difícil dar un contraejemplo:  $f(x) = -\frac{1}{x}$  para  $x \neq 0$  y  $f(0) = 0$ .



Tenemos  $f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0$  para todo  $x \neq 0$ , lo que nos dice que  $f$  es estrictamente creciente en  $(-\infty, 0)$  y en  $(0, +\infty)$ , pero no podemos concluir que  $f$  sea estrictamente creciente en  $\mathbb{R}$ .

Si  $f'$  es idénticamente nula, entonces  $f$  es a la vez creciente y decreciente en  $I$ , lo que implica que es constante por el teorema del valor intermedio. Por supuesto, el recíproco es trivialmente cierto.

**Proposición 5.20.** Sea  $I$  un intervalo no trivial y  $f \in C(I) \cap D(I^\circ)$ . Entonces  $f$  es constante si, y solo si,  $f'(x) = 0$ . ■

**Nota:** Este corolario resalta la importancia de que las funciones con las que trabajamos estén definidas en un intervalo de  $\mathbb{R}$ . Por ejemplo, la función  $\text{sgn} : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  verifica  $\text{sgn}'(x) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^*$ , pero  $f$  no es constante en  $\mathbb{R}^*$  (aunque, a poco que se piense, sí lo será en cada intervalo contenido en  $\mathbb{R}^*$ ). Otro contrajejemplo importante es la función parte entera.

**Proposición 5.21.** Sea  $J = (a - \delta, a + \delta)$  con  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\delta > 0$ , y sea  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $J$  y derivable en  $J \setminus \{a\}$ . Si

$$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a - \delta, a) \quad \text{y} \quad f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, a + \delta),$$

entonces  $f$  tiene un *máximo absoluto* en  $a$ . (Con las desigualdades invertidas se obtiene un *mínimo absoluto* en  $a$ .)

### Demostración

Por la Proposición 5.18,  $f$  es creciente en  $(a - \delta, a)$  y decreciente en  $(a, a + \delta)$ . Por tanto

- $f(x) \leq f(a)$  para todo  $x \in (a - \delta, a)$  porque  $f$  es creciente, y
- $f(x) \leq f(a)$  para todo  $x \in (a, a + \delta)$ , por ser decreciente.

Por tanto,  $f(x) \leq f(a)$  para todo  $x \in J$ , lo que nos permite concluir que  $f(a)$  es el máximo de  $f$  en  $J$ . ■

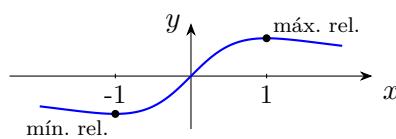
**Ejemplo**

**Problema.** Estudiar los extremos relativos de  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$  en  $\mathbb{R}$ .

**Resolución.** Como  $f \in D(\mathbb{R})$ , y  $\mathbb{R}^\circ = \mathbb{R}$ , los extremos relativos satisfacen todos la ecuación  $f'(x) = 0$ . Usando las reglas de derivación, vemos inmediatamente que:

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

De  $f'(x) = 0$  se obtiene  $x = \pm 1$  como únicos puntos críticos. Además, se tiene  $f'(x) \geq 0$  para  $x \in [-1, 1]$  y  $f'(x) \leq 0$  cuando  $|x| \geq 1$ . Usando la Proposición 5.21 en  $a = -1$  y  $a = 1$  con  $\delta = 2$  concluimos que  $f$  tiene un mínimo relativo en  $x = -1$  y un máximo relativo en  $x = 1$ .

**Ejemplo**

**Problema.** Calcular el número de soluciones de la ecuación  $x = \arctan x$  para  $x \in \mathbb{R}$ .

**Resolución.** Sea  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g(x) = x - \arctan x$ . Claramente, el número de soluciones de la ecuación anterior coincide con el número de valores  $x$  satisfaciendo  $g(x) = 0$ .

En primer lugar, probaremos que  $g$  es inyectiva, lo que nos permitirá concluir que, como mucho  $g$  tiene un cero. Comprobar esta propiedad mediante la definición es una ardua tarea, pero podemos aprovechar que  $g$  es derivable para obtener la inyectividad como consecuencia de su monotonía estricta.

Sabemos que  $g$  es derivable por ser suma de funciones derivables, y se tiene

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = 0 \iff x = 0.$$

De  $g'(x) > 0$  en  $(-\infty, 0)$  y en  $(0, +\infty)$ , concluimos que  $g$  es estrictamente creciente en  $\mathbb{R}^-$  y en  $\mathbb{R}^+$ . Como  $g$  es continua en 0, podemos concluir que  $g$  es estrictamente creciente en todo  $\mathbb{R}$  (véase el ejercicio  $\star$ ).

En efecto:

Sean  $x, y \in \mathbb{R}$  con  $x < y$ . Nuestro objetivo es probar que  $f(x) < f(y)$ . Por supuesto, esto ya lo sabemos si  $0 \leq x < y$  o  $x < y < 0$ , por lo que solo debemos discutir el caso  $x < 0 < y$ .

Aplicando el TVM en  $[x, 0]$  y  $[0, y]$ , existen  $c_1 \in (x, 0)$  y  $c_2 \in (0, y)$  tales que

$$g(0) - g(x) = g'(c_1)(0 - x) > 0, \quad g(y) - g(0) = g'(c_2)(y - 0) > 0.$$

Sumando,  $g(y) - g(x) > 0$ . Por tanto  $g$  es estrictamente creciente en  $\mathbb{R}$  y la ecuación  $g(x) = 0$  tiene *a lo sumo* una solución.

Finalmente, observamos que  $g(0) = 0 - \arctan 0 = 0$ , luego  $x = 0$  es la única solución.

Alternativamente, como

$$-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

se tiene  $g(\frac{\pi}{2}) > 0$  y  $g(-\frac{\pi}{2}) < 0$ , y por el teorema de Bolzano hay un cero en  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , que por inyectividad de  $g$  debe ser único.

**Ejercicio:** Demostrar que existe una única función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$2f(x)^3 - 3f(x)^2 + 6f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Probar que  $f$  es derivable en  $\mathbb{R}$  y calcular  $f'(0)$ .

Como última consecuencia del teorema del valor medio, veamos que las funciones derivadas cumplen la propiedad del valor intermedio, esto es, transforman intervalos en intervalos. Además, obtendremos una importante regla de cálculo de derivadas en un punto a través de límites de la función derivada.

Aunque estas propiedades nos recuerden a las de las funciones continuas, nótese que **en ningún momento asumiremos que  $f'$  es continua**.

**Teorema 5.22** (Teorema de Darboux). Sea  $I$  un intervalo no trivial y sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función derivable en  $I$ . Entonces el conjunto  $f'(I) = \{f'(x) : x \in I\}$  es un intervalo. Por tanto,  $f'$  tiene la propiedad del valor intermedio.

### Demostración

Razonando por reducción al absurdo, supongamos que existen  $a, b \in I$ , y  $\lambda \in \mathbb{R}$  tales que  $f'(a) < \lambda < f'(b)$  pero  $\lambda \notin f'(I)$ .

Construimos la función  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(x) = f(x) - \lambda x$  para todo  $x \in I$ . Esta función es derivable en  $I$  con  $g'(x) = f'(x) - \lambda \neq 0$  para todo  $x \in I$ .

Por tanto,  $g$  es estrictamente monótona, y ocurrirá entonces que, o bien  $g'(x) > 0$  para todo  $x \in I$  si  $g$  es creciente, o bien  $g'(x) < 0$  para todo  $x \in I$  si  $g$  es decreciente.

En ambos casos tenemos una contradicción, ya que  $g'(a) = f'(a) - \lambda < 0$ , mientras que  $g'(b) = f'(b) - \lambda > 0$ .

Para ver que  $f'$  tiene la propiedad del valor intermedio, tomamos un intervalo  $J \subset I$  y aplicamos este resultado a  $f'|_J$ . ■

Cuando una función  $f$  definida en un intervalo  $I$  puede escribirse como  $g'$  para alguna otra función  $g \in D(I)$ , decimos que  $g$  es una primitiva de  $f$ , y por tanto que  $f$  admite una primitiva en  $I$ .

En estos términos, el teorema de Darboux puede leerse como sigue: si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  admite una primitiva, entonces  $f$  tiene la propiedad del valor intermedio.

Esta lectura nos permite concluir inmediatamente que funciones como la parte entera no admiten una primitiva en  $\mathbb{R}$ , puesto que no verifican la propiedad del valor intermedio.

**Proposición 5.23.** Sea  $I$  un intervalo no trivial y  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Dado  $a \in I$ , supongamos que  $f$  es derivable en  $I \setminus \{a\}$ .

- (i) Si  $f'$  tiene límite en  $a$ , entonces  $f$  es derivable en  $a$  con  $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} f'(x)$ .
- (ii) Si  $f'$  diverge a  $\pm\infty$  en  $a$ , entonces  $f$  no es derivable en  $a$ .
- (iii) Supongamos que  $a \in I^\circ$ .
  - Si  $f'$  tiene límite por la izquierda en  $a$ , entonces  $f$  es derivable por la izquierda en  $a$  con  $f'(a-) = \lim_{x \rightarrow a^-} f'(x)$ .
  - Si  $f'$  tiene límite por la derecha en  $a$ , entonces  $f'(a+) = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$ .

Por tanto, si  $f'$  tiene límite por la izquierda y por la derecha en  $a$ , pero dichos límites no son iguales, entonces  $f$  no es derivable en  $a$ .

Finalmente, si  $f$  es derivable en  $I$ , entonces  $f'$  no tiene discontinuidades evitables ni de salto en ningún punto de  $I$ .

### Demostración

Sea  $\{x_n\} \subset I \setminus \{a\}$  con  $\{x_n\} \rightarrow a$ . Para cada  $n$ , definimos

$$I_n = \begin{cases} [x_n, a] & \text{si } x_n < a, \\ [a, x_n] & \text{si } x_n > a. \end{cases}$$

Entonces  $I_n \subset I$  y  $I_n^\circ \subset I \setminus \{a\}$ , luego  $f$  es continua en  $I_n$  y derivable en  $I_n^\circ$ .

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , por el teorema del valor medio existe  $c_n \in I_n^\circ$  tal que

$$\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = f'(c_n), \quad \min\{a, x_n\} < c_n < \max\{a, x_n\}, \quad c_n \rightarrow a.$$

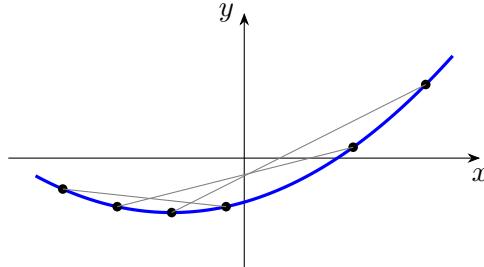
- (i) Si  $L = \lim_{x \rightarrow a} f'(x)$ , entonces  $f'(c_n) \rightarrow L$  y la identidad anterior da la derivabilidad de  $f$  en  $a$  con  $f'(a) = L$ .
- (ii) Si  $\{f'(c_n)\}$  diverge, de la misma identidad se deduce que  $f$  no es derivable en  $a$ .
- (iii) Si  $a \in J^\circ$  y existe  $L_- = \lim_{x \rightarrow a^-} f'(x)$ , tomando  $x_n \uparrow a$  obtenemos  $c_n \uparrow a$  y  $f'(c_n) \rightarrow L_-$ , luego existe  $f'(a-) = L_-$ . De forma análoga para la derecha. Si los límites laterales existen pero no coinciden, las derivadas laterales de  $f$  en  $a$  no coinciden y  $f$  no es derivable en  $a$ .

Por último, si  $f$  es derivable en  $I$ ,  $f'$  no puede tener discontinuidades evitables (contradirían (i)) ni de salto (contradirían (iii)). ■

**Ejercicio.** Sea  $f$  una función derivable en  $(0, +\infty)$ . Probar que si  $f$  y  $f'$  tienen límite en  $+\infty$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ . ¿Es cierto el recíproco? ¿Es cierto el resultado si prescindimos de la hipótesis de que  $f'$  tenga límite en  $+\infty$ ?

## 5.4 Funciones convexas

La noción de función convexa es muy fácil de comprender geométricamente: si  $I$  es un intervalo no trivial, una función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  será convexa cuando, dados dos puntos cualesquiera  $a < b$  en  $I$ , la gráfica de  $f|_{[a,b]}$  queda siempre por debajo del segmento que une  $(a, f(a))$  y  $(b, f(b))$ .



Sabemos que para  $a < b$  en  $I$ , la recta secante a la gráfica de  $f$  que pasa por  $(a, f(a))$  y  $(b, f(b))$  tiene ecuación

$$r(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$$

Por tanto  $f$  será convexa cuando, para cualesquiera  $a, b \in I$  con  $a < b$ , se tenga que

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) \quad \forall x \in [a, b]$$

o equivalentemente,

$$f(x) \leq \frac{b - x}{b - a} f(a) + \frac{x - a}{b - a} f(b) \quad \forall x \in [a, b] \quad (5.1)$$

Nótese que los coeficientes que acompañan a  $f(a)$  y  $f(b)$  en la fórmula anterior se encuentran en  $[0, 1]$ , y además su suma es constantemente igual a 1. Esto nos motiva a escribir

$$\frac{x - a}{b - a} = t \in [0, 1], \quad \frac{b - x}{b - a} = 1 - t \in [0, 1].$$

por lo que queda  $x = (1 - t)a + tb \in [a, b]$  y (5.1) nos dice que

$$f((1 - t)a + tb) \leq (1 - t)f(a) + tf(b) \quad \forall t \in [0, 1]$$

Hemos llegado así a la definición cómoda de función convexa que buscábamos.

**Definición 5.24.** Si  $I$  es un intervalo no trivial, se dice que una función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es *convexa* cuando verifica:

$$f((1 - t)x + ty) \leq (1 - t)f(x) + tf(y) \quad \forall x, y \in I, \quad \forall t \in [0, 1]$$

Por otro lado, decimos que  $f$  es *cóncava* cuando  $-f$  es convexa, es decir, cuando se tiene la desigualdad opuesta ( $\geq$ ).

Nótese que en realidad es suficiente con comprobar la definición para  $t \in (0, 1)$ , pues la desigualdad anterior es trivialmente cierta para  $t = 0$  y  $t = 1$ . De hecho, se da la igualdad en esos puntos.

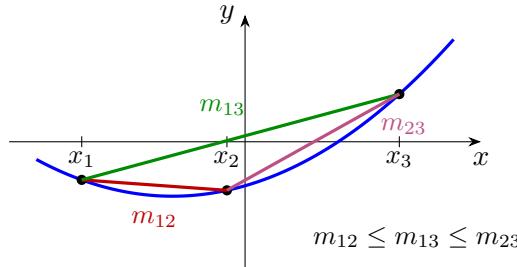
Como ejemplo, la función valor absoluto es convexa, pues evidentemente, por la desigualdad triangular

$$|(1 - t)x + ty| \leq (1 - t)|x| + t|y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in [0, 1].$$

En general, no es sencillo verificar la definición de convexidad, ni siquiera para funciones muy elementales. Lo habitual es usar alguna de las caracterizaciones que vamos a ver a continuación, y reservar la definición para obtener desigualdades nada triviales para funciones que ya sabemos que son convexas.

**Lema 5.25** (de las tres secantes). Sea  $I$  un intervalo no trivial y  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa. Entonces, para cualesquiera  $x_1, x_2, x_3 \in I$ , con  $x_1 < x_2 < x_3$ , se tiene:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$



### Demostración

*Esta demostración no se vio en clase.*

Empezamos aplicando la definición de convexidad con  $a = x_1$ ,  $x = x_2$  y  $b = x_3$  para obtener

$$f(x_2) \leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3).$$

Ahora restamos  $f(x_1)$  en ambos miembros:

$$f(x_2) - f(x_1) \leq \frac{x_1 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3) = (x_2 - x_1) \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1},$$

y al dividir por  $x_2 - x_1 > 0$  tenemos la primera desigualdad:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}.$$

Para la segunda, cambiamos de signo ambos miembros de (5.4), con lo que la desigualdad se invierte, y sumamos en ambos  $f(x_3)$ , obteniendo

$$f(x_3) - f(x_2) \geq \frac{x_2 - x_3}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_3) = (x_3 - x_2) \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1},$$

con lo que basta dividir por  $x_3 - x_2 > 0$ . ■

**Proposición 5.26.** Sea  $I$  un intervalo no trivial y  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa. Entonces, para cada  $a \in I$  la función  $f_a : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{para todo } x \in I \setminus \{a\},$$

es creciente.

**Demostración**

Sean  $a \in I$  y  $x, y \in I \setminus \{a\}$  con  $x < y$ . Para probar que  $f_a(x) \leq f_a(y)$ , distinguimos los tres casos posibles, según cómo estén ordenados los puntos.

- Si  $a < x < y$ , usamos la primera desigualdad del lema de las tres tangentes con  $x_1 = a$ ,  $x_2 = x$ ,  $x_3 = y$ , obteniendo directamente que  $f_a(x) \leq f_a(y)$ .
- Si  $x < y < a$ , usamos la segunda desigualdad con  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = a$ , obteniendo la misma conclusión.
- Finalmente, si  $x < a < y$ , usamos la desigualdad entre el primer y último miembro con  $x_1 = x$ ,  $x_2 = a$ ,  $x_3 = y$ , obteniendo de nuevo  $f_a(x) \leq f_a(y)$ .

■

**Teorema 5.27.** Sea  $I$  un intervalo no trivial y  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa. Entonces  $f$  es derivable por la izquierda y por la derecha, y por tanto es continua, en todo punto  $a \in I^\circ$ . De hecho, se tiene

$$f'(a-) = \sup\{f_a(x) : x \in I, x < a\}, \quad f'(a+) = \inf\{f_a(x) : x \in I, x > a\}.$$

**Demostración**

La demostración solo necesita del hecho que  $f_a$  es una función creciente.

Como  $a \in I^\circ$ , podemos tomar  $b \in I$  con  $b > a$ . Como  $f_a$  es una función creciente, se tiene entonces  $f_a(x) \leq f_a(b)$  para todo  $x < a$ .

Por tanto, el conjunto  $A = \{f_a(x) : x \in I, x < a\}$  está mayorado y podemos considerar

$$s_a = \sup A.$$

Nuestra intención ahora es probar que  $s_a = f'(a^-)$ , es decir, que

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f_a(x) = s_a.$$

Tomamos para ello  $\varepsilon > 0$  y usamos la definición de supremo, que nos garantiza que existe  $x_0 \in A$  (esto es,  $x_0 \in I$  con  $x_0 < a$ ) tal que  $f_a(x_0) > s_a - \varepsilon$ . Tomando  $\delta = a - x_0 > 0$ , para  $x \in (a - \delta, a)$  se tiene

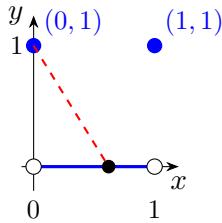
$$s_a - \varepsilon < f_a(x_0) \leq f_a(x) \leq s_a < s_a + \varepsilon,$$

como se quería. El cálculo de la derivada por la derecha es análogo. ■

Como ya se comentó, la existencia de derivadas laterales en todo punto de  $I^\circ$  no nos asegura que una función convexa sea derivable en  $I^\circ$ , ya que estas podrían no coincidir. Por ejemplo, la función valor absoluto es convexa pero no es derivable en 0.

Tampoco podemos asegurar que una función convexa sea continua en los extremos de un intervalo, si los hay. Por ejemplo, tomando  $f(x) = 0$  para todo  $x \in (0, 1)$  y  $f(0) = f(1) = 1$ , obtenemos una función convexa  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  que no es continua en 0 ni en 1.

**Proposición 5.28.** Sea  $I$  un intervalo no trivial y  $f \in D^1(I)$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:



- (i)  $f$  es convexa.
- (ii)  $f'$  es creciente.
- (iii) Para cualesquiera  $a, x \in I$  se tiene que  $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$ .

### Demostración

**(i)  $\Rightarrow$  (ii)** Dados  $a, b \in I$  con  $a < b$ , queremos probar que  $f'(a) \leq f'(b)$ . Para ello basta tomar  $x \in (a, b)$  y usar la proposición anterior.

$$f'(a) = f'(a^+) \stackrel{(2)}{\leq} f_a(x) \stackrel{(3)}{=} f_x(a) \stackrel{(1)}{\leq} f_x(b) \stackrel{(3)}{=} f_b(x) \stackrel{(2)}{\leq} f'(b^-) = f'(b),$$

donde hemos usado que  $f_x$  es una función creciente en (1), las expresiones

$$f'(b^-) = \sup\{f_b(x) : x \in I, x < a\}, \quad f'(a^+) = \inf\{f_a(x) : x \in I, x > a\},$$

en (2) y, en (3), la observación elemental de que

$$f_y(x) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f_x(y).$$

**(ii)  $\Rightarrow$  (iii)** Para  $a, x \in I$  con  $a \neq x$ , el teorema del valor medio nos da un  $c$  estrictamente entre  $a$  y  $x$  de forma que

$$f(x) = f(a) + f'(c)(x - a).$$

Por tanto, bastará ver que  $f'(c)(x - a) \geq f'(a)(x - a)$ .

- Si  $a < c < x$ , al ser  $f'$  creciente, tendremos  $f'(c) \geq f'(a)$ , y basta multiplicar ambos miembros por  $x - a > 0$ .
- Si  $x < c < a$ , entonces  $f'(c) \leq f'(a)$ , pero esta desigualdad se invierte al multiplicar ambos miembros por  $x - a < 0$ .

**(iii)  $\Rightarrow$  (i)** Sean  $x, y \in I$  y  $t \in [0, 1]$ . En este caso, tenemos que probar que

$$f((1 - t)x + ty) \leq (1 - t)f(x) + tf(y).$$

Para ello, tomamos  $a = (1 - t)x + ty \in I$  y aplicamos dos veces (iii), obteniendo:

$$\begin{aligned} (1 - t)f(x) + tf(y) &\geq (1 - t)(f(a) + f'(a)(x - a)) + t(f(a) + f'(a)(y - a)) \\ &= f(a) + f'(a)((1 - t)(x - a) + t(y - a)) \end{aligned}$$

y basta observar que

$$(1 - t)(x - a) + t(y - a) = ((1 - t)x + ty) - (1 - t)a - ta = a - (1 - t)a - ta = 0.$$

■

Recordamos que, para una función derivable en un intervalo, el signo de su derivada caracteriza su monotonía. Por tanto, si  $f'$  es derivable, tenemos:

**Proposición 5.29.** Sea  $I$  un intervalo no trivial y  $f \in D(I)$  tal que  $f' \in D(I^\circ)$ . Entonces  $f$  es convexa si, y sólo si,  $f''(x) \geq 0$  para todo  $x \in I^\circ$ . ■

## 5.5 Las reglas de L'Hôpital

En esta sección estudiaremos un método práctico para resolver indeterminaciones de los tipos  $[0/0]$  o  $[\infty/\infty]$ , conocido como la regla (o reglas) de L'Hôpital.

La llamada regla de L'Hôpital es un buen ejemplo de la famosa *ley de Stigler de la eponimia*, que dice, en esencia, que *ningún descubrimiento científico lleva el nombre de su descubridor original*. De forma irónica, la propia ley lleva el nombre del estadístico S. Stigler, pero suele atribuirse al sociólogo estadounidense R. K. Merton.

Guillaume François Antoine, marqués de L'Hôpital, fue un aristócrata y matemático francés, conocido por ser el autor del primer manual de cálculo diferencial, *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, publicado en 1696. En esta obra aparece una regla para calcular ciertos límites asociados a formas indeterminadas como  $[0/0]$ , que hoy conocemos como *regla de L'Hôpital*, pero cuyo descubrimiento se debe casi con toda seguridad a quien fue su maestro, Johann Bernoulli.

L'Hôpital se convirtió en alumno de Bernoulli en París, donde este último había sido invitado a impartir un curso de cálculo. Bernoulli era un matemático brillante pero con pocos recursos económicos y sin una posición estable, y fruto de su relación con L'Hôpital, en 1694 firmaron un acuerdo por el cual L'Hôpital le pagaba un salario anual de 300 francos a cambio de recibir por carta sus resultados más recientes y poder utilizarlos libremente en sus propios escritos.

La correspondencia conservada sugiere que muchos de los resultados del libro, incluida la regla de cálculo de indeterminaciones mediante derivadas sucesivas, proceden efectivamente de Bernoulli, mientras que el mérito de L'Hôpital reside sobre todo en haberlos organizado y difundido en forma de tratado claro y sistemático.

Tras la muerte de L'Hôpital, Bernoulli empezó a reclamar con fuerza el mérito de muchos resultados del libro, incluida la regla. En una carta de 1707 a Varignon llega a afirmar que L'Hôpital «*no tuvo otra parte en este libro que traducir al francés el material que yo le proporcioné, en su mayor parte en latín*». Durante siglos, esto alimentó la idea de que L'Hôpital había sido poco más que un plagiario que se aprovechó de los descubrimientos de un matemático en una posición inferior a la suya.

Cuando a principios del siglo XX se redescubre y publica el contrato original, los historiadores matizan mucho este juicio: L'Hôpital no fue exactamente un ladrón de ideas, sino alguien que pagó por tener derecho a usarlas y que, además, organizó, pulió y escribió un manual muy claro y didáctico, algo que tampoco es trivial desde el punto de vista matemático e histórico. En la introducción de su libro agradece de forma explícita la ayuda prestada por Bernoulli, y en ningún momento afirma ser el descubridor de los resultados que presenta.

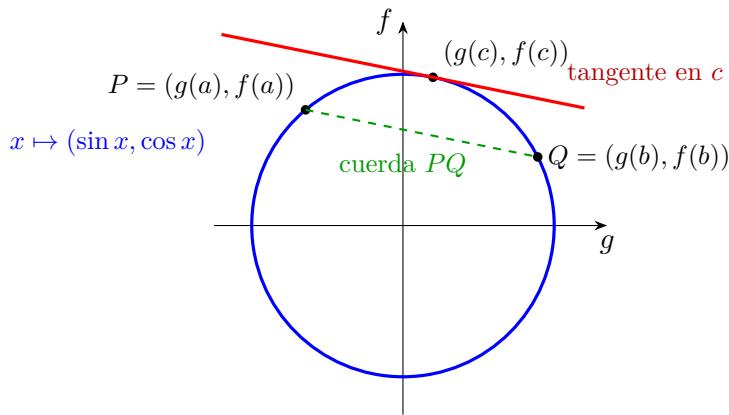
Comenzamos con un resultado que abre el camino a relacionar los cocientes  $f/g$  y  $f'/g'$ , y que puede entenderse como una versión generalizada del teorema de valor medio, descubierta por Cauchy.

**Teorema 5.30** (Teorema del valor medio generalizado). Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$  y  $f, g \in C[a, b] \cap D(a, b)$ . Entonces, existe  $c \in (a, b)$  verificando que:

$$(f(b) - f(a)) g'(c) = (g(b) - g(a)) f'(c)$$

**Interpretación geométrica.** Si representamos la *curva paramétrica*  $x \mapsto (g(x), f(x))$  en el plano  $\mathbb{R}^2$ , los puntos  $P = (g(a), f(a))$  y  $Q = (g(b), f(b))$  definen una cuerda. El teorema asegura que existe  $c \in (a, b)$  tal que la recta *tangente* a la curva en  $(g(c), f(c))$  es *paralela* a la cuerda  $PQ$ ; en efecto,

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$



### Demostración

Consideramos la función  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$h(x) = \begin{vmatrix} 1 & f(x) & g(x) \\ 1 & f(a) & g(a) \\ 1 & f(b) & g(b) \end{vmatrix} = (f(b) - f(a)) g(x) - (g(b) - g(a)) f(x) + f(a) g(b) - f(b) g(a)$$

Es claro que  $h \in C[a, b] \cap D(a, b)$  con

$$h'(x) = (f(b) - f(a)) g'(x) - (g(b) - g(a)) f'(x) \quad \forall x \in (a, b)$$

También se tiene  $h(a) = h(b) = 0$ , y podemos usar el teorema de Rolle para encontrar un  $c \in (a, b)$  tal que  $h'(c) = 0$ , que es precisamente la igualdad buscada. ■

**Observación.** El teorema del valor medio de Cauchy es, efectivamente, una generalización del teorema del valor medio que ya hemos visto. Por un lado, es claro que podemos recuperar el segundo a partir del primero sin más que tomar  $g(x) = x$ .

Además, la versión de Cauchy nos da más información: si aplicáramos el TVM por separado a  $f$  y a  $g$ , obtendríamos puntos  $c, d \in (a, b)$  tales que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a), \quad g(b) - g(a) = g'(d)(b - a),$$

y sólo concluiríamos

$$(f(b) - f(a)) g'(c) = (g(b) - g(a)) f'(d),$$

lo cual no garantiza la conclusión del teorema generalizado porque, en general, no podemos asegurar  $c = d$ .

Respetando su aparición histórica, presentamos primero la regla para trabajar con indeterminaciones del tipo  $[0/0]$ .

**Teorema 5.31.** Sea  $I$  un intervalo no trivial,  $a \in I$  y  $f, g : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$  funciones verificando:

- (a)  $f$  y  $g$  son derivables en  $I \setminus \{a\}$
- (b)  $g'(x) \neq 0$  para todo  $x \in I \setminus \{a\}$
- (c)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ .

Entonces se tiene que  $g(x) \neq 0$  para todo  $x \in I \setminus \{a\}$ , con lo que las funciones  $f/g$  y  $f'/g'$  están definidas en  $I \setminus \{a\}$ . Además, se verifica que:

- (i)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \implies \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ .
- (ii)  $\frac{f'(x)}{g'(x)} \rightarrow +\infty \quad (x \rightarrow a) \implies \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow +\infty \quad (x \rightarrow a)$ .
- (iii)  $\frac{f'(x)}{g'(x)} \rightarrow -\infty \quad (x \rightarrow a) \implies \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow -\infty \quad (x \rightarrow a)$ .

Además, si  $I$  no está mayorado y tomamos  $a = +\infty$ , entonces existe un  $M > 0$  tal que  $g(x) \neq 0$  para todo  $x \in I$  con  $x > M$ , y las implicaciones (i)-(ii)-(iii) siguen siendo válidas. Lo mismo ocurre si  $I$  no está minorado y tomamos  $a = -\infty$ .

### Demostración

Empezamos con una observación sencilla: la hipótesis (c) permite extender las funciones  $f$  y  $g$  en  $a$  sin más que poner  $f(a) = g(a) = 0$ , obteniendo funciones continuas en  $I$ . Abusando de la notación, seguiremos llamando  $f$  y  $g$  a dichas extensiones, ya que demostrar el teorema para las extensiones es equivalente a hacerlo para las  $f$  y  $g$  originales. Así pues, podemos suponer que  $f, g \in C(I)$  con  $f(a) = g(a) = 0$ .

Para  $x \in I \setminus \{a\}$  llamamos  $J_x$  al intervalo entre  $a$  y  $x$ , cualquiera que sea su orden, es decir,  $J_x = [\min\{a, x\}, \max\{a, x\}]$ . Por supuesto,  $f$  y  $g$  son continuas en  $J_x$ , ya que  $J_x \subset I$ , y derivables en  $J_x^\circ$ , pues  $J_x^\circ \subset I \setminus \{a\}$ .

Para comprobar la primera afirmación del enunciado, esto es, que  $g(x) \neq 0$ , aplicamos a  $g$  el teorema del valor medio, obteniendo  $d_x \in J_x^\circ$  tal que

$$g'(d_x)(x - a) = g(x) - g(a) = g(x)$$

pero  $x \neq a$  y sabemos que  $g'(d_x) \neq 0$ , luego  $g(x) \neq 0$ .

Por otra parte, aplicamos a  $f$  y  $g$  el teorema del valor medio *generalizado*, obteniendo

$c_x \in J_x^\circ$  tal que

$$(f(x) - f(a)) g'(c_x) = (g(x) - g(a)) f'(c_x)$$

con lo cual tenemos

$$0 < |c_x - a| < |x - a| \quad \text{y} \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}. \quad (2)$$

**Prueba de (i).**

Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$y \in I, 0 < |y - a| < \delta \implies \left| \frac{f'(y)}{g'(y)} - L \right| < \varepsilon. \quad (3)$$

Para  $x \in I$  con  $0 < |x - a| < \delta$ , al aplicar (2) tendremos  $0 < |c_x - a| < \delta$ , lo que nos permite usar (3) con  $y = c_x$  para concluir que

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| = \left| \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} - L \right| < \varepsilon.$$

**Prueba de (ii).**

Dado  $K \in \mathbb{R}$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$y \in I, 0 < |y - a| < \delta \implies \frac{f'(y)}{g'(y)} > K. \quad (3')$$

Para  $x \in I$  con  $0 < |x - a| < \delta$ , aplicando (2) y (3') concluimos que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} > K.$$

**Prueba de (iii).**

Basta aplicar (ii), cambiando  $f$  por  $-f$ .

Terminamos la prueba discutiendo el caso  $a = +\infty$  con  $I$  no mayorado. La hipótesis (b) nos dice que  $g$  es estrictamente monótona, luego  $g(x) = 0$  puede ocurrir a lo sumo una vez, garantizando la existencia del  $M$  del enunciado.

Ahora, usamos la equivalencia entre un límite en  $+\infty$  y un límite por la derecha en 0: tomamos  $\hat{I} = [0, \frac{1}{M})$  y definimos  $\hat{f}, \hat{g} : \hat{I} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  mediante

$$\hat{f}(x) = f\left(\frac{1}{x}\right), \quad \hat{g}(x) = g\left(\frac{1}{x}\right).$$

La regla de la cadena nos da la derivabilidad de  $f$  y  $g$  en  $\hat{I} \setminus \{0\}$  con

$$\hat{f}'(x) = \frac{-1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right), \quad \hat{g}'(x) = \frac{-1}{x^2} g'\left(\frac{1}{x}\right),$$

siendo ambas distintas de 0 para todo  $x \in \hat{I} \setminus \{0\}$ . La hipótesis (c) nos da que  $\hat{f}$  y  $\hat{g}$  tienen límite 0 por la derecha en 0, y usando la regla de l'Hôpital recién demostrada tenemos que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\hat{f}(x)}{\hat{g}(x)} \stackrel{\text{R. L'H.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\hat{f}'(x)}{\hat{g}'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{-1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{-1}{x^2} g'\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

entendiendo que los límites anteriores pueden ser un número real o  $\pm\infty$ . ■

Ni que decir tiene, la regla de l'Hôpital puede aplicarse al estudio de *límites laterales* o *divergencia lateral* de una función en un punto, pues se trata de los límites ordinarios en dicho punto de una conveniente restricción de la función dada. En tal caso, es esta restricción la que debe satisfacer las hipótesis de la regla de l'Hôpital, que son más débiles que las exigidas a la función original. Dicho informalmente, basta con que se satisfagan a un lado del punto que estamos considerando.

La segunda versión de la regla de l'Hôpital se aplica a indeterminaciones del tipo  $[\infty/\infty]$ . Omitimos la demostración de esta por su alta complejidad técnica.

**Teorema 5.32.** Sea  $I$  un intervalo no trivial,  $a \in I$  y  $f, g : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$  funciones verificando:

- (a)  $f$  y  $g$  son derivables en  $I \setminus \{a\}$ ,
- (b)  $g'(x) \neq 0$  para todo  $x \in I \setminus \{a\}$ ,
- (c)  $|g|$  diverge a  $+\infty$  en el punto  $a$ .

Entonces existe  $\rho > 0$  tal que, para  $x \in I$  con  $0 < |x - a| < \rho$ , se tiene  $g(x) \neq 0$ . Además, se verifican las siguientes tres implicaciones:

- (i)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \implies \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ .
- (ii)  $\frac{f'(x)}{g'(x)} \rightarrow +\infty \quad (x \rightarrow a) \implies \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow +\infty \quad (x \rightarrow a)$ .
- (iii)  $\frac{f'(x)}{g'(x)} \rightarrow -\infty \quad (x \rightarrow a) \implies \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow -\infty \quad (x \rightarrow a)$ .

Además, si  $I$  no está mayorado y tomamos  $a = +\infty$ , entonces existe un  $M > 0$  tal que  $g(x) \neq 0$  para todo  $x \in I$  con  $x > M$ , y las implicaciones (i)-(ii)-(iii) siguen siendo válidas. Lo mismo ocurre si  $I$  no está minorado y tomamos  $a = -\infty$ . ■

## 5.6 Derivadas sucesivas

Como ya anticipamos al caracterizar las funciones convexas, para una función derivable  $f$  tiene sentido preguntarse por la derivabilidad de la función  $f'$ , definida en el conjunto de puntos donde  $f$  sea derivable. Nos damos cuenta enseguida que este proceso iterarse, dando lugar a la noción de derivadas sucesivas, y a nuevos espacios de funciones que describen el número de veces que esta operación puede repetirse. Como es natural, para  $n \in \mathbb{N}$ , la definición de derivada  $n$ -ésima de  $f$  viene dada mediante una fórmula recursiva.

**Definición 5.33.** Para una función  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , definimos

$$A_1 = \{x \in A \cap A' : f \text{ es derivable en } x\},$$

$$f^{(1)} = f' : A_1 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f^{(1)}(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Sea ahora  $n \in \mathbb{N}$  y supongamos definida la función derivada  $n$ -ésima  $f^{(n)} : A_n \rightarrow \mathbb{R}$ . Cuando  $x \in A_n \cap A'_n$  y  $f^{(n)}$  es derivable en  $x$ , decimos que  $f$  es  $n + 1$  veces derivable en  $x$  y definimos la  $(n + 1)$ -ésima derivada por

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x).$$

Si  $A_{n+1} = \{A_n \cap A'_n : f^{(n)} \text{ es derivable en } x\} \neq \emptyset$ , consideramos la función

$$f^{(n+1)} : A_{n+1} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f^{(n+1)}(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f^{(n)}(y) - f^{(n)}(x)}{y - x} \quad \forall x \in A_{n+1}.$$

Por conveniencia, para cualquier función  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  escribiremos  $f^{(0)} = f$ .

Queda claro de la definición anterior que los conjuntos de definición de las sucesivas derivadas,  $A_n$ , pueden ser distintos entre sí. Además, este conjunto nunca crece; en cada interacción estamos, de hecho, eliminando los puntos aislados y los puntos de acumulación en los que la derivada anterior no vuelve a ser derivable. Por ello, en esta sección trabajaremos preferentemente con funciones definidas en subconjuntos  $A \subset \mathbb{R}$  sin puntos aislados, esto es,  $A \subset A'$ . En particular, cuando  $A$  sea un intervalo no trivial o una unión finita de intervalos, como  $\mathbb{R}^*$ .

**Definición 5.34.** Para  $A \subset \mathbb{R}$  no vacío y  $n \in \mathbb{N}$ , denotamos por  $D^n(A)$  al conjunto de todas las funciones  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  que son  $n$  veces derivables en todo punto de  $A$ .

Coherentemente,  $D^0(A) = \mathcal{F}(A)$  y  $D^1(A) = D(A)$ .

**Observación:** Si  $f \in D^n(A)$  y  $k \in \mathbb{Z}$  con  $0 \leq k \leq n$ , entonces  $f^{(k)} \in D^{n-k}(A)$ . En particular, para  $k \leq n-1$ ,  $f^{(k)}$  es continua. Esto puede fallar cuando  $k = n$ .

**Definición 5.35.** Diremos que  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  es de *clase  $C^n$*  en  $A$  cuando  $f \in D^n(A)$  y  $f^{(n)}$  es continua en  $A$ . Denotamos por  $C^n(A)$  al conjunto de todas las funciones de clase  $C^n$  en  $A$ .

Por convenio,  $C^0(A) = C(A)$ , y  $C^1(A)$  el de las funciones derivables con derivada continua.

**Definición 5.36.** Decimos que  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  es *indefinidamente derivable* o de *clase  $C^\infty$*  en  $A$  cuando  $f \in D^n(A)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Denotamos por  $C^\infty(A)$  al conjunto de todas las funciones de clase  $C^\infty$  en  $A$ . Equivalentemente,

$$C^\infty(A) = \bigcap_{n=1}^{\infty} D^n(A).$$

Se demuestra sin dificultad que  $f \in C^\infty(A)$  si, y solo si,  $f \in C^n(A)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

De estas definiciones se deduce la cadena de inclusiones, válida para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathcal{F}(A) = D^0(A) \supset C^0(A) \supset D^n(A) \supset C^n(A) \supset D^{n+1}(A) \supset C^{n+1}(A) \supset C^\infty(A). \quad (5.2)$$

Al situar una función en alguno de estos espacios cuantificamos su *regularidad*: cuanto mayor  $n$ , más información tenemos sobre derivadas. Más adelante veremos ejemplos que muestran que todas las inclusiones anteriores son estrictas incluso en intervalos.

Enumeramos en la siguiente proposición las propiedades más importantes del álgebra de derivadas sucesivas. Usando los resultados análogos para funciones continuas podemos obtener los enunciados para funciones de clase  $C^n$  y  $C^\infty$ . En todos los casos, la demostración consiste en una sencilla inducción que omitimos en aras de la brevedad.

**Proposición 5.37.** Sean  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f, g \in D^n(A)$  y  $h \in D^n(B)$ . Entonces

- $f + g \in D^n(A)$  y  $(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$ .

- $fg \in D^n(A)$  y

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}.$$

- Si  $g(x) \neq 0$  para todo  $x \in A$ ,  $f/g \in D^n(A)$ .
- Si  $A$  y  $B$  son tales que  $A \subset A'$ ,  $B \subset B'$  y  $f(A) \subset B$ , entonces  $g \circ f \in D^n(A)$ .
- Si  $A$  es un intervalo no trivial y  $f'(x) \neq 0$  para todo  $x \in A$ , entonces  $f^{-1} \in D^n(f(A))$ .

■

Rematamos esta breve sección dando ejemplos de que las inclusiones de (5.2) son todas estrictas.

### Ejemplo

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , la función  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f_n(x) = x^{n-1} |x| \quad (x \in \mathbb{R}),$$

verifica que  $f_n \in C^{n-1}(\mathbb{R}) \setminus D^n(\mathbb{R})$ .

**Resolución.** Razonamos por inducción sobre  $n$ .

Si  $n = 1$ , tenemos  $f_1(x) = |x|$ , que es continua en  $\mathbb{R}$  pero no derivable en 0, luego  $f_1 \in C^0(\mathbb{R}) \setminus D^1(\mathbb{R})$ .

Supongamos cierto el enunciado para algún  $n \in \mathbb{N}$ , esto es,  $f_n \in C^{n-1}(\mathbb{R}) \setminus D^n(\mathbb{R})$ .

Para  $x \neq 0$ ,

$$f'_{n+1}(x) = (x^n |x|)' = nx^{n-1} |x| + x^n \frac{|x|}{x} = (n+1)x^{n-1} |x| = (n+1)f_n(x).$$

De la fórmula anterior deducimos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'_{n+1}(x) = (n+1) \lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = (n+1)f_n(0) = 0,$$

luego  $f_{n+1}$  es derivable en 0 con  $f'_{n+1}(0) = 0$ . Por tanto  $f_{n+1} \in D^1(\mathbb{R})$  y, como  $f'_{n+1} = (n+1)f_n \in C^{n-1}(\mathbb{R}) \setminus D^n(\mathbb{R})$  por la hipótesis de inducción, concluimos que

$$f_{n+1} \in C^n(\mathbb{R}) \setminus D^{n+1}(\mathbb{R}).$$

### Ejemplo

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , consideremos  $g_n, h_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por

$$g_n(x) = \begin{cases} x^{2n-1} \sin(1/x), & x \in \mathbb{R}^*, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad h_n(x) = \begin{cases} x^{2n} \sin(1/x), & x \in \mathbb{R}^*, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Se verifica que  $g_n \in C^{n-1}(\mathbb{R}) \setminus D^n(\mathbb{R})$ , mientras que  $h_n \in D^n(\mathbb{R}) \setminus C^n(\mathbb{R})$ .

**Resolución.** Los cálculos para el paso inductivo en este caso son engorrosos, así que nos concentraremos en hacer con detalle la etapa base para ambas funciones.

$g_1 \in C^0(\mathbb{R}) \setminus D^1(\mathbb{R})$  Para  $x \neq 0$  tenemos claramente que  $g_1$  es continua y derivable

en  $x$ , así que centramos nuestra atención en el punto  $x = 0$ .

Por un lado,  $0 \leq |x \sin(1/x)| \leq |x|$ , luego  $\lim_{x \rightarrow 0} g_1(x) = 0 = g_1(0)$ . Así,  $g_1 \in C(\mathbb{R})$ . Sin embargo,

$$\frac{x \sin(1/x) - 0}{x - 0} = \sin(1/x),$$

que no tiene límite en  $x = 0$ , por tanto  $g_1 \notin D(\mathbb{R})$ .

$h_1 \in D^1(\mathbb{R}) \setminus C^1(\mathbb{R})$  Al igual que antes,  $h_1$  es derivable en  $x \neq 0$  de forma manifiesta. En  $x = 0$  tenemos

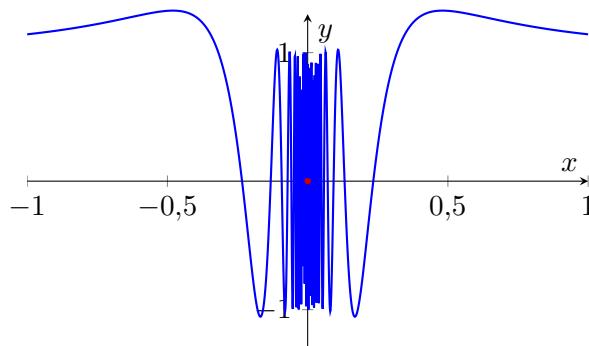
$$h_1'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(1/x) - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin(1/x) = 0,$$

luego  $h_1$  es derivable en todo  $\mathbb{R}$  con

$$h_1'(x) = \begin{cases} 2x \sin(1/x) - \cos(1/x), & x \in \mathbb{R}^*, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Sin embargo, la función  $x \mapsto \cos(1/x)$  no tiene límite en  $x = 0$ , luego  $h_1'$  no es continua en 0. Para ver esto último, podemos probar algo mucho más fuerte: para todo  $y \in [-1, 1]$  existe  $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^*$  con  $\{y_n\} \rightarrow 0$  y tal que  $\{\cos(1/y_n)\} \rightarrow y$ .

En efecto, la sucesión buscada es  $y_n = \frac{1}{\arccos y + 2\pi n}$ .



Gráfica de  $h_1'(x)$ , que presenta una *discontinuidad de segunda especie* en  $x = 0$ , las únicas que puede tener la derivada de una función derivable.

Para el paso inductivo, definimos  $\hat{g}_n$  y  $\hat{h}_n$  de la misma forma que  $g_n$  y  $h_n$ , pero cambiando la función seno por el coseno. Debe probarse por inducción que

$$g_n, \hat{g}_n \in C^{n-1}(\mathbb{R}) \cap D^n(\mathbb{R}), \quad h_n, \hat{h}_n \in D^n(\mathbb{R}) \setminus C^n(\mathbb{R}),$$

apoyándonos en las identidades:

- $g'_{n+1} = (2n+1)h_n - \hat{g}_n$ ,
- $h'_{n+1} = (2n+2)g_{n+1} - \hat{h}_n$ ,
- $\hat{g}'_{n+1} = (2n+1)\hat{h}_n + g_n$ ,
- $\hat{h}'_{n+1} = (2n+2)\hat{g}_{n+1} + h_n$ .

Se deja al lector interesado la comprobación de los detalles de este razonamiento.

## 5.7 Fórmula de Taylor

Es conocido el hecho de que si una función  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  es derivable en un punto  $a \in A \cap A'$ , entonces la recta tangente en  $a$  es una buena aproximación de  $f$  cerca de  $a$  en el sentido que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - (f(a) + f'(a)(x - a))}{x - a} = 0.$$

Si leemos el numerador de la identidad anterior como el *error* cometido al aproximar  $f(x)$  por la tangente en  $a$  para valores cerca de  $a$ , obtenemos la información de que este debe ser más pequeño que  $x - a$ .

Si la función posee derivadas hasta orden  $n$ , podemos mejorar la aproximación mediante un polinomio de grado menor o igual que  $n$ : el *polinomio de Taylor de orden  $n$  en  $a$* . Al error de esta aproximación lo llamaremos *resto de Taylor*. Su validez se cuantifica con la *fórmula infinitesimal del resto*, que describe la velocidad con la que dicho resto tiende a cero cuando  $x \rightarrow a$ .

Una estimación más precisa se obtiene con la *fórmula de Taylor*, un resultado análogo al teorema del valor medio que involucra las derivadas sucesivas. Veremos varias aplicaciones de esta fórmula; entre ellas, los desarrollos en *serie de Taylor*, que nos permiten escribir localmente una función  $f$  como la suma de una serie.

Para averiguar la forma que tendrá dicha aproximación, pensamos en un polinomio de grado  $n$ , que escribimos agrupado en potencias de  $a \in \mathbb{R}$ :

$$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x - a) + \alpha_2(x - a)^2 + \cdots + \alpha_n(x - a)^n = \sum_{k=0}^n \alpha_k(x - a)^k,$$

donde  $\alpha_k$  son los coeficientes de  $p$ .

### Ejemplo

**Problema.** Escribir  $x^2 + 2x + 1$  como suma de potencias de  $x - 2$ .

**Resolución.** Usamos convenientemente el binomio de Newton:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 1 &= (x - 2 + 2)^2 + 2(x - 2 + 2) + 1 \\ &= (x - 2)^2 + 4(x - 2) + 4 + 2(x - 2) + 4 + 1 \\ &= (x - 2)^2 + 6(x - 2) + 9(x - 2)^0 \end{aligned}$$

Como  $p \in C^\infty(\mathbb{R})$ , una condición natural que podemos pedir a  $p(x)$  es que sus  $n$  primeras derivadas coincidan con las de  $f(x)$  en el punto  $x = a$ , esto es,

$$f^{(k)}(a) = p^{(k)}(a) \quad \forall k = 0, 1, \dots, n.$$

Veamos entonces cómo deben ser los coeficientes de este polinomio  $p(x)$ . Es inmediato comprobar que  $\alpha_0 = p(a)$ . Ahora, si derivamos la anterior igualdad una o dos veces y evaluamos en  $x = a$  tenemos

$$p'(x) = \sum_{k=1}^n k \alpha_k (x - a)^{k-1} \Rightarrow p'(a) = 1 \alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = f'(a).$$

$$p''(x) = \sum_{k=2}^n k(k-1) \alpha_k (x - a)^{k-2} \Rightarrow p''(a) = 2 \cdot 1 \alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{f''(a)}{2}.$$

Es fácil comprobar por inducción que

$$p^{(j)}(a) = j! \alpha_j \quad \Rightarrow \quad \alpha_j = \frac{p^{(j)}(a)}{j!} \quad \Rightarrow \quad \alpha_j = \frac{f^j(a)}{j!}.$$

lo que nos da la expresión

$$p(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

Esto motiva la siguiente definición:

**Definición 5.38.** Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una función y  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Si  $f$  es al menos  $n$  veces derivable en un punto  $a \in A$ , podemos considerar la función polinómica  $T_n[f, a]$  dada por:

$$\begin{aligned} T_n[f, a](x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

que se denomina *polinomio de Taylor de orden  $n$  de la función  $f$  en el punto  $a$* , en honor del matemático inglés B. Taylor.

En vista de la discusión anterior, es fácil deducir la siguiente propiedad del polinomio de Taylor:

**Proposición 5.39.** Dada  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $n$ -veces derivable en un punto  $a \in A$ , el polinomio de Taylor  $T_n[f, a]$  es el único polinomio  $T$  de orden  $n$  tal que  $T^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$  para  $0 \leq k \leq n$ . ■

Para valorar lo buena aproximación que es  $T_n[f, a]$  a  $f$  cerca de  $a$ , definimos el *resto de Taylor*, que será la diferencia entre ambas funciones.

**Definición 5.40.** Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$   $n$  veces derivable en  $a \in A$ . Definimos el *resto de Taylor de orden  $n$  de  $f$  en  $a$*  por

$$R_n[f, a](x) = f(x) - T_n[f, a](x) \quad \forall x \in A.$$

Podemos anticipar cómo de pequeño será este error observando lo que ocurre para los primeros valores de  $n$ :

Para  $n = 0$ , si  $f$  es continua en  $a$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow a} R_0[f, a](x) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = 0$ .

Para  $n = 1$ , si  $f$  es derivable en  $a$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_1[f, a](x)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x-a} = 0,$$

como ya habíamos remarcado al principio de la sección. En general, al aumentar  $n$  esperamos que el resto se anule cada vez más rápido al acercarnos a  $a$ . Para formalizar esto, comenzamos con una observación fundamental que pone en relación el polinomio de Taylor de una función y el de su derivada.

**Proposición 5.41.** Si  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  y  $f$  es  $n+1$  veces derivable en  $a \in A$ , entonces

$$(T_{n+1}[f, a])' = T_n[f', a].$$

**Demostración**

Es un cálculo directo:

$$\begin{aligned}(T_{n+1}[f, a])'(x) &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} k(x-a)^{k-1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!} (x-a)^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!} (x-a)^k = \sum_{k=0}^n \frac{f'^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = T_n[f', a](x).\end{aligned}$$

■

**Teorema 5.42** (Fórmula infinitesimal del resto). Sea  $I$  un intervalo no trivial,  $n \in \mathbb{N}$  y  $f \in D^{n-1}(I)$ . Si  $f$  es  $n$  veces derivable en  $a \in I$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n[f, a](x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_n[f, a](x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Además,  $T_n[f, a]$  es el único polinomio de orden  $n$  que verifica la igualdad anterior.

**Demostración**

Hacemos la demostración por inducción en  $n$ , teniendo en cuenta que el caso  $n = 1$  es ya conocido. Supongamos entonces que para algún  $n \in \mathbb{N}$  el teorema se cumple para *toda función que cumpla las hipótesis*. Tomemos ahora  $f \in D^n(I)$  con  $f$   $n+1$  veces derivable en  $a$ .

De forma clara, el cociente

$$\frac{f(x) - T_{n+1}[f, a](x)}{(x-a)^{n+1}}$$

cumple las hipótesis de la primera regla de l'Hôpital, lo que nos permite considerar el cociente de las derivadas:

$$\frac{f'(x) - (T_{n+1}[f, a])'(x)}{(n+1)(x-a)^n} = \frac{f'(x) - T_n[f', a](x)}{(n+1)(x-a)^n} = \frac{1}{n+1} \frac{R_n[f', a](x)}{(x-a)^n}.$$

Como  $f' \in D^{n-1}(I)$  y es  $n$  veces derivable en  $a$ , la hipótesis de inducción aplicada a  $f'$  y la primera regla de l'Hôpital dan:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{n+1} \frac{R_n[f', a](x)}{(x-a)^n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{R_{n+1}[f, a](x)}{(x-a)^{n+1}} = 0.$$

Para demostrar la unicidad, supongamos que  $P$  es un polinomio de orden  $n$ , distinto de  $T_n[f, a]$ , cumpliendo

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Definimos  $Q(x) = P(x) - T_n[f, a](x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k (x-a)^k$ , que es otro polinomio de orden  $n$ . Como  $Q(x)$  no es idénticamente nulo, al menos uno de sus coeficientes será distinto de cero. Sea  $m = \min\{k : \alpha_k \neq 0\}$ . Entonces, para  $x \neq a$ ,

$$\frac{Q(x)}{(x-a)^m} = \alpha_m + \sum_{k=m+1}^n \alpha_k (x-a)^{k-m} \implies \lim_{x \rightarrow a} \frac{Q(x)}{(x-a)^m} = \alpha_m \neq 0.$$

Pero como  $n \geq m$ , podemos usar lo demostrado anteriormente para concluir que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{Q(x)}{(x-a)^m} = \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{P(x) - f(x)}{(x-a)^m} + \frac{f(x) - T_n[f, a](x)}{(x-a)^m} \right) = 0,$$

una contradicción. ■

**Notación:** En el contexto de la fórmula infinitesimal del resto, a menudo suele usarse la *notación de Landau*. Según esta, si  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones definidas en un intervalo  $I$  y  $a \in I$ , decimos que  $f$  es de orden inferior a  $g$  cuando  $x \rightarrow a$ , y escribimos  $f = o(g(x))$  ( $x \rightarrow a$ ), cuando

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : [x \in I, \ 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x)| < \varepsilon |g(x)|].$$

En particular, si  $g(x) \neq 0$  para todo  $x \in I \setminus \{a\}$ , se tiene

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Usando esta terminología, suele abreviarse la fórmula infinitesimal del resto como

$$f(x) = T_n[f, a](x) + o((x-a)^n) \quad (x \rightarrow a).$$

Esta notación debe entenderse como que  $f$  pertenece a una clase de funciones que verifican una cierta propiedad, y no manipularse como si de una identidad algebraica se tratase.

La moraleja es que, conforme  $n$  aumenta, más laborioso resulta calcular el polinomio de Taylor de orden  $n$  de una función, pero mejoramos la aproximación obtenida, puesto que la diferencia  $f - T_n[f, a]$  tiende a cero más rápido que  $(x-a)^n$ .

Si separamos el último sumando del polinomio de Taylor en la fórmula infinitesimal del resto, obtenemos una nueva expresión para la derivada  $n$ -ésima.

$$f^{(n)}(a) = n! \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_{n-1}[f, a](x)}{(x-a)^n}$$

El interés de esta fórmula radica en que permite calcular  $f^{(n)}(a)$  conociendo únicamente  $f^{(k)}(a)$  para  $0 \leq k \leq n-1$ , que es la información que necesitamos para conocer  $T_n[f, a](x)$ . Si se quisiera obtener  $f^{(n)}(a)$  usando la definición, tendríamos que calcular  $f^{(k)}(x)$  para todo  $0 \leq k \leq n-1$  al menos para todos los  $x$  cerca de  $a$ .

Vemos en los siguientes ejemplos cómo el polinomio de Taylor puede usarse para calcular límites y, cómo la unicidad de este nos permite encontrar sus coeficientes una vez calculado un cierto límite.

### Ejemplo

**Problema.** Calcular el polinomio de Taylor de grado 3 en  $x = 0$  de la función

$$f(x) = \log(1 + \sin x).$$

Usar este desarrollo para determinar el valor del límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin x) - x + \frac{x^2}{2}}{x^3}.$$

**Resolución.** Si usáramos la regla de l'Hôpital para calcular este límite, tendríamos que aplicarla tres veces. En cambio, el polinomio de Taylor en torno a 0 simplifica notablemente las operaciones.

$$f(0) = 0.$$

$$f'(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 1.$$

$$f''(x) = \frac{-\sin x (1 + \sin x) - \cos^2 x}{(1 + \sin x)^2} = \frac{-\sin x - 1}{(1 + \sin x)^2} \quad \Rightarrow \quad f''(0) = -1.$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{-\cos x (1 + \sin x)^2 + 2(1 + \sin x) \cos x (\sin x + 1)}{(1 + \sin x)^4} \quad \Rightarrow \quad f^{(3)}(0) = 1.$$

Por tanto, el polinomio de Taylor de orden 3 de  $f$  en 0 es

$$T_3[f, 0](x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$

La fórmula infinitesimal del resto nos permite escribir

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + R_3(x), \quad \text{con} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_3(x)}{x^3} = 0.$$

De aquí obtenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin x) - x + \frac{x^2}{2}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{6} + R_3(x)}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

### Ejemplo

Evaluar el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + x^4) - x^4}{x^8}.$$

**Nota:** Aunque aún no hemos dado una definición rigurosa de la función *logaritmo*, para este ejemplo solo necesitamos conocer que es la única función  $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\log'(x) = \frac{1}{x}$  y  $\log(1) = 0$ .

**Resolución.** Al encontrar una indeterminación del tipo  $[0/0]$ , uno podría pensar en afrontar el problema usando la primera regla de l'Hôpital. Sin embargo, un par de aplicaciones de este resultado bastan para darse cuenta de que serán necesarias un total de 8, y que los cálculos se alargan a cada paso. Si bien este acercamiento es factible, veamos cómo podemos resolver el límite como una sencilla aplicación de la fórmula infinitesimal del resto.

Consideramos la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(y) = \log(1 + y)$ . Como la derivada del logaritmo es una función racional, tenemos  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ , lo que nos permite calcular

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, \\ f'(y) &= \frac{1}{1+y} \implies f'(0) = 1, \\ f''(y) &= \frac{-1}{(1+y)^2} \implies f''(0) = -1. \end{aligned}$$

Por tanto,  $T_2[f, 0](y) = y - \frac{1}{2}y^2$ . La fórmula infinitesimal del resto nos dice que

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1+y) - y + \frac{1}{2}y^2}{y^2} = 0.$$

La función  $\varphi : x \mapsto x^4$  es continua en 0 con  $\varphi(0) = 0$ , así que la continuidad de la composición de funciones nos da:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^4) - x^4 + \frac{1}{2}x^8}{x^8} = 0 \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^4) - x^4}{x^8} = -\frac{1}{2}.$$

Usando la caracterización del polinomio de Taylor, hemos probado además que

$$T_8[\log(1+x^4), 0] = x^4 - \frac{1}{2}x^8,$$

sin necesidad de calcular las ocho derivadas de esa función.

La fórmula infinitesimal del resto permite sustituir la condición necesaria de extremo relativo por otra más fuerte que es necesaria y suficiente.

**Proposición 5.43.** Sea  $I$  un intervalo,  $a \in I^\circ$ ,  $n \in \mathbb{N}$  y  $f \in D^{n-1}(I)$ . Supongamos que

$$f^{(k)}(a) = 0 \quad \text{para } 1 \leq k < n, \quad \text{y} \quad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Entonces:

- (i) Si  $n$  es par y  $f^{(n)}(a) > 0$ ,  $f$  tiene un *mínimo* relativo en  $a$ .
- (ii) Si  $n$  es par y  $f^{(n)}(a) < 0$ ,  $f$  tiene un *máximo* relativo en  $a$ .
- (iii) Si  $n$  es impar,  $f$  *no* tiene un extremo relativo en  $a$ .

En particular,  $f$  tiene un extremo relativo en  $a$  si y sólo si  $n$  es par.

### Demostración

Como  $f^{(k)}(a) = 0$  para  $1 \leq k < n$ , el polinomio de Taylor de orden  $n$  de  $f$  en  $a$  es

$$T_n[f, a](x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n.$$

Por la *fórmula infinitesimal del resto*,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^n} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

De aquí se deduce que, cerca del punto  $a$ , el cociente de la izquierda tiene el mismo signo que  $f^{(n)}(a)$ , lo que nos proporciona un  $\delta > 0$  tal que, si  $0 < |x - a| < \delta$ , entonces

$$\frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^n} \cdot f^{(n)}(a) > 0. \quad (*)$$

- Si  $n$  es par,  $(x - a)^n > 0$  para  $x \neq a$ , y por  $(*)$  el signo de  $f(x) - f(a)$  coincide con el de  $f^{(n)}(a)$  cerca de  $a$ . Por tanto, si  $f^{(n)}(a) > 0$  resulta  $f(x) \geq f(a)$  para  $x$  próximo a  $a$  (mínimo en  $a$ ), mientras que si  $f^{(n)}(a) < 0$  resulta  $f(x) \leq f(a)$  (máximo en  $a$ ).
- Si  $n$  es impar,  $(x - a)^n$  cambia de signo al cruzar  $a$ . La desigualdad  $(*)$  implica entonces que  $f(x) - f(a)$  cambia de signo en cualquier vecindad de  $a$ , luego no puede haber extremo relativo en  $a$ .

■

Aunque el resultado anterior nos proporcione una condición necesaria y suficiente que deben cumplir los extremos relativos, no debe entenderse como una regla que puede aplicarse siempre. De entrada, las hipótesis de esta proposición no tienen por qué cumplirse. Por ejemplo, una función  $f$  puede tener un extremo relativo en  $a \in I$  sin ser siquiera continua en dicho punto, o puede que  $f'(a) = 0$ , pero que  $f$  no sea dos veces derivable en  $a$ .

**Ejercicio:** Sea  $f \in D^3(\mathbb{R})$  con  $f'(0) \neq 0$ , y  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función dada por  $g(x) = x^2 f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Probar que  $g$  tiene un extremo relativo en  $x = 0$  si, y solo si,  $f(x) \neq 0$ .

La fórmula infinitesimal del resto describe la rapidez con la que el resto de Taylor de una función en un punto  $a$  se hace cero al acercarnos a  $a$ , pero no aporta información sobre el valor de dicho resto en puntos distintos de  $a$ . Si imponemos unas hipótesis ligeramente más fuertes, obtendremos ahora una descripción del resto de Taylor que sí permite, en muchos casos, estimar ese valor. A los resultados de este tipo los agruparemos bajo el nombre genérico de *Fórmulas de Taylor*; la diferencia entre unas y otras está, básicamente, en la expresión concreta que proporcionan para el resto.

**Teorema 5.44** (Fórmula de Taylor con resto de Lagrange). Sea  $I$  un intervalo no trivial y sea  $f \in C^n(I) \cap D^{n+1}(I^\circ)$ , con  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Entonces, para cualesquiera  $a, x \in I$  con  $a \neq x$ , podemos escribir

$$R_n[f, a](x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1},$$

donde  $c$  es un punto intermedio entre  $a$  y  $x$ , es decir,

$$\min\{a, x\} < c < \max\{a, x\}.$$

### Demostración

Sean  $a, x \in I$  con  $a \neq x$ , que consideraremos fijos en todo el razonamiento, y sea

$$J = [\min\{a, x\}, \max\{a, x\}],$$

intervalo que obviamente verifica  $J \subset I$  y  $J^\circ \subset I^\circ$ . Aplicaremos el teorema del valor

medio generalizado a las funciones

$$\varphi, \psi : J \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x-t)^k, \quad \psi(t) = -(x-t)^{n+1} \quad \forall t \in J.$$

Como  $f \in C^n(I) \cap D^{n+1}(I^\circ)$ , se deduce que  $\varphi \in C^0(J) \cap D^1(J^\circ)$ , mientras que  $\psi \in C^\infty(J)$  por ser polinómica. El TVMG nos da un punto  $c \in J^\circ$  tal que

$$(\varphi(x) - \varphi(a)) \psi'(c) = (\psi(x) - \psi(a)) \varphi'(c).$$

Solo queda reescribir esta igualdad en términos de  $f$ . Empezamos por lo más sencillo:

$$\varphi(x) - \varphi(a) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = R_n[f, a](x).$$

Además,

$$\psi(x) - \psi(a) = (x-a)^{n+1}, \quad \psi'(c) = (n+1)(x-c)^n.$$

El cálculo de  $\varphi'(c)$  tampoco ofrece dificultad. Para  $t \in J$  tenemos

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= f'(t) + \sum_{k=1}^n \left( \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} (x-t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!} (x-t)^{k-1} \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} (x-t)^k - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} (x-t)^k \\ &= \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n, \end{aligned}$$

y, en particular,

$$\varphi'(c) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x-c)^n.$$

Al sustituir los valores de las derivadas, obtenemos

$$(n+1)(x-c)^n R_n[f, a](x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x-c)^n (x-a)^{n+1},$$

y la igualdad buscada se obtiene dividiendo ambos miembros por  $(n+1)(x-c)^n \neq 0$ . ■

En el caso  $n = 0$ , la hipótesis del teorema anterior se reduce a  $f \in C^0(I) \cap D^1(I^\circ)$  y la conclusión que se obtiene es

$$f(x) - f(a) = f'(c)(x-a),$$

que coincide exactamente con la hipótesis y la tesis del teorema del valor medio. Podemos afirmar, por tanto, que la fórmula de Taylor generaliza el teorema del valor medio, de la misma manera que la fórmula infinitesimal del resto generalizaba la definición de derivada: en ambos casos se pone en relación el comportamiento de la función con el de sus derivadas sucesivas.

### Ejemplo

**Problema.** Usando la fórmula de Taylor, aproximar  $\sqrt[6]{e}$  con un error menor a  $10^{-4}$ .

**Nota:** Todavía no hemos dado una definición completa de la función *exponencial*, pero

para este ejemplo solo debemos recordar que es la única función derivable  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  tal que  $\exp'(x) = \exp(x)$  y  $\exp(0) = 1$ .

**Resolución.** Sabiendo que la derivada de la exponencial es ella misma, tenemos inmediatamente que  $\exp \in C^\infty(\mathbb{R})$  y su polinomio de Taylor es, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$T_n[\exp, 0](x) = \sum_{k=0}^n \frac{e^0}{k!} x^k = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

Como estimación de  $\sqrt[6]{e}$  usaremos, por supuesto,  $T_n[\exp, 0](1/6)$  para un  $n \in \mathbb{N}$  conveniente. Pasamos a determinar qué valor de  $n$  necesitamos para obtener un error menor a  $10^{-4}$ :

La fórmula de Taylor nos dice que, para algún  $c \in (0, 1/6)$ ,

$$R_n[\exp, 0](1/6) = \frac{e^c}{(n+1)!} \left(\frac{1}{6}\right)^{n+1} < \frac{3}{(n+1)!6^{n+1}}.$$

Para  $n = 3$  ya tenemos  $R_3[\exp, 0](1/6) = \frac{1}{10368} < 10^{-4}$ . Así pues,

$$T_3(\exp, 0)(1/6) = \sum_{k=0}^3 \frac{1}{6^k k!} = \frac{1531}{1296},$$

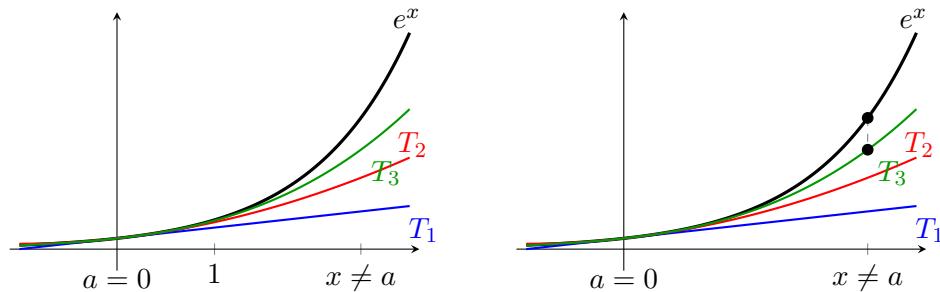
aproxima a  $\sqrt[6]{e}$  hasta el tercer decimal.

Nos damos cuenta de que, al aumentar  $n \in \mathbb{N}$ , podemos hacer el error  $R_n[\exp, 0](1/6)$  tan pequeño como queramos, ya que  $\{\frac{3}{(n+1)!6^{n+1}}\} \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow +\infty$ ). En realidad, lo que tenemos es la suma de una serie:

$$e^{1/6} = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n[\exp, 0](1/6) + \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n[\exp, 0](1/6) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!6^n}.$$

En lo que sigue, fijamos un intervalo no trivial  $I$ , una función  $f \in C^\infty(I)$  y un punto  $a \in I^\circ$ . Nos preguntamos si lo que hemos hecho con la función exponencial y el punto  $x = 1/6$  puede hacerse para otros puntos  $x \in I$ , es decir, si

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n[f, a](x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n(a)}{n!} (x-a)^n. \quad (5.3)$$



Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sabemos cómo se comporta  $T_n[f, a]$  para  $x$  cerca de  $a$ . Nos preguntamos si en puntos  $x \neq a$  el polinomio  $T_n[f, a](x)$  también es una buena aproximación de  $f(x)$  al hacer  $n \rightarrow +\infty$ .

Para estudiar este problema, conviene adoptar el segundo punto de vista, y en vez de trabajar con la sucesión  $\{T_n[f, a](x)\}$ , hacerlo con la serie que aparece en el tercer miembro, llamada *la serie de Taylor de  $f$  en el punto  $a$* .

**Nota:** Como consecuencia de la fórmula infinitesimal del resto tenemos que, para cada  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , existe  $\delta > 0$  tal que, si  $0 < |x - a| < \delta$ , entonces

$$0 \leq |R_n[f, a](x)| \leq |x - a|^n.$$

Podríamos pensar, ingenuamente, que tan pronto  $|x - a| < 1$ , se tendrá (5.3), puesto que entonces  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |x - a|^n = 0$  y por tanto  $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n[f, a](x) = 0$ .

Este razonamiento es **erróneo**, y la clave está en que el  $\delta > 0$  encontrado **depende de  $n$** . Es perfectamente posible que  $\delta(n) \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow +\infty$ , haciendo que la identidad anterior solo sea válida para  $x = a$ , lo que nos dará *a posteriori* un desarrollo en serie de Taylor perfectamente inútil, pues la serie será convergente solo para  $x = a$ .

¡Es muy distinto fijar  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  y tomar límite  $x \rightarrow a$  que fijar un  $x \in I$  y tomar límite  $n \rightarrow +\infty$ !

**Definición 5.45** (Serie de Taylor). Sea  $x \in I$ . Llamamos *serie de Taylor de  $f$  en el punto  $a$  evaluada en  $x$*  a la serie numérica

$$\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n.$$

Para cada  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , su  $n$ -ésima suma parcial coincide con el polinomio de Taylor de orden  $n$ :

$$T_n[f, a](x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k.$$

Cuando pensamos en  $x$  como variable, hablamos simplemente de la *serie de Taylor de  $f$  en  $a$* .

Usando la fórmula de Taylor con resto de Lagrange, sabemos que, para cada  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , existe un punto  $c_n$  situado entre  $a$  y  $x$  tal que

$$f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k = \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1}.$$

Usando el criterio del cociente, nos damos cuenta de que la serie

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(x - a)^n}{n!}$$

es absolutamente convergente, luego la sucesión

$$\left\{ \frac{(x - a)^{n+1}}{(n+1)!} \right\} \rightarrow 0.$$

No es difícil adivinar entonces que una condición suficiente para tener (5.3) es que la sucesión  $f^{n+1}(c_n)$  sea acotada.

**Proposición 5.46.** Sea  $I$  un intervalo no trivial,  $f \in C^\infty(I)$ ,  $a \in I^\circ$  y  $x \in I$ . Supongamos que se cumple la siguiente propiedad:

Para toda sucesión  $\{c_n\}_{n \geq 0}$  de puntos comprendidos entre  $a$  y  $x$  (es decir,  $\min\{a, x\} < c_n < \max\{a, x\}$  para todo  $n$ ), la sucesión  $\{f^{(n+1)}(c_n)\}_{n \geq 0}$  es acotada.

Entonces la serie de Taylor de  $f$  en  $a$ , evaluada en  $x$ ,

$$\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n,$$

es convergente y su suma es  $f(x)$ . ■

En general, la sucesión  $\{f^{n+1}(c_n)\}$  podrá ser divergente, dando lugar a series no convergentes, o a series convergentes cuya suma difiere de  $f(x)$ .

A las funciones que verifican (5.3) se les da el nombre de funciones *analíticas*.

**Definición 5.47.** Sea  $I$  un intervalo no trivial,  $f \in C^\infty(I)$  y  $a \in I^\circ$ . Decimos que  $f$  es analítica en  $a$  si existe un  $\delta > 0$ , que depende de  $a$ , tal que  $(a - \delta, a + \delta) \subset I$  y

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n \quad \forall x \in (a - \delta, a + \delta).$$

Si  $I = I^\circ$ , decimos que  $f$  es analítica en  $I$  si es analítica para todo punto  $a \in I$ . El conjunto de las funciones analíticas en  $I$  se denota por  $C^\omega(I)$ .

La definición anterior no deja dudas: las funciones analíticas en  $I$  son un subconjunto de las funciones de clase  $C^\infty$  en  $I$ . Cabe preguntarse, como hicimos a principio de la sección, si esta inclusión es estricta, esto es, si pueden existir funciones para las que (5.3) solo ocurra en el caso trivial  $x = a$ . La respuesta es afirmativa.

### Ejemplo

Consideramos la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Se tiene que  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  pero  $f$  no es analítica en  $x = 0$ .

**Resolución.** Es fácil comprobar por inducción que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , la derivada  $n$ -ésima de  $f$  en los puntos  $x \neq 0$  tiene la forma

$$f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2},$$

donde  $P_n$  es un polinomio. Haciendo un cambio de variable, tenemos entonces

$$\lim_{x \rightarrow 0} f^{(n)}(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} P_n(x) e^{-x^2} = 0 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por tanto,  $f$  es indefinidamente derivable en  $\mathbb{R}$  con  $f^{(n)}(0) = 0$  para todo  $n$ . En consecuencia, el polinomio de Taylor de orden  $n$  de  $f$  en  $a = 0$  es

$$T_n[f, 0](x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \equiv 0,$$

y la serie de Taylor de  $f$  en 0 es simplemente

$$\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Esta serie converge para todo  $x$ , pero su suma sólo coincide con  $f(x)$  en  $x = 0$ , ya que  $f(x) = e^{-1/x^2} \neq 0$  para cualquier  $x \neq 0$ .

Por conveniencia, concluimos esta sección con el desarrollo en serie de las funciones elementales, que discutiremos y probaremos una vez que las hayamos introducido adecuadamente en el siguiente capítulo.

**Proposición 5.48.** Se tiene:

- Para cualesquiera  $a, x \in \mathbb{R}$ ,

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^a}{n!} (x-a)^n.$$

- Para  $a = 0$ , y cualquier  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

- Dado  $a > 0$ , se tiene

$$\log x = \log a + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n a^n} (x-a)^n, \quad x \in (0, 2a].$$

- Para  $a = 0$  y  $x \in [-1, 1]$ ,

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

**Ejercicio:** Demostrar que  $\tan^{(n)}(x) = P_n(\tan x)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , donde  $P_n$  es un polinomio (no necesariamente de grado  $n$ ). Usa esto para calcular  $T_6[\tan, 0](x)$ .

**Ejercicio:** Calcular los siguientes límites

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos(\sqrt{2}x) - x}{(\tan x)^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x \arctan x - x^2}{x^6}.$$

**Ejercicio:** Encontrar  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  de forma que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[5]{1+x^5} - 1 - \alpha x^5)(x - \tan x - \beta x^3)}{x^{15}} = \gamma.$$

# Capítulo 6

## Funciones integrables

### 6.1 Continuidad uniforme

Como paso previo al estudio del Cálculo Integral, introducimos una propiedad más fuerte que la continuidad, que es la *continuidad uniforme*, que será fundamental para demostrar la existencia de la integral.

Recordamos la definición de continuidad: si  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, entonces podemos escribir:

$$\forall x \in A \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : y \in A, |y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon. \quad (\text{C})$$

Aquí  $\delta$  depende de  $\varepsilon$ , pero también del punto  $x \in A$  que estemos considerando. Fijado  $\varepsilon > 0$ , algunos puntos de  $A$  obligan a tomar  $\delta$  muy pequeño, mientras que otros permiten un  $\delta$  relativamente grande, según la rapidez con que varíe  $f$  cerca de cada punto.

La idea de continuidad uniforme es exigir que, para cada  $\varepsilon > 0$ , podamos encontrar un mismo  $\delta > 0$  que funcione para todos los puntos del conjunto  $A$ .

**Definición 6.1.** Sea  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ . Diremos que  $f$  es *uniformemente continua* en  $A$  cuando, para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que, si  $x, y \in A$  verifican  $|y - x| < \delta$ , entonces  $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ . Simbólicamente,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : x, y \in A, |y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon. \quad (\text{CU})$$

La diferencia entre (C) y (CU) es sutil pero importante: en la continuidad puntual, el  $\delta$  puede depender de  $\varepsilon$  y del punto  $x$ , mientras que en la continuidad uniforme  $\delta$  sólo depende de  $\varepsilon$ . Es inmediato que, si  $f$  es uniformemente continua, entonces  $f$  es continua. El recíproco, en cambio, es falso, como veremos enseguida.

**Proposición 6.2.** Una función  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  es uniformemente continua en  $A$  si, y solo si, para cualesquiera dos sucesiones  $\{y_n\}$  y  $\{x_n\}$  de puntos de  $A$  tales que  $\{y_n - x_n\} \rightarrow 0$ , se cumple

$$\{f(y_n) - f(x_n)\} \rightarrow 0.$$

#### Demostración



Sea  $\varepsilon > 0$ . Como  $f$  es uniformemente continua, tenemos un  $\delta > 0$  tal que si

$|x - y| < \delta$  entonces  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ . Por otro lado, sabemos que  $\{y_n - x_n\} \rightarrow 0$ , luego existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que, para todo  $n \geq m$ , se tiene  $|y_n - x_n| < \delta$ , y por tanto  $|f(y_n) - f(x_n)| < \varepsilon$ . Hemos probado que  $\{f(y_n) - f(x_n)\} \rightarrow 0$ .

Para la implicación recíproca, suponemos que  $f$  no es uniformemente continua, y construiremos dos sucesiones  $\{x_n\}$  e  $\{y_n\}$  tales que  $\{x_n - y_n\} \rightarrow 0$  pero  $|x_n - y_n| \not\rightarrow 0$ .

Como  $f$  no es uniformemente continua, encontramos un  $\varepsilon_0 > 0$  tal que, para cada  $\delta > 0$ , existen  $x, y \in A$  con  $|y - x| < \delta$  y  $|f(y) - f(x)| \geq \varepsilon_0$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$  aplicamos esto con  $\delta = 1/n$  y obtenemos puntos  $x_n, y_n \in A$  con  $|y_n - x_n| < 1/n$  y  $|f(y_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon_0$ . Por tanto,  $\{f(x_n) - f(y_n)\}$  no puede converger a 0. ■

Usando esta caracterización, encontramos ejemplos sencillos de funciones continuas que no son uniformemente continuas.

### Ejemplo

La función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^2$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  es continua pero no es uniformemente continua.

**Resolución.** Consideramos las sucesiones  $x_n = n + \frac{1}{n}$  e  $y_n = n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Claramente  $\{x_n - y_n\} \rightarrow 0$ , pero

$$x_n^2 - y_n^2 = (x_n - y_n)(x_n + y_n) = \frac{1}{n} \left( 2n + \frac{1}{n} \right) = 2 + \frac{1}{n^2} \rightarrow 2.$$

Introducimos ahora una familia importante de funciones uniformemente continuas.

**Definición 6.3.** Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Diremos que  $f$  es *lipschitziana* cuando existe una constante  $M \geq 0$  tal que

$$|f(y) - f(x)| \leq M |y - x| \quad \forall x, y \in A. \quad (6.1)$$

Si  $f$  es una función lipschitziana, existe una constante mínima  $M_0 \geq 0$  que verifica la desigualdad anterior, a saber,

$$M_0 = \sup \left\{ \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} : x, y \in A, x \neq y \right\}.$$

Dicha constante se denomina la *constante de Lipschitz* de  $f$ .

**Proposición 6.4.** Toda función lipschitziana es uniformemente continua.

### Demostración

Dado  $\varepsilon > 0$ , basta tomar  $0 < \delta M < \varepsilon$ ; entonces, si  $|y - x| < \delta$ , se tiene

$$|f(y) - f(x)| \leq M |y - x| < \varepsilon.$$

■

**Proposición 6.5.** Sea  $I$  un intervalo no trivial y  $f \in C(I) \cap D(I^\circ)$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (1)  $f$  es lipschitziana en  $I$ .
- (2) La derivada  $f'$  está acotada en  $I^\circ$ , es decir, existe  $M \geq 0$  tal que  $|f'(x)| \leq M$  para todo  $x \in I^\circ$ .

En el caso de que se verifiquen (1) y (2), la constante de Lipschitz de  $f$  viene dada por

$$M_0 = \sup\{|f'(x)| : x \in I^\circ\}. \quad (6.2)$$

### Demostración

(1)  $\Rightarrow$  (2). Sea  $M_0$  la constante de Lipschitz de  $f$ . Para  $x \in I^\circ$  y  $y \in I$ ,  $y \neq x$ , se tiene

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| \leq M_0.$$

Tomando límites cuando  $y \rightarrow x$  obtenemos  $|f'(x)| \leq M_0$ , de donde se deduce que  $f'$  está acotada y que

$$\sup\{|f'(x)| : x \in I^\circ\} \leq M_0.$$

(2)  $\Rightarrow$  (1). Sea  $M = \sup\{|f'(x)| : x \in I^\circ\}$ , que existe por hipótesis. Dados  $x, y \in I$  con  $x \neq y$ , el TVM proporciona un punto  $c \in I^\circ$  tal que

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c),$$

y por tanto

$$|f(y) - f(x)| = |f'(c)| |y - x| \leq M |y - x|.$$

Esto prueba que  $f$  es lipschitziana en  $I$  para la constante  $M$ . Por tanto,  $M_0 \leq M$  por definición de la constante de Lipschitz. ■

Del resultado anterior y el teorema de Weierstrass se deduce un criterio cómodo para garantizar que la derivada esté acotada.

**Corolario 6.6.** Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$  y  $f \in C^1[a, b]$ . Entonces  $f$  es lipschitziana en  $[a, b]$ , con constante de Lipschitz

$$M_0 = \max\{|f'(x)| : x \in [a, b]\}.$$

Como ejemplo de función uniformemente continua que no es lipschitziana, consideramos la función raíz cuadrada.

### Ejemplo

La función  $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x}$ , es uniformemente continua pero no es lipschitziana.

**Resolución.** Para probar la continuidad uniforme, tomamos  $x, y \in \mathbb{R}_0^+$  con  $x < y$  y observamos que

$$|\sqrt{y} - \sqrt{x}| = \sqrt{y} - \sqrt{x} = \frac{y - x}{\sqrt{y} + \sqrt{x}} \leq \frac{y - x}{\sqrt{y}} \leq \frac{y - x}{\sqrt{y - x}} = \sqrt{y - x} = \sqrt{|y - x|},$$

luego

$$|\sqrt{y} - \sqrt{x}| \leq \sqrt{|y - x|},$$

y esta desigualdad sigue siendo válida si  $x \geq y$ .

Dado  $\varepsilon > 0$ , basta imponer  $|y - x| < \varepsilon^2$  para que  $|\sqrt{y} - \sqrt{x}| < \varepsilon$ , lo que muestra que  $f$  es uniformemente continua.

Sin embargo,  $f$  no es lipschitziana en  $\mathbb{R}_0^+$ . En efecto,  $f$  es derivable en  $(\mathbb{R}_0^+)^{\circ} = \mathbb{R}^+$  y

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

que se hace arbitrariamente grande cuando  $x \rightarrow 0^+$ . Por la proposición anterior, esto impide que exista una constante de Lipschitz en  $\mathbb{R}_0^+$ .

El resultado siguiente mejora lo visto más arriba: no sólo las funciones derivables con derivada continua en un intervalo cerrado y acotado son uniformemente continuas, sino que cualquier función continua en un intervalo de ese tipo lo es.

**Teorema 6.7** (Teorema de Heine). Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$  y  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Entonces  $f$  es uniformemente continua en  $[a, b]$ .

### Demostración

Razonamos por contradicción. Supongamos que  $f$  no es uniformemente continua. Por la caracterización mediante sucesiones, existen  $\varepsilon_0 > 0$  y dos sucesiones  $\{y_n\}$  y  $\{x_n\}$  de puntos de  $[a, b]$  tales que  $|y_n - x_n| \rightarrow 0$  pero

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Como  $\{x_n\}$  es una sucesión en el intervalo cerrado y acotado  $[a, b]$ , el Teorema de Bolzano–Weierstrass nos proporciona una subsucesión  $\{x_{\sigma(n)}\}$  que converge a cierto  $x \in [a, b]$ . Del hecho  $|y_n - x_n| \rightarrow 0$  se deduce que también  $\{y_{\sigma(n)}\}$  converge a  $x$ .

La continuidad de  $f$  en  $x$  nos da

$$f(x_{\sigma(n)}) \rightarrow f(x), \quad f(y_{\sigma(n)}) \rightarrow f(x),$$

y por tanto

$$|f(y_{\sigma(n)}) - f(x_{\sigma(n)})| \rightarrow 0.$$

Esto contradice la condición  $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$  para todo  $n$ , aplicada a la subsucesión. La suposición inicial era falsa y  $f$  es uniformemente continua en  $[a, b]$ . ■

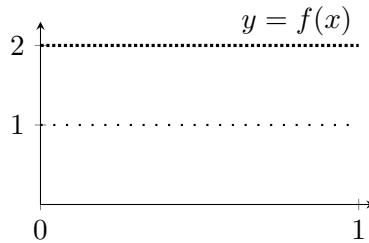
Este teorema pone de manifiesto que la continuidad uniforme, al igual que la convexidad y a diferencia de la continuidad puntual o de la derivabilidad, es una propiedad *global*: depende del comportamiento de la función en todo el dominio considerado. Como consecuencia, si  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua, entonces su restricción a cualquier intervalo cerrado y acotado  $[a, b]$  es uniformemente continua.

**Ejercicio:** Sea  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = 1/x$  para todo  $x > 0$ . Dado  $a > 0$ , probar que  $f|_{[a, +\infty]}$  es lipschitziana, pero  $f|_{(0, a]}$  no es uniformemente continua.

## 6.2 La integral de Riemann

La noción de integral está íntimamente ligada, desde sus orígenes, a las ideas de área y volumen. Ya en la antigüedad se utilizaban procedimientos como el método de exhaución, comentado al inicio del capítulo 5, para aproximar el área de regiones planas o el volumen de sólidos mediante figuras cada vez más finas, que pueden entenderse como antecedentes lejanos e inspiración de la teoría moderna de la integración. Sin embargo, no fue hasta el siglo XIX cuando se formuló una definición matemática precisa de integral, debida a Cauchy, y se empezó a estudiar la integral como un objeto teórico con significado propio, más allá de ser simplemente la operación inversa de la derivación.

La necesidad de refinar el concepto de integral surgió cuando el análisis empezó a trabajar con funciones cada vez más generales. El desarrollo de las series de Fourier y el cambio de punto de vista sobre qué debe considerarse una función mostraron que la intuición geométrica de área bajo la curva ya no bastaba: hay funciones cuya gráfica no determina de manera obvia una región con área bien definida. Ejemplos como el de la función que en  $[0, 1]$  vale 2 en los racionales y 1 en los irracionales ponen de manifiesto que es necesario precisar matemáticamente qué queremos decir con *área* antes de hablar de integrales.



¿Determina  $f$  un recinto con área? En caso afirmativo, ¿su área es 1? ¿2?

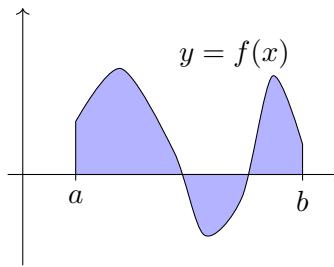
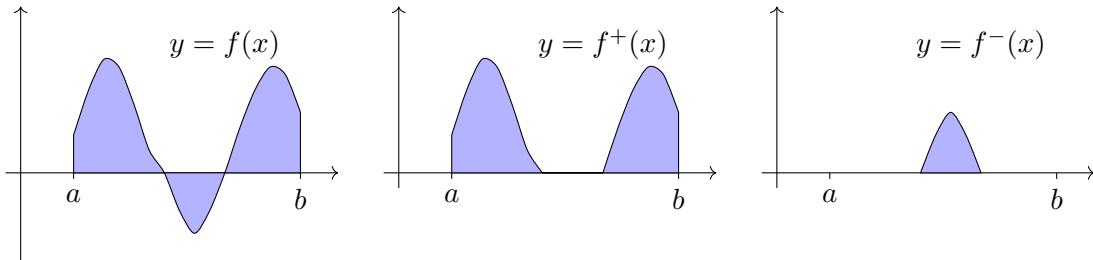
En este capítulo estudiaremos la integral de Riemann, que mejora y generaliza la definición de Cauchy sin añadir dificultad adicional. Su construcción se basa en aproximar el área mediante sumas de rectángulos cada vez más finos y en poner en juego las herramientas de límites desarrolladas en capítulos anteriores. La teoría de la integral que hoy se considera más completa es la integral de Lebesgue, adecuada para tratar funciones muy generales, pero cuyo estudio queda fuera del alcance de este curso. Nuestro objetivo será comprender bien la integral de Riemann, sus propiedades básicas y, sobre todo, el **Teorema Fundamental del Cálculo**, que establece el vínculo profundo entre derivación e integración y convierte a la integral en una herramienta central del análisis.

Comenzamos especificando el tipo de conjuntos cuya área queremos definir.

**Definición 6.8.** Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada. Llamamos  $R(f; a, b)$  a la región del plano  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  limitada por la gráfica  $y = f(x)$ , el eje de abscisas y las rectas verticales  $x = a$  y  $x = b$ .

**Definición 6.9.** Sea  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Definimos la *parte positiva* y la *parte negativa* de  $f$  como las funciones  $f^+, f^-: A \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por

$$f^+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2} = \max\{f(x), 0\}, \quad f^-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2} = \max\{-f(x), 0\}.$$

Conjunto  $R(f, a, b)$  de una función que cambia de signo.

Nótese que las funciones parte positiva y parte negativa **son ambas positivas**. Además, se tienen las siguientes relaciones, de comprobación inmediata:

- $f = f^+ - f^-$  y  $|f| = f^+ + f^-$ .
- Si  $f(x) \geq 0$ , entonces  $f^+(x) = f(x)$  y  $f^-(x) = 0$ .
- Si  $f(x) \leq 0$ , entonces  $f^+(x) = 0$  y  $f^-(x) = -f(x)$ .

Para dar sentido al área de  $R(f, a, b)$  usando la integral de Riemann, aproximamos este recinto mediante rectángulos cada vez más finos. Para ello, comenzamos dividiendo el intervalo  $[a, b]$  en un número finito de subintervalos que no se solapan.

**Definición 6.10.** Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$ . Una *partición* de  $[a, b]$  es un conjunto finito de puntos

$$P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\},$$

que divide al intervalo  $[a, b]$  en los subintervalos  $[x_{k-1}, x_k]$ , para  $k = 1, \dots, n$ .

Dada una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada y una partición  $P$  de  $[a, b]$ , elegimos en cada subintervalo  $[x_{k-1}, x_k]$  un punto  $t_k$ . Sobre cada uno de ellos consideramos el rectángulo de base  $[x_{k-1}, x_k]$  y altura  $f(t_k)$  (pudiendo quedar por encima o por debajo del eje  $x$  según el signo de  $f(t_k)$ ). La suma de las áreas con su signo es lo que llamamos suma de Riemann.

**Definición 6.11.** Sea  $P = \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$  una partición de  $[a, b]$  y, para cada  $k = 1, \dots, n$ , tomemos un punto cualquiera  $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ . Llamamos *suma de Riemann* de  $f$  asociada a  $P$  a la cantidad

$$\sigma(f, P) = \sum_{k=1}^n f(t_k) (x_k - x_{k-1}).$$

Nótese que para cada partición  $P$ , podemos considerar infinitas sumas de Riemann dependiendo de cómo se elijan los puntos  $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ . Si  $f$  toma valores positivos y negativos, podemos descomponerla como  $f = f^+ - f^-$ . Entonces

$$\sigma(f, P) = \sum_{k=1}^n f(t_k) (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n (f^+(t_k) - f^-(t_k))(x_k - x_{k-1}) = \sigma(f^+, P) - \sigma(f^-, P).$$

En este caso,  $\sigma(f, P)$  puede interpretarse como una aproximación del área de  $R(f^+, a, b)$  menos el área de  $R(f^-, a, b)$ .

Para controlar mejor las aproximaciones introducimos las sumas superior e inferior, que se obtienen tomando, en cada subintervalo, las alturas máximas y mínimas que puede alcanzar  $f$ .

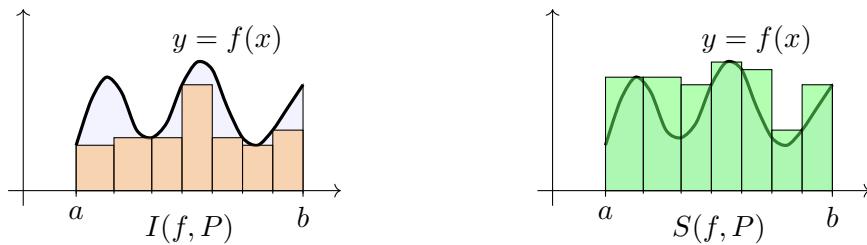
**Definición 6.12.** Sea  $P = \{a = x_0 < \dots < x_n = b\}$  una partición de  $[a, b]$  y sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada. Definimos

$$M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}, \quad m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

para  $k = 1, \dots, n$ . Las sumas

$$S(f, P) = \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1}), \quad I(f, P) = \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1})$$

se llaman, respectivamente, *suma superior* e *suma inferior* de  $f$  para la partición  $P$ .



Una propiedad sencilla pero importante es la siguiente: si  $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ , entonces  $m_k \leq f(t_k) \leq M_k$  para todo  $k$ , y por tanto

$$I(f, P) \leq \sigma(f, P) \leq S(f, P)$$

para cualquier suma de Riemann  $\sigma(f, P)$  asociada a la partición  $P$ .

Estas sumas tienen una interpretación geométrica clara:  $S(f, P)$  e  $I(f, P)$  son aproximaciones, por exceso y por defecto respectivamente, del área de  $R(f^+, a, b)$  menos el área de  $R(f^-, a, b)$ .

Supongamos que  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es acotada y positiva. Para cada partición  $P$  de  $[a, b]$  hemos definido las sumas inferior y superior

$$I(f, P) \leq S(f, P).$$

El área exacta de la región  $R(f, a, b)$  debe ser un número mayor o igual que cualquier suma inferior y menor o igual que cualquier suma superior. Llamemos  $\mathcal{P}[a, b]$  al conjunto de todas las posibles particiones de  $[a, b]$ . De hecho, se tiene:

**Lema 6.13.** Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada. Entonces el conjunto de todas las sumas inferiores de  $f$  está mayorado, el conjunto de todas sus sumas superiores está minorado, y se cumple

$$\sup\{I(f, P) : P \in \mathcal{P}[a, b]\} \leq \inf\{S(f, P) : P \in \mathcal{P}[a, b]\}.$$

### Demostración

Por supuesto, fijada una partición  $P$ , se tiene trivialmente que  $I(f, P) \leq S(f, P)$ . Lo que se necesita demostrar es mucho más restrictivo: que esta relación se mantiene

independientemente de la partición que tomemos para hacer cada suma.

Empezamos viendo que al refinar una partición al añadirle un solo punto, la correspondiente suma superior disminuye y la suma inferior aumenta.

Dada  $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ , consideramos la partición que resulta de añadirle un punto  $c$  entre  $x_{k-1}$  y  $x_k$ , para algún  $k \in \{1, \dots, n\}$ :

$$P' = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < c < x_k < \dots < x_n = b\}.$$

Al pasar de  $P$  a  $P'$ , todos los sumandos de  $S(f, P)$  se quedan igual salvo el correspondiente al subintervalo  $[x_{k-1}, x_k]$ , que se sustituye por la suma de dos. Si nos fijamos en dichos sumandos, vemos que

$$\begin{aligned} & \sup\{f(t) : t \in [x_{k-1}, c]\} (c - x_{k-1}) + \sup\{f(t) : t \in [c, x_k]\} (x_k - c) \\ & \leq m_k(c - x_{k-1} + x_k - c) = m_k(x_k - x_{k-1}). \end{aligned}$$

Por tanto  $S(f, P') \leq S(f, P)$ . Un razonamiento análogo, usando ínfimos en vez de supremos, muestra que

$$I(f, P') \geq I(f, P).$$

Mediante una sencilla demostración por inducción obtenemos que si  $P, P' \in \mathcal{P}[a, b]$  y  $P \subset P'$  (es decir,  $P'$  tiene al menos todos los puntos de  $P$ ), entonces

$$I(f, P) \leq I(f, P') \leq S(f, P') \leq S(f, P).$$

Tomemos ahora dos particiones cualesquiera  $P, Q \in \mathcal{P}[a, b]$  y consideremos su unión  $P \cup Q$ , que es una partición que refina a ambas. Aplicando la desigualdad anterior a los pares  $(P, P \cup Q)$  y  $(Q, P \cup Q)$ , obtenemos

$$I(f, P) \leq I(f, P \cup Q) \leq S(f, P \cup Q) \leq S(f, Q).$$

Así, cualquier suma inferior es menor o igual que cualquier suma superior. En particular, el conjunto de todas las sumas inferiores está mayorado por cualquier suma superior y el conjunto de todas las sumas superiores está minorado por cualquier suma inferior. Esto implica

$$\sup\{I(f, P) : P \in \mathcal{P}[a, b]\} \leq \inf\{S(f, P) : P \in \mathcal{P}[a, b]\},$$

tal como queríamos. ■

**Definición 6.14.** Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada tal que  $f(x) \geq 0$  para todo  $x \in [a, b]$ . Diremos que el conjunto ordenado  $R(f; a, b)$  tiene área cuando se verifica

$$\inf\{S(f, P) : P \in \mathcal{P}[a, b]\} = \sup\{I(f, P) : P \in \mathcal{P}[a, b]\}.$$

Al valor común lo llamaremos el área de  $R(f; a, b)$ . En este caso diremos también que  $f$  es *integrable Riemann* en  $[a, b]$  y definimos

$$\int_a^b f(x) dx = \text{área}(R(f; a, b)).$$

**Definición 6.15.** Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada. Diremos que  $f$  es *integrable Riemann* en  $[a, b]$  si

lo son  $f^+$  y  $f^-$ . En tal caso definimos

$$\int_a^b f(x) dx = \text{área}(R(f^+; a, b)) - \text{área}(R(f^-; a, b)).$$

Es fácil comprobar que si  $f$  es integrable entonces también lo es  $|f| = f^+ + f^-$ . Además, si  $|f|$  es integrable y lo es  $f^+$  o bien  $f^-$ , entonces ambas son integrables. Además, se tiene la siguiente caracterización.

**Proposición 6.16.** Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada. Entonces  $f$  es integrable si, y solo si, para todo  $\varepsilon > 0$  existe una partición  $P_\varepsilon$  de  $[a, b]$  tal que

$$S(f, P_\varepsilon) - I(f, P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

### Demostración

*Esta demostración no se vio en clase.*

En primer lugar, nótese que podemos suponer que  $f \geq 0$ , ya que para toda constante  $C \in \mathbb{R}$  se tiene

$$S(f+C, P) - I(f+C, P) = S(f, P) + C(b-a) - I(f, P) - C(b-a) = S(f, P) - I(f, P),$$

donde hemos usado que las sumas superior e inferior de cualquier constante coinciden con el área del rectángulo de base  $b-a$  y altura  $C$ . Por tanto, si  $f$  toma valores negativos, podemos considerar  $f + \inf f$ , que cumple  $f + \inf f \geq 0$ .

Bajo ese supuesto, ser integrable equivale a que

$$\inf\{S(f, P) : P \in \mathcal{P}[a, b]\} = \sup\{I(f, P) : P \in \mathcal{P}[a, b]\}.$$

La implicación en este sentido es inmediata. Por un lado, sabemos que

$$S(f, P) - I(f, Q) \geq 0 \quad \forall P, Q \in \mathcal{P}[a, b].$$

La hipótesis anterior implica directamente que  $\inf\{S(f, P) - I(f, Q) : P, Q \in \mathcal{P}[a, b]\} = 0$ , y basta considerar que

$$\begin{aligned} & \inf\{S(f, P) - I(f, Q) : P, Q \in \mathcal{P}[a, b]\} \\ &= \inf\{S(f, P) : P \in \mathcal{P}[a, b]\} - \sup\{I(f, Q) : Q \in \mathcal{P}[a, b]\}. \end{aligned}$$

Llamemos, por abreviar,  $\alpha = \int_a^b f(x) dx$ , y sea  $\varepsilon > 0$ . Por definición de supremo e ínfimo, encontramos dos particiones  $P_\varepsilon^1$  y  $P_\varepsilon^2$  que cumplen

$$\begin{aligned} \alpha - \varepsilon/2 &\leq I(f, P_\varepsilon^1) \leq \alpha \\ \alpha &\leq S(f, P_\varepsilon^2) \leq \alpha + \varepsilon/2. \end{aligned}$$

Consideramos la partición  $P_\varepsilon = P_\varepsilon^1 \cup P_\varepsilon^2$ , que refina a ambas. Por tanto

$$\begin{aligned} \alpha - \varepsilon/2 &\leq I(f, P_\varepsilon^1) \leq I(f, P_\varepsilon) \leq \alpha \\ \alpha &\leq S(f, P_\varepsilon) \leq S(f, P_\varepsilon^2) \leq \alpha + \varepsilon/2, \end{aligned}$$

de donde se sigue  $S(f, P_\varepsilon) - I(f, P_\varepsilon) < \varepsilon$ . ■

La integral tiene las siguientes propiedades básicas:

**Proposición 6.17.** Sean  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funciones integrables Riemann en  $[a, b]$  y sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Entonces se verifican las siguientes propiedades:

(i) **Linealidad.** La función  $\alpha f + \beta g$  es integrable en  $[a, b]$  y se cumple

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

(ii) **Conservación del orden.** Si  $f(x) \leq g(x)$  para todo  $x \in [a, b]$ , entonces

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

En particular, si  $f$  es integrable en  $[a, b]$  y  $m \leq f(x) \leq M$  para todo  $x \in [a, b]$ , se tiene

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

(iii) **Integrabilidad del valor absoluto.** Si  $f$  es integrable en  $[a, b]$ , entonces también lo es  $|f|$  y se verifica

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

(iv) **Aditividad respecto del intervalo.** Si  $a < c < b$ , entonces  $f$  es integrable en  $[a, b]$  si, y sólo si, es integrable en  $[a, c]$  y en  $[c, b]$ , y en ese caso

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

### Demostración

La demostración de (i) se basa en el simple hecho de que, para toda  $P \in \mathcal{P}[a, b]$ , se tiene  $I(\alpha f + \beta g, P) = \alpha I(f, P) + \beta I(g, P)$ . De la misma manera, si  $f(x) \leq g(x)$ , entonces  $I(f, P) \leq I(g, P)$ , lo que nos da inmediatamente (ii).

Probamos (iii). Si  $f$  es integrable, entonces lo son  $f^+$  y  $f^-$  por definición, y usando (i) también lo será  $|f| = f^+ + f^-$ . Además, sabemos que

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \quad \forall x \in [a, b],$$

y podemos usar (ii) para concluir que

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx \implies \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Finalmente demostramos (iv). Con el fin de no sobrecargar innecesariamente la notación, si tenemos  $[c, d] \subset [a, b]$  y  $P \in \mathcal{P}[c, d]$ , entonces entendemos que

$$\sigma(f, P) = \sigma(f|_{[c, d]}, P).$$

Supongamos que  $f$  es integrable en  $[a, c]$  y en  $[c, b]$  y sean  $c \in (a, b)$  y  $\varepsilon > 0$ . Sean  $P_1 \in \mathcal{P}[a, c]$  y  $P_2 \in \mathcal{P}[c, b]$  particiones tales que

$$S(f, P_1) - I(f, P_1) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad S(f, P_2) - I(f, P_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces  $P_1 \cup P_2 \in \mathcal{P}[a, b]$  y se tiene

$$S(f, P_1 \cup P_2) - I(f, P_1 \cup P_2) = S(f, P_1) + S(f, P_2) - I(f, P_1) - I(f, P_2) < \varepsilon.$$

Por tanto,  $f$  es integrable en  $[a, b]$ .

Recíprocamente, sea  $P \in \mathcal{P}[a, b]$  tal que  $S(f, P) - I(f, P) < \varepsilon$ . Entonces, si  $P' = P \cup \{c\}$ , sabemos que la suma superior decrece y la inferior crece, luego también  $S(f, P') - I(f, P') < \varepsilon$ . Como  $c$  es un punto de  $P'$ , podemos escribir  $P'$  como unión de particiones  $P_1 \in \mathcal{P}[a, c]$  y  $P_2 \in \mathcal{P}[c, b]$ . Tenemos entonces

$$\varepsilon > S(f, P') - I(f, P') = \underbrace{(S(f, P_1) - I(f, P_1))}_{\geq 0} + \underbrace{(S(f, P_2) - I(f, P_2))}_{\geq 0}$$

lo que nos da

$$S(f, P_1) - I(f, P_1) < \varepsilon, \quad S(f, P_2) - I(f, P_2) < \varepsilon.$$

■

Nuestro objetivo ahora es discutir qué clase de funciones son integrables con esta noción de área que hemos introducido.

**Teorema 6.18.** Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Cada una de las siguientes hipótesis garantiza que  $f$  es integrable Riemann en  $[a, b]$ :

- (1)  $f$  es acotada en  $[a, b]$  y tiene un número finito de discontinuidades en  $[a, b]$ . En particular, toda función continua en un intervalo cerrado y acotado es integrable en dicho intervalo.
- (2)  $f$  es monótona en  $[a, b]$ .

### Demostración

En ambos casos, para cada  $\varepsilon > 0$  construiremos una partición  $P_\varepsilon$  de  $[a, b]$  tal que  $S(f, P_\varepsilon) - I(f, P_\varepsilon) < \varepsilon$ . Por lo discutido en la demostración de la Proposición 6.16, podemos suponer que  $f \geq 0$  en  $[a, b]$ .

**Caso (1)**  $f$  acotada con un número finito de discontinuidades.

Supongamos primero que  $f$  es continua y positiva en  $[a, b]$ . Por el teorema de Heine,  $f$  es uniformemente continua, así que dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

para todos  $x, y \in [a, b]$ . Tomemos una partición  $P_\varepsilon$  cuyos subintervalos tengan longitud menor que  $\delta$ . Como  $f$  es continua, el teorema de Weierstrass nos asegura que existen  $s_k, t_k \in [x_{k-1}, x_k]$  tales que

$$M_k = f(s_k), \quad y \quad m_k = f(t_k).$$

Como  $|t_k - s_k| < \delta$ , la continuidad uniforme nos dice que

$$M_k - m_k = f(s_k) - f(t_k) \leq \varepsilon/(b - a),$$

y por tanto

$$S(f, P_\varepsilon) - I(f, P_\varepsilon) = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = \varepsilon.$$

Por el criterio anterior,  $f$  es integrable Riemann en  $[a, b]$ .

Sea ahora  $f$  acotada y positiva en  $[a, b]$  y continua en  $(a, b)$ . Tomamos  $[c, d] \subset [a, b]$  de forma que

$$a - c < \frac{\varepsilon}{3 \sup f} \quad y \quad b - d < \frac{\varepsilon}{3 \sup f}.$$

Como  $f$  es integrable en  $[c, d]$  por ser continua, existe  $P \in \mathcal{P}[a, b]$  con  $S(f, P) - I(f, P) < \frac{\varepsilon}{3}$ . Sea  $Q = \{a\} \cup P \cup \{b\}$ . Se tiene

$$S(f, Q) - I(f, Q) \leq (c - a) \sup f + S(f, P) + (b - d) \sup f - I(f, P) < \varepsilon.$$

Si tenemos un número finito de discontinuidades  $\{d_1, \dots, d_n\} \subset [a, b]$ , aplicamos el paso anterior a cada subintervalo donde  $f$  es continua salvo en los extremos, y usamos la propiedad de aditividad de la integral.

**Caso (2)**  $f$  monótona en  $[a, b]$ .

Supongamos que  $f$  es creciente (el caso decreciente es análogo). Sea  $\varepsilon > 0$  y tomemos una partición  $P_\varepsilon$  de  $[a, b]$  cuya longitud máxima de subintervalo verifique

$$\max\{x_k - x_{k-1} : k \in \{1, \dots, n\}\} < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}.$$

Como  $f$  es creciente, en cada subintervalo  $[x_{k-1}, x_k]$  se tiene

$$M_k = f(x_k), \quad m_k = f(x_{k-1}),$$

de modo que

$$S(f, P_\varepsilon) - I(f, P_\varepsilon) = \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1}))(x_k - x_{k-1}).$$

Acotando cada  $x_k - x_{k-1}$  por la longitud máxima del subintervalo, obtenemos

$$S(f, P_\varepsilon) - I(f, P_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} (f(b) - f(a)) = \varepsilon.$$

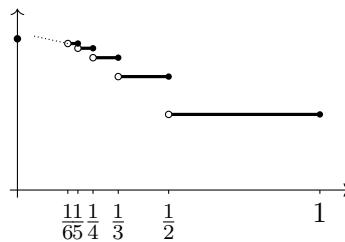
De nuevo, el criterio de integrabilidad da que  $f$  es integrable Riemann en  $[a, b]$ . ■

**Ejemplo 6.19.** Definimos  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mediante

$$f(0) = 1, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\lfloor 1/x \rfloor} \frac{1}{2^n} \quad \text{para } x \in (0, 1],$$

Podemos ver que  $f$  es decreciente en  $[0, 1]$ , ya que al aumentar  $x$  disminuye  $1/x$  y, por tanto,  $\lfloor 1/x \rfloor$  sólo puede disminuir, lo que hace decrecer la suma. Además,  $f$  tiene discontinuidades en todos los puntos de la forma  $1/(n+1)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Hay, por tanto, infinitas discontinuidades en  $[0, 1]$ .

Sin embargo,  $f$  es monótona y acotada, así que, por el teorema anterior, es integrable Riemann en  $[0, 1]$ . La gráfica de la función tiene la forma de una escalera decreciente que se aproxima al valor 1 cuando  $x \rightarrow 0^+$ .



Llegados a este punto, podemos preguntarnos cómo usar la definición de integral para calcular, en la práctica, el valor de  $\int_a^b f(x) dx$ . La idea intuitiva es que, cuanto mayor sea el número de subintervalos de la partición y más pequeñas sean sus longitudes, mejor debería ser la aproximación obtenida mediante convenientes sumas de Riemann. Para formalizar esto introducimos la siguiente noción.

**Definición 6.20.** Sea  $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  una partición de  $[a, b]$ . Llamamos *paso* o *anchura* de la partición  $P$  al número

$$\Delta(P) = \max\{x_k - x_{k-1} : k \in \{1, \dots, n\}\}.$$

La siguiente afirmación justifica que, para funciones integrables, las sumas de Riemann asociadas a particiones cada vez más finas convergen todas al mismo valor: la integral.

**Teorema 6.21.** Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función integrable y sea  $\{P_m\}$  una sucesión de particiones de  $[a, b]$  tal que  $\{\Delta(P_m)\} \rightarrow 0$  cuando  $m \rightarrow +\infty$ . Sea  $\sigma(f, P_m)$  cualquier suma de Riemann de  $f$  para la partición  $P_m$ . Entonces

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S(f, P_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sigma(f, P_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} I(f, P_m) = \int_a^b f(x) dx.$$

### Demostración

La demostración de este resultado para una función integrable cualquiera es altamente técnico y precisa de herramientas que se escapan a los objetivos de este curso. Por ello, nos limitaremos a dar una demostración para el caso más sencillo en que  $f$  es una función continua.

Sea  $P_m$  una sucesión de particiones de  $[a, b]$  con  $\Delta P_m \rightarrow 0$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , el teorema de Heine nos da un  $\delta > 0$  tal que si  $|x - y| < \delta$  entonces  $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ . Puesto que  $\Delta P_m \rightarrow 0$ , tenemos un  $m_0 \in \mathbb{N}$  de forma que  $\Delta P_m < \delta$  para  $m \geq m_0$ .

Fijado  $m \geq m_0$ , si  $P_m = \{a = x_0 < \dots < x_{n_m} = b\}$ , por el teorema de Weierstrass existen  $t_k$  y  $s_k$  en  $[x_{k-1}, x_k]$  para  $k = 1, \dots, n_m$  tales que

$$S(f, P_m) - I(f, P_m) \leq \sum_{k=1}^{n_m} |f(s_k) - f(t_k)| |x_k - x_{k-1}| < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{n_m} (x_k - x_{k-1}) = \varepsilon.$$

Esto demuestra que  $S(f, P_m) - I(f, P_m) \rightarrow 0$ .

Ahora escribimos

$$0 \leq S(f, P_m) - \int_a^b f(x) dx \leq S(f, P_m) - I(f, P_m) \rightarrow 0,$$

$$0 \leq \int_a^b f(x) dx - I(f, P_m) \leq S(f, P_m) - I(f, P_m) \rightarrow 0.$$

Por tanto,  $\int_a^b f(x) dx \leftarrow I(f, P_m) \leq \sigma(f, P_m) \leq S(f, P_m) \rightarrow \int_a^b f(x) dx$ . ■

Este resultado permite, en algunos casos concretos y con cierto ingenio, calcular integrales como límite de sumas. Más adelante veremos métodos sistemáticos para calcular integrales; por ahora es más útil interpretar el teorema en sentido contrario, como herramienta para determinar límites de ciertas sucesiones. Un caso especialmente frecuente es el siguiente.

**Corolario 6.22.** Para toda función  $f$  integrable en  $[0, 1]$  se verifica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx.$$

En efecto, basta considerar la partición  $P_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\}$ , cuyo paso es  $\Delta(P_n) = 1/n \rightarrow 0$ , y tomar en cada subintervalo  $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$  el punto  $t_k = \frac{k}{n}$ .

### Ejemplo

**Problema.** Calcular los siguientes límites:

$$(a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n(n+k)}}, \quad (b) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)k}{n^3}$$

### Resolución.

(a) Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , llamamos

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n(n+k)}}.$$

Reescribimos cada sumando:

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+k)}} = \frac{1}{\sqrt{n^2(1+\frac{k}{n})}} = \frac{1}{n\sqrt{1+\frac{k}{n}}}.$$

Por tanto,

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right), \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}.$$

Observamos que  $f$  es continua en  $[0, 1]$  y que  $S_n$  es la suma de Riemann asociada a la partición uniforme de  $[0, 1]$  con nodos  $t_k = k/n$ . Luego,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx = \left[ 2\sqrt{1+x} \right]_0^1 = 2\sqrt{2} - 2.$$

(b) Consideramos ahora

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)k}{n^3}.$$

Escribimos cada sumando como

$$\frac{(n-k)k}{n^3} = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \frac{k}{n},$$

de modo que

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right) \frac{k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right), \quad f(x) = (1-x)x.$$

De nuevo,  $f$  es continua en  $[0, 1]$  y  $S_n$  es la suma de Riemann asociada a la partición uniforme con puntos  $t_k = k/n$ , por lo que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_0^1 (1-x)x \, dx = \int_0^1 (x-x^2) \, dx = \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Finalmente, damos respuesta a la pregunta que nos hicimos al principio de este capítulo.

### Ejemplo

La función  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$

no es integrable. Por tanto, la región asociada  $R(f; 0, 1)$  no tiene área (en el sentido de Riemann).

**Resolución.** Consideramos la sucesión de particiones de  $[0, 1]$ ,  $P_n$ , dada por  $x_k = \frac{k}{n}$  para  $k = 0, 1, \dots, n$ , que claramente verifica  $x_k - x_{k-1} = \frac{1}{n}$ , luego  $\Delta P_n \rightarrow 0$ .

Construimos dos sumas de Riemann distintas,  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ , eligiendo respectivamente puntos  $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$  todos racionales y todos irracionales. Si  $f$  fuese integrable, el resultado anterior nos diría que  $\sigma_1(f, P_n)$  y  $\sigma_2(f, P_n)$  convergen ambas a  $\int_0^1 f(x) \, dx$ . Sin embargo, vemos que

$$\begin{aligned} \sigma_1(f, P_n) &= \sum_{k=1}^n \frac{f(t_k)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1 = 1, \\ \sigma_2(f, P_n) &= \sum_{k=1}^n \frac{f(t_k)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 2 = 2. \end{aligned}$$

## 6.3 El Teorema Fundamental del Cálculo

Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función integrable. Dado  $x \in (a, b)$ , la aditividad de la integral nos dice que  $f$  es integrable en  $[a, x]$ , lo que nos permite construir una nueva función que indica el área (con signo) acumulada hasta  $x$ , esto es,  $x \mapsto \int_a^x f(t) \, dt$ .

A veces será preciso necesario medir el área acumulada desde un punto  $c \in (a, b)$ , lo que hace

necesario dar sentido a qué entendemos por  $\int_c^x f(t)dt$  cuando  $x \leq c$ . Para hacer esto, recordamos que la aditividad de la integral nos da, para cualesquiera  $x < y < z \in [a, b]$  :

$$\int_x^z f(t)dt = \int_x^y f(t)dt + \int_y^z f(t)dt.$$

Lo natural es buscar una convención que haga que esta identidad siga siendo cierta cualesquiera sean los órdenes de  $x, y, z$ . Si tomamos  $x = y$  vemos que

$$\int_x^x f(t)dt = 0, \quad (\text{C1})$$

y entonces, si  $x = z$ ,

$$\int_x^y f(t)dt = - \int_y^x f(t)dt = 0. \quad (\text{C2})$$

Adoptamos pues las convenciones (C1) y (C2) de ahora en adelante, lo que hace buena la siguiente definición.

**Definición 6.23.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función integrable y  $c \in [a, b]$ . La *función área de  $f$  en  $[a, b]$  con origen en  $c$*  es la función  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt, \quad x \in [a, b].$$

Aquí la variable de  $F$ ,  $x$ , aparece como límite superior de la integral, lo que nos obliga a usar otra variable,  $t$ , para el integrando. Por construcción,

$$F(x) = \text{área}(R(f^+; c, x)) - \text{área}(R(f^-; c, x)),$$

teniendo siempre en cuenta el posible cambio de signo que nos dan las convenciones adoptadas anteriormente.

Nuestro próximo objetivo es invertir el proceso que acabamos de hacer. Conocida la función de área  $F(x)$ , ¿es posible recuperar  $f(x)$ ? La respuesta a esta pregunta la da uno de los resultados más importantes del análisis matemático, y que relaciona conceptos *a priori* lejanos como son el área bajo una curva y la pendiente de la recta tangente a esta.

**Teorema 6.24** (Teorema Fundamental del Cálculo). Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función integrable y definamos

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a, b].$$

Entonces se verifica:

- (1)  $F$  es continua en  $[a, b]$ .
- (2) En todo punto  $y \in [a, b]$  en el que  $f$  sea continua,  $F$  es derivable y

$$F'(y) = f(y).$$

En particular, si  $f$  es continua en  $[a, b]$ , entonces  $F$  es derivable en  $(a, b)$  y  $F'(x) = f(x)$  para todo  $x \in [a, b]$ .

### Demostración

Como  $f$  es integrable en  $[a, b]$ , es una función acotada. Por tanto, existe  $M > 0$  tal que  $|f(x)| \leq M$  para todo  $x \in [a, b]$ .

(1) Sean  $x, y \in [a, b]$  con  $x \leq y$ . Entonces

$$\begin{aligned} |F(y) - F(x)| &= \left| \int_a^y f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right| = \left| \int_x^y f(t) dt \right| \\ &\leq \int_x^y |f(t)| dt \leq M(y - x). \end{aligned}$$

Si  $x \geq y$ , entonces será  $|F(x) - F(y)| \leq M(x - y)$ . En ambos casos tenemos

$$|F(y) - F(x)| \leq M |y - x|,$$

luego  $F$  es Lipschitziana en  $[a, b]$  y por tanto continua.

(2) Sea ahora  $c \in [a, b]$  un punto en el que  $f$  sea continua. Para  $x \neq c$  escribimos

$$\frac{F(x) - F(c)}{x - c} - f(c) = \frac{1}{x - c} \int_c^x f(t) dt - f(c) = \frac{1}{x - c} \int_c^x (f(t) - f(c)) dt.$$

Dado  $\varepsilon > 0$ , por la continuidad de  $f$  en  $c$  existe  $\delta > 0$  tal que, si  $t \in [a, b]$  verifica  $|t - c| < \delta$ , entonces  $|f(t) - f(c)| < \varepsilon$ . Tomemos  $x \in [a, b]$  con  $0 < |x - c| < \delta$ . Para todo  $t$  comprendido entre  $c$  y  $x$  se tiene  $|t - c| \leq |x - c| < \delta$ , luego  $|f(t) - f(c)| < \varepsilon$ , y por tanto

$$\left| \frac{1}{x - c} \int_c^x (f(t) - f(c)) dt \right| \leq \frac{1}{|x - c|} \int_c^x |f(t) - f(c)| dt \leq \frac{1}{|x - c|} \int_c^x \varepsilon dt = \varepsilon.$$

Hemos probado que, para todo  $x \in [a, b]$  con  $0 < |x - c| < \delta$ , se cumple

$$\left| \frac{F(x) - F(c)}{x - c} - f(c) \right| \leq \varepsilon.$$

Esto demuestra que

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{F(x) - F(c)}{x - c} = f(c),$$

es decir,  $F$  es derivable en  $c$  y  $F'(c) = f(c)$ . ■

**Definición 6.25.** Sea  $I$  un intervalo no trivial y  $H, h : I \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones. Decimos que  $H$  es una primitiva de  $h$  si  $H \in D(I)$  y  $H'(x) = h(x)$  para todo  $x \in I$ .

No todas las funciones admiten primitivas en un intervalo dado. Por ejemplo, una condición necesaria para que una función admita primitivas es que tenga la propiedad del valor intermedio, ya que las funciones derivadas la verifican. De hecho, se tiene la siguiente cadena de implicaciones.

**Proposición 6.26.** Dada una función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $I$  es un intervalo no trivial, consideremos las siguientes afirmaciones:

- (i)  $f$  es continua en  $I$ .
- (ii)  $f$  admite una primitiva en  $I$ .
- (iii)  $f$  tiene la propiedad del valor intermedio en  $I$ .

Se verifica que

$$(i) \implies (ii) \implies (iii).$$

■

La implicación  $(i) \Rightarrow (ii)$  es el Teorema fundamental del cálculo, y  $(ii) \Rightarrow (iii)$  lo habíamos visto como el Teorema de Darboux. Por tanto, hemos encontrado una demostración alternativa para  $(i) \Rightarrow (iii)$ , que es el teorema del valor intermedio para funciones continuas.

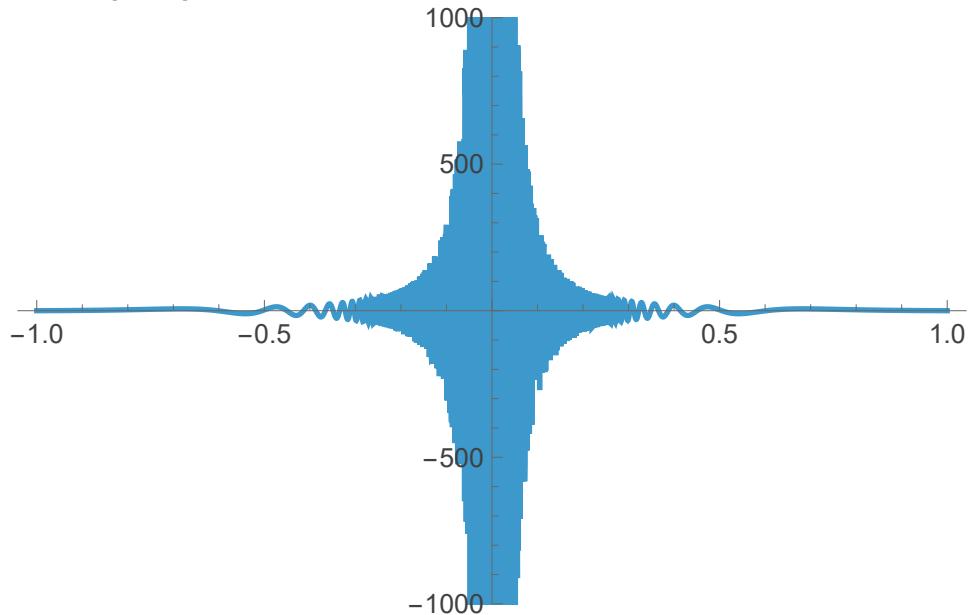
En vista de la discusión anterior, uno podría preguntarse si toda función que admite una primitiva en un intervalo  $[a, b]$  será integrable en el sentido de Riemann. Por sorprendente que pueda parecer, la respuesta es negativa.

### Ejemplo

Sea  $F : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $F(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x^3}\right)$  para  $x \neq 0$  y  $F(0) = 0$ . Una comprobación rutinaria nos dice que  $F \in D[-1, 1]$  con

$$F'(x) = f(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x^3}\right) - \frac{3}{x^3} \cos\left(\frac{1}{x^3}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

La función  $f$  admite una primitiva en  $[-1, 1]$ , a saber,  $F$ , pero  $f$  no es integrable Riemann en  $[-1, 1]$  por no estar acotada.



**Proposición 6.27.** Sea  $I$  un intervalo no trivial y  $h: I \rightarrow \mathbb{R}$  una función que admite dos primitivas  $H_1, H_2: I \rightarrow \mathbb{R}$ . Entonces existe una constante  $C \in \mathbb{R}$  tal que

$$H_1(x) - H_2(x) = C \quad \text{para todo } x \in I.$$

**Demostración**

Consideremos la función  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\varphi(x) = H_1(x) - H_2(x).$$

Como  $H_1$  y  $H_2$  son derivables en  $I^\circ$  y  $H'_1(x) = H'_2(x) = h(x)$  para todo  $x \in I^\circ$ , se tiene

$$\varphi'(x) = H'_1(x) - H'_2(x) = 0 \quad \text{para todo } x \in I^\circ.$$

Por el teorema del valor medio,  $\varphi$  es constante en  $I$ . Tomando, por ejemplo,  $x_0 \in I$  y escribiendo  $C = \varphi(x_0)$ , obtenemos

$$H_1(x) - H_2(x) = \varphi(x) = C \quad \forall x \in I,$$

que es lo que queríamos. ■

**Ejercicio:** Razóna si es verdadera o falsa la siguiente afirmación: *toda primitiva de una función continua  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  puede escribirse como una función de área de  $f$ .*

**Notación:** La integral indefinida.

Sea  $I$  un intervalo no trivial y  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Definimos la integral indefinida de  $f$  como el conjunto de todas sus primitivas en  $I$ .

$$\int f(x)dx = \{F: I \rightarrow \mathbb{R} : F \text{ es una primitiva de } f\}.$$

Si  $F$  es una primitiva cualquiera de  $f$ , en vista del resultado anterior se prefiere la notación

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

**Teorema 6.28** (Regla de Barrow). Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrable y supongamos que  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una primitiva de  $f$  en  $[a, b]$ . Entonces

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

**Demostración**

Sea  $P_m = \{a = x_0 < x_1^{(m)} < \dots < x_{n_m-1}^{(m)} < x_{n_m} = b\}$  una sucesión de particiones de  $[a, b]$  con  $\Delta P_m \rightarrow 0$ . Aplicando el teorema del valor medio a  $F$  en cada intervalo  $[x_{k-1}^{(m)}, x_k^{(m)}]$  obtenemos una sucesión de puntos  $t_k^{(m)} \in (x_{k-1}^{(m)}, x_k^{(m)})$  tal que

$$F(x_k^{(m)}) - F(x_{k-1}^{(m)}) = F'(t_k^{(m)})(x_k^{(m)} - x_{k-1}^{(m)}) = f(t_k^{(m)})(x_k^{(m)} - x_{k-1}^{(m)}).$$

Sumando estas igualdades para  $k = 1, \dots, n_m$  llegamos a

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n_m} (F(x_k^{(m)}) - F(x_{k-1}^{(m)})) = \sum_{k=1}^{n_m} f(t_k^{(m)})(x_k^{(m)} - x_{k-1}^{(m)}) = \sigma(f, P_m),$$

donde  $\sigma(f, P_m)$  es una suma de Riemann de  $f$  asociada a la partición  $P$ . Por el teorema de convergencia de las sumas integrales, sabemos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sigma(f, P_m) = \int_a^b f(t) dt.$$

Pasando al límite en la igualdad  $F(b) - F(a) = \sigma(f, P_m)$  obtenemos

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt,$$

que es la fórmula deseada. ■

**Corolario 6.29** (Fórmula de cambio de variable). Sean  $f \in C[a, b]$  y  $\varphi \in C^1(J)$ , donde  $J$  es un intervalo no trivial verificando que  $\varphi(J) \subset I$  y que existen  $\alpha, \beta \in J$  tales que  $a = \varphi(\alpha)$  y  $b = \varphi(\beta)$ . Entonces

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

### Demostración

Sea  $F$  una primitiva de  $f$  en  $I$ , que existe por el teorema fundamental del cálculo. Por la regla de la cadena, la composición  $F \circ \varphi$  es una primitiva de la función  $(f \circ \varphi)\varphi'$  en  $J$ , que es continua en dicho intervalo. Aplicando dos veces la regla de Barrow obtenemos

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = (F \circ \varphi)(\beta) - (F \circ \varphi)(\alpha) = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$
■

Obsérvese que la notación de la fórmula recuerda de forma muy cómoda el procedimiento de cambio de variable: pensamos que la igualdad anterior se obtiene al sustituir la variable de integración  $x$  por una nueva variable  $t$ , ligada por la igualdad  $x = \varphi(t)$ . En la práctica se suele decir que hemos hecho la sustitución  $x = \varphi(t)$ . Además de reemplazar  $f(x)$  por  $f(\varphi(t))$ , también resulta natural sustituir  $dx$  por  $\varphi'(t) dt$ . Finalmente, el cambio en el intervalo de integración se refleja en los extremos: basta tener en cuenta que  $x = a$  equivale a  $t = \alpha$  y  $x = b$  equivale a  $t = \beta$ .

**Corolario 6.30** (Fórmula de integración por partes). Sean  $u, v \in C^1[a, b]$ . Entonces

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v(x) u'(x) dx.$$

**Demostración**

La función producto  $uv$  es una primitiva de  $u'v + vu'$  en  $[a, b]$ . Aplicando la regla de Barrow a  $u'v + vu'$  en el intervalo  $[a, b]$  obtenemos

$$\int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x)) dx = [u(x)v(x)]_a^b.$$

Usando la linealidad de la integral en el miembro izquierdo se llega a

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx + \int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b,$$

y despejando  $\int_a^b u(x)v'(x) dx$  obtenemos la igualdad buscada. ■

## 6.4 Logaritmos y exponentiales

Usando los resultados principales del Cálculo Diferencial e Integral podemos introducir con comodidad nuevas funciones reales de variable real, que, junto con las funciones racionales, forman la colección de funciones *elementales*. Nos centraremos aquí en dos familias: las relacionadas con potencias de base y exponente reales y las funciones trigonométricas.

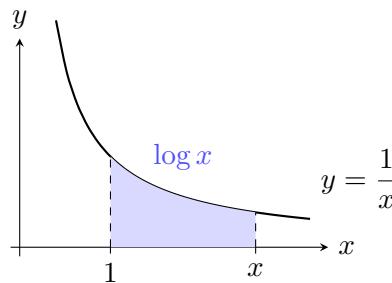
Siguiendo un orden que quizás no sea el más intuitivo, pero sí el más práctico, empezaremos por la función logaritmo, cuya definición es especialmente sencilla en términos de integrales. El Teorema Fundamental del Cálculo nos dará enseguida su derivada y, a partir de ella, podremos obtener sus propiedades básicas por medio del teorema del valor medio.

La función  $t \mapsto 1/t$  es continua en  $\mathbb{R}^+$ , luego admite una función de área con origen en 1. Esa integral es la que nos interesa ahora.

**Definición 6.31.** Para cada  $x \in \mathbb{R}^+$  definimos

$$\log x = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

Al número  $\log x$  lo llamamos *logaritmo de x* y a la aplicación  $\log: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , que a cada  $x > 0$  hace corresponder  $\log x$ , la llamamos *función logaritmo*.



**Proposición 6.32.** El logaritmo es la única función  $f \in D(\mathbb{R}^+)$  que verifica

$$f(1) = 0 \quad \text{y} \quad f'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^+.$$

En particular,  $\log$  es estrictamente creciente en  $\mathbb{R}^+$ .

**Demostración**

Por el Teorema Fundamental del Cálculo tenemos  $\log'(x) = 1/x$  para todo  $x \in \mathbb{R}^+$  y  $\log 1 = 0$ . Además, si  $f$  es otra función verificando las mismas condiciones, entonces la función  $g = f - \log$  tiene derivada nula en  $\mathbb{R}^+$ , luego es constante. Como  $g(1) = 0$ , obtenemos  $g \equiv 0$  y  $f = \log$ .

El crecimiento estricto de  $\log$  se deduce del teorema del valor medio, pues  $\log'(x) > 0$  para todo  $x > 0$ . ■

La siguiente propiedad es la más característica del logaritmo.

**Proposición 6.33.** Para todos  $x, y \in \mathbb{R}^+$  se verifica

$$\log(xy) = \log x + \log y.$$

Como consecuencias inmediatas se tiene:

- (1)  $\log(x/y) = \log x - \log y$  para todos  $x, y \in \mathbb{R}^+$ .
- (2)  $\log(x^n) = n \log x$  para todo  $x \in \mathbb{R}^+$  y todo  $n \in \mathbb{N}$ .
- (3)  $\log e = 1$ , donde  $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ .

**Demostración**

Usaremos la aditividad de la integral y la fórmula de cambio de variable. Para  $x, y \in \mathbb{R}^+$  tenemos

$$\log(xy) = \int_1^{xy} \frac{dt}{t} = \int_1^x \frac{dt}{t} + \int_x^{xy} \frac{dt}{t}.$$

En la segunda integral hacemos el cambio  $t = xs$ ,  $dt = x ds$ :

$$\int_x^{xy} \frac{dt}{t} = \int_1^y \frac{x ds}{xs} = \int_1^y \frac{ds}{s} = \log y.$$

Por tanto  $\log(xy) = \log x + \log y$ , como queríamos.

Para (1) basta escribir  $\log x = \log((x/y)y) = \log(x/y) + \log y$  y despejar.

La igualdad (2) se demuestra por inducción en  $n \in \mathbb{N}$ : el caso  $n = 1$  es trivial y, si vale para cierto  $n$ , entonces

$$\log(x^{n+1}) = \log(x^n x) = \log(x^n) + \log x = n \log x + \log x = (n+1) \log x.$$

Para (3), usamos la continuidad del logaritmo en el punto  $e$  y su derivabilidad en 1 para escribir

$$\log e = \lim_{n \rightarrow \infty} n \log \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + \frac{1}{n}) - \log 1}{(1 + \frac{1}{n}) - 1} = \log'(1) = 1.$$
■

**Proposición 6.34.** La función logaritmo diverge positivamente en  $+\infty$  y negativamente en 0. En consecuencia, su imagen es todo  $\mathbb{R}$  y  $\log: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  es biyectiva.

**Demostración**

Dado  $m \in \mathbb{N}$ , para  $x > e^m$  se tiene

$$\log x > \log(e^m) = m \log e = m,$$

luego  $\log x \rightarrow +\infty$  cuando  $x \rightarrow +\infty$ . En el origen,

$$\log x = -\log(1/x) \rightarrow -\infty \quad (x \rightarrow 0^+).$$

Por tanto, la imagen de  $\log$  es un intervalo sin cota superior ni inferior, y necesariamente coincide con  $\mathbb{R}$ . ■

**Definición 6.35.** La inversa del logaritmo es la *función exponencial*, que denotaremos por

$$\exp = \log^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+.$$

Para cada  $x \in \mathbb{R}$  escribimos  $\exp x$  para el único  $y > 0$  tal que  $\log y = x$ . Equivalentemente,

$$\exp(\log y) = y \quad \forall y \in \mathbb{R}^+, \quad \log(\exp x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

En particular,  $\exp 0 = 1$  y  $\exp 1 = e$ .

**Proposición 6.36.** La función exponencial es derivable en  $\mathbb{R}$  y coincide con su derivada:

$$\exp'(x) = \exp x > 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

En particular,  $\exp$  es estrictamente creciente.

**Demostración**

Como  $\log'(x) \neq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^+$ , el teorema de la función inversa nos dice que la inversa del log es derivable en  $\mathbb{R}$  y además

$$\exp'(x) = \frac{1}{\log'(\exp x)} = \frac{1}{1/\exp x} = \exp x > 0$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ . ■

La propiedad fundamental de la exponencial es la siguiente.

**Proposición 6.37.** Para todos  $x, y \in \mathbb{R}$  se verifica

$$\exp(x + y) = \exp x \exp y.$$

Como consecuencias obtenemos:

$$(1) \quad \exp(x - y) = \exp x / \exp y \text{ para todos } x, y \in \mathbb{R}.$$

$$(2) \quad \exp(nx) = (\exp x)^n \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \text{ y todo } n \in \mathbb{N}.$$

**Demostración**

Fijamos  $y \in \mathbb{R}$  y consideramos la función

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{\exp(x+y)}{\exp x}.$$

Está claro que  $h \in D(\mathbb{R})$  y se comprueba inmediatamente que  $h'(x) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Por tanto  $h$  es constante y  $h(x) = h(0) = \exp y$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , lo que equivale a  $\exp(x+y) = \exp x \exp y$ .

Las consecuencias se obtienen a partir de la fórmula de adición de manera inmediata. ■

**Proposición 6.38.** Se verifica

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp x = +\infty.$$

**Demostración**

Estas propiedades pueden obtenerse directamente a partir del comportamiento asintótico del logaritmo, ya que la función exponencial es su inversa. Alternativamente, pueden demostrarse directamente de la siguiente manera:

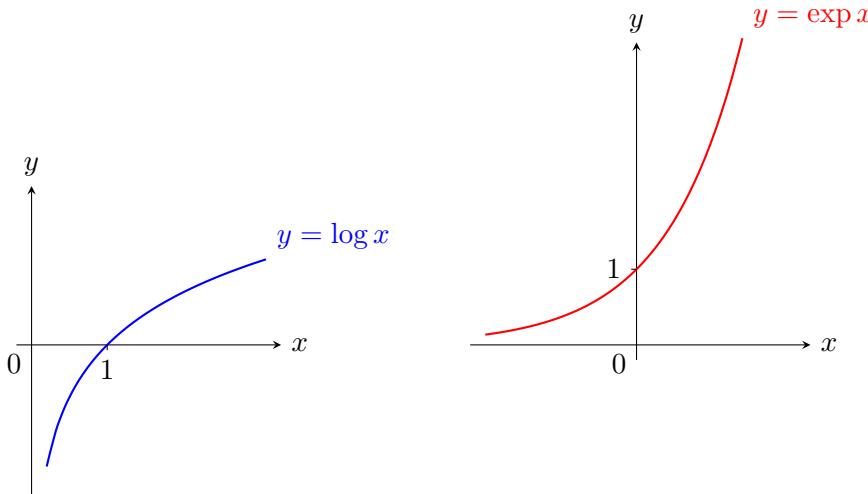
Como  $\{e^n\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow +\infty$ , dado  $K \in \mathbb{R}$  podemos encontrar  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $e^m > K$ . Para  $x > m$  se tiene

$$\exp x > \exp m = (\exp 1)^m = e^m > K,$$

luego  $\exp x \rightarrow +\infty$  cuando  $x \rightarrow +\infty$ . Por otra parte,

$$0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\exp x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(-x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp x,$$

lo que da el límite en  $-\infty$ . ■



Las propiedades anteriores permiten extender la definición de las potencias a exponentes reales. Empezamos con una observación sencilla: si  $m \in \mathbb{N}$ , entonces

$$\log x = \log((\sqrt[m]{x})^m) = m \log \sqrt[m]{x} \implies \log \sqrt[m]{x} = \frac{1}{m} \log x.$$

Por tanto, dados  $a \in \mathbb{R}^+$  y  $q \in \mathbb{Q}$ , sabemos ya que

$$a^q = \exp(\log(a^q)) = \exp(q \log a).$$

En el segundo miembro nada impide sustituir  $q$  por un número real cualquiera y escribir:

**Definición 6.39.** Para  $a \in \mathbb{R}^+$  y  $b \in \mathbb{R}$  definimos

$$a^b = \exp(b \log a).$$

Según tomemos  $a$  o  $b$  como variable, obtendremos dos familias de funciones.

**Definición 6.40.** Fijado  $a \in \mathbb{R}^+$ , la *exponencial de base a* es la función

$$\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad \exp_a x = a^x = \exp(x \log a).$$

Observamos que  $\exp_1 x = 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , por lo que el caso  $a = 1$  carece de interés. También se cumple

$$\exp_e x = e^x = \exp x \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R},$$

de modo que la exponencial de base  $e$  es la función exponencial *por antonomasia*; todas las demás se obtienen a partir de ella.

**Definición 6.41.** Fijado  $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ , la inversa de la exponencial de base  $a$  es el *logaritmo en base a*, que denotamos por  $\log_a$ . Tenemos

$$a^{\log_a y} = y \quad \forall y \in \mathbb{R}^+, \quad \log_a(a^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Para todo  $x > 0$  vemos inmediatamente que

$$x = a^{\log_a x} = e^{\log a \log_a x} \implies \log x = \log a \log_a x.$$

Esta es la conocida como fórmula de cambio de base de los logaritmos:

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^+.$$

La fórmula anterior permite deducir todas las propiedades de la función  $\log_a x$  a partir de las de la función  $\log$ , así que no nos detendremos a detallarlas. Merece la pena, no obstante, señalar la extensión de la fórmula de adición para el  $\log_a$ :

**Proposición 6.42.** Para todo  $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ , todo  $x > 0$  y todo  $y \in \mathbb{R}$  se tiene:

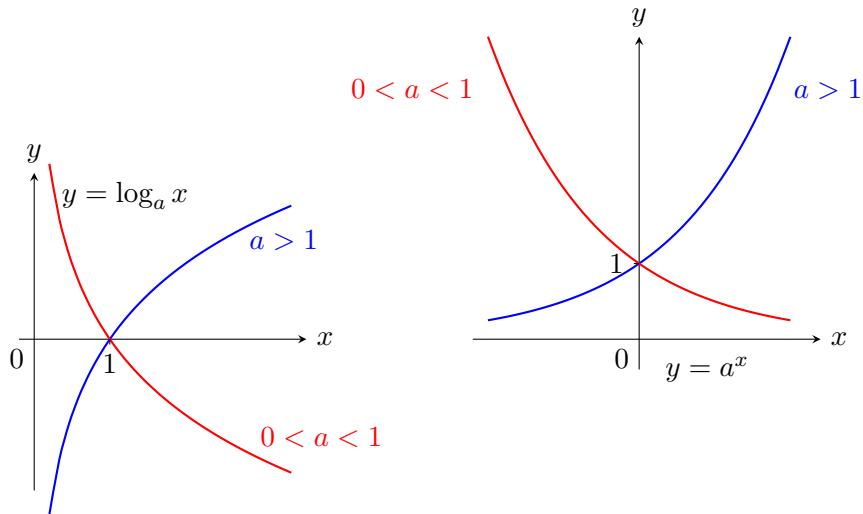
$$\log_a(x^y) = y \log_a x.$$

### Demostración

Es un cálculo directo:

$$\log_a(x^y) = \frac{\log(\exp(y \log x))}{\log a} = \frac{y \log x}{\log a} = y \log_a x.$$





Pasamos ahora a estudiar las funciones que se obtienen al considerar potencias con base variable y exponente constante. Fijado  $\alpha \in \mathbb{R}$ , llamamos *función potencia de exponente  $\alpha$*  a

$$x \mapsto x^\alpha,$$

entendida como una función definida en  $\mathbb{R}^+$ .

En algunos casos, esta función no es nueva y puede ser definida en un subconjunto de  $\mathbb{R}$  más grande que  $\mathbb{R}^+$ . Estos casos son:

- Si  $\alpha = n \in \mathbb{N}$ , se trata de la restricción a  $\mathbb{R}^+$  de una función polinómica conocida; para  $\alpha = 0$  es una función constante.
- Si  $\alpha = -n$  con  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $x^{-n} = 1/x^n$  para todo  $x \in \mathbb{R}^+$  y obtenemos una función racional conocida. En realidad  $x^{-n} = 1/x^n$  tiene sentido también para  $x \in \mathbb{R}^*$  y podemos verla como función definida en  $\mathbb{R}^*$ .
- Si  $\alpha = 1/q$  con  $q \in \mathbb{N}$ , la identidad

$$x^{1/q} = \sqrt[q]{x} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^+$$

nos dice que la potencia de exponente  $1/q$  coincide con la función raíz  $q$ -ésima (definida previamente y continua en  $\mathbb{R}_0^+$ , e incluso en todo  $\mathbb{R}$  cuando  $q$  es impar).

- Si  $\alpha = p/q$  con  $p \in \mathbb{Z}$  y  $q \in \mathbb{N}$ , de las propiedades anteriores se deduce que

$$x^{p/q} = (\sqrt[q]{x})^p \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^+,$$

luego la potencia de exponente racional  $p/q$  se obtiene como composición de funciones conocidas.

El caso realmente nuevo aparece cuando  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Las propiedades básicas de esta función se deducen de las de la exponencial y el logaritmo y no merece la pena detenernos.

**Definición 6.43.** Fijado  $\alpha \in \mathbb{R}$ , la potencia de exponente  $\alpha$  es la función  $f_\alpha : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  dada por

$$f_\alpha(x) = \exp(\alpha \log x) = x^\alpha \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^+.$$

Cuando  $\alpha \in \mathbb{Q}$ , esta función es la restricción a  $\mathbb{R}^+$  de funciones polinómicas, racionales y radicales ya conocidas.

Estas nuevas potencias que acabamos de construir se derivan igual que las que ya conocíamos.

**Proposición 6.44.** Dado  $\alpha \in \mathbb{R}$ , la potencia  $x \mapsto x^\alpha$  es derivable en  $\mathbb{R}^+$  con  $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ .

### Demostración

La derivabilidad de la potencia es consecuencia de la regla de la cadena, ya que  $\exp$  y  $\log$  son funciones derivables. Además

$$(x^\alpha)' = \exp'(\alpha \log x) \log' x \alpha = \alpha x^\alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

■

Concluimos esta parte de propiedades del logaritmo y la exponencial probando su analiticidad. Empezamos por la exponencial.

**Proposición 6.45.** La función  $\exp$  es analítica en  $\mathbb{R}$  y

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^a}{n!} (x-a)^n \quad \forall x, a \in \mathbb{R}.$$

### Demostración

Sabemos que  $\exp \in D(\mathbb{R})$  y  $\exp' = \exp$ , luego  $\exp \in C^\infty(\mathbb{R})$ . Además, dado cualquier  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\exp^{(n)}(a) = e^a$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , luego

$$T_n[\exp, a](x) = \sum_{k=0}^n \frac{e^a}{n!} (x-a)^n.$$

Por la fórmula de Taylor, para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe un  $c_n$  entre  $x$  y  $a$  tal que

$$e^x - \sum_{k=0}^n \frac{e^a}{n!} (x-a)^n = \frac{e^{c_n} (x-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Usando que  $\exp$  es una función creciente, la fórmula de adición y el hecho que  $c_n \leq |a| + |x|$ , se tiene

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{e^a}{n!} (x-a)^n \right| \leq \frac{e^{|a|} e^{|x|} (x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty),$$

luego la serie de Taylor es convergente y converge a  $e^x$  para todo  $x, a \in \mathbb{R}$ . ■

**Proposición 6.46.** La función  $\log$  es analítica en  $\mathbb{R}^+$ . Además, dado  $a \in \mathbb{R}^+$ , para todo  $x \in (0, 2a)$  se verifica

$$\log x = \log a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n a^n} (x-a)^n.$$

### Demostración

Sabemos que  $\log \in D(\mathbb{R}^+)$  con  $\log'(x) = \frac{1}{x}$ . Como  $\log'(x)$  es una función racional cuyo denominador nunca se anula en  $\mathbb{R}^+$ , es  $C^\infty(\mathbb{R}^+)$ , y por tanto también lo es el logaritmo.

Para empezar, tenemos que calcular las infinitas derivadas de  $\log$  en un punto  $a \in \mathbb{R}^+$ . Para simplificar la tarea, consideramos en su lugar la función  $\log(1+x)$  y calcularemos sus polinomios de Taylor en  $a = 0$ , para luego usar las propiedades del logaritmo.

Sea pues la función  $f : (-1, +\infty)$  dada por  $f(x) = \log(1+x)$ , y sea  $\varphi(t) = f'(t) = \frac{1}{1+t}$ , definida para  $t \in (-1, +\infty)$ . Dado  $n \in \mathbb{N}$ , de la fórmula de las sumas parciales de la serie geométrica se obtiene, para todo  $t > -1$ ,

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k = \frac{1 - (-t)^n}{1 + t},$$

y por tanto

$$\frac{1}{1+t} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k}_{T_{n-1}[\varphi, 0](t)} + \frac{(-1)^n t^n}{1+t}. \quad (6.3)$$

Hemos obtenido así los polinomios de Taylor de orden  $n-1$  de  $\varphi$  en  $a = 0$ , ya que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^{n-1}} \left( \frac{1}{1+t} - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(-1)^n t}{1+t} = 0,$$

y  $T_{n-1}[\varphi, 0](x)$  es el único polinomio que cumple dicha condición, según el teorema del resto de Taylor. Ahora, integramos la identidad (6.3), usando linealidad de la integral y la regla de Barrow:

$$\begin{aligned} \log(1+x) &= \int_0^x \frac{dt}{1+t} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^x t^k dt + \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t} dt \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t} dt. \end{aligned}$$

Luego

$$\log(1+x) - \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t} dt.$$

Lo que hemos hecho en el paso anterior es escribir el resto de Taylor  $R_n[\log(1+x), 0](x)$  en forma integral, o como resto de Cauchy. La serie

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$$

converge si y solo si  $|x| \leq 1$ , así que debemos restringirnos a  $x \in (-1, 1]$ . Vamos a ver que, si  $x \in (-1, 1]$ , dicho resto tiende a 0 cuando  $n \rightarrow \infty$ .

**Caso  $0 \leq x \leq 1$**  Para  $t \in [0, x]$  se tiene  $1+t \geq 1$ , así que

$$\left| \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t} dt \right| \leq \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt \leq \int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

**Caso  $-1 < x < 0$**  Para  $t \in [x, 0]$  se cumple  $|t| \leq |x| < 1$  y  $1+t \geq 1+x > 0$ , de modo que

$$\left| \frac{t^n}{1+t} \right| \leq \frac{|x|^n}{1+x}.$$

Entonces,

$$\left| \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t} dt \right| \leq \int_x^0 \frac{|t|^n}{1+t} dt \leq \frac{|x|^n}{1+x} \int_x^0 dt = \frac{|x|^{n+1}}{1+x} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Concluimos que, para todo  $x \in (-1, 1]$ ,

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}.$$

Para obtener el desarrollo alrededor de un  $a \in \mathbb{R}^+$  cualquiera, escribimos

$$x = a(1+u), \quad u = \frac{x-a}{a}.$$

Si  $x \in (0, 2a]$  entonces  $u \in (-1, 1]$  y, aplicando la fórmula anterior a  $u$ , tenemos

$$\begin{aligned} \log x &= \log a + \log(1+u) \\ &= \log a + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{u^n}{n} = \log a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n a^n} (x-a)^n, \end{aligned}$$

que es la identidad buscada. ■

Como consecuencia inmediata, tomando  $a = 1$  y  $x = 2$  obtenemos la suma de la serie armónica alternada.

$$\log 2 = \log(1+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Tanto la exponencial como el logaritmo como las potencias de exponente positivo son funciones que divergen a  $+\infty$  en  $+\infty$ , por lo que cabe preguntarse qué ocurre con la indeterminación del tipo  $[\infty/\infty]$  que producen sus cocientes. El caso de dos potencias es sencillo, pues  $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$ . El siguiente resultado da respuesta al resto de casos.

**Proposición 6.47** (Escala de infinitos). Sea  $\rho \in \mathbb{R}^+$ . Entonces se verifican los límites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x^\rho} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\rho}{e^x} = 0.$$

### Demostración

*Esta demostración no se vio en clase.*

Las funciones involucradas en los límites anteriores son  $C^\infty$  en sus respectivos dominios

de definición, lo que nos permite considerar los cocientes de las derivadas tantas veces como sea necesario.

Si derivamos el numerador y el denominador del primer límite, tenemos:

$$\frac{\log' x}{(x^\rho)'} = \frac{1}{\rho x^\rho} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow +\infty).$$

En el segundo límite volvemos a encontrar una indeterminación del tipo  $[\infty/\infty]$  hasta que derivamos  $\lfloor \rho \rfloor + 1$  veces.

$$\frac{(x^\rho)^{(\lfloor \rho \rfloor)}}{\exp^{(\lfloor \rho \rfloor)}(x)} = \frac{\prod_{k=0}^{\lfloor \rho \rfloor} (\rho - k)}{x^{\lfloor \rho \rfloor + 1 - \rho} e^x} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow +\infty).$$

El resultado que queríamos se sigue de la regla de L'Hôpital. ■

El resultado anterior se conoce como *escala de infinitos*: entre las funciones que divergen positivamente en  $+\infty$ , cualquier potencia  $x^\rho$  con  $\rho > 0$  domina al logaritmo, y la exponencial  $e^x$  domina a todas las potencias.

### Ejemplo

**Problema.** Calcular los límites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x} \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x.$$

**Resolución.** Para el primero, escribimos

$$x^{1/x} = \exp\left(\frac{\log x}{x}\right).$$

El exponente tiende a 0 por la escala de infinitos (caso  $\rho = 1$ ), luego

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x} = \exp(0) = 1.$$

Para el segundo, usamos

$$x^x = \exp(x \log x).$$

Observamos que

$$x \log x = \frac{\log x}{1/x}.$$

Cuando  $x \rightarrow 0^+$ , se tiene  $1/x \rightarrow +\infty$ , así que, poniendo  $t = 1/x$ ,

$$x \log x = -\frac{\log t}{t}.$$

De nuevo, por la escala de infinitos (caso  $\rho = 1$ ),  $\log t/t \rightarrow 0$ , luego  $x \log x \rightarrow 0$  y por tanto

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \exp(0) = 1.$$

El criterio anterior nos permite resolver indeterminaciones del tipo  $[0 \cdot \infty]$ ,  $[0/0]$  y  $[\infty/\infty]$  que involucran a las funciones que acabamos de introducir. Damos a continuación uno muy útil para afrontar las del tipo  $[1^\infty]$ .

**Proposición 6.48** (Criterio de equivalencia logarítmica). Sea  $\{x_n\}$  una sucesión de números reales positivos tal que  $x_n \rightarrow 1$  y sea  $\{y_n\}$  cualquier sucesión de números reales. Entonces:

(i) Para  $L \in \mathbb{R}$  se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x_n - 1) = L \iff \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{y_n} = e^L.$$

(ii)  $\{y_n(x_n - 1)\} \rightarrow +\infty \iff \{x_n^{y_n}\} \rightarrow +\infty$ .

(iii)  $\{y_n(x_n - 1)\} \rightarrow -\infty \iff \{x_n^{y_n}\} \rightarrow 0$ .

### Demostración

Recordamos primero que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x - 1} = \log'(1) = 1.$$

Definimos la función  $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  mediante

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{\log x}{x - 1}, & x \neq 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Por el límite anterior,  $\varphi$  es continua en 1, luego  $\varphi \in C(\mathbb{R}^+)$  y, en particular,  $\varphi(x_n) \rightarrow 1$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Además,  $\varphi(x) \neq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^+$ .

Para cada  $n \in \mathbb{N}$  tenemos la igualdad

$$y_n \log x_n = y_n(x_n - 1) \varphi(x_n),$$

que es obvia si  $x_n \neq 1$ , y también si  $x_n = 1$  pues entonces ambos lados son 0. De aquí se deduce que las sucesiones  $\{y_n \log x_n\}$  y  $\{y_n(x_n - 1)\}$  tienen el mismo comportamiento cuando  $n \rightarrow +\infty$ , ya que  $\varphi(x_n) \rightarrow 1$  y  $\varphi(x_n) \neq 0$ . ■

### Ejemplo

**Problema.** Calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

**Resolución.** Por la definición de derivada,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \sin' 0 = 1.$$

Por tanto, tenemos una indeterminación del tipo  $[1^\infty]$ . Teniendo en cuenta el criterio de equivalencia logarítmica, consideramos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left( \frac{\sin x}{x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}.$$

Por el teorema de Taylor,  $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + R_3[\sin, 0](x)$ . Por tanto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + R_3[\sin, 0](x)}{x^3} = -\frac{1}{6}.$$

Finalmente,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-1/6}.$$

### Ejercicios:

(1) Probar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1.$$

(2) Sea  $f \in D(\mathbb{R})$  tal que  $f'(x) = \alpha f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , donde  $\alpha \in \mathbb{R}$  es una constante. Probar que

$$f(x) = f(0) e^{\alpha x} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

(3) Probar que  $x^e \leq e^x$  para todo  $x \in \mathbb{R}^+$ . Probar también que la anterior desigualdad caracteriza al número  $e$ , es decir, si  $a \in \mathbb{R}^+$  verifica que  $x^a \leq a^x$  para todo  $x \in \mathbb{R}^+$ , entonces  $a = e$ .

(4) Estudiar el comportamiento en  $+\infty$  de las funciones  $\varphi, \psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  definidas como sigue, donde  $a \in \mathbb{R}^+$  es una constante:

$$\varphi(x) = \frac{\log(2 + ae^x)}{\sqrt{2 + ax^2}}, \quad \psi(x) = (a^x + x)^{1/x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

(5) Dados  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ , estudiar la convergencia de la serie de Bertrand

$$\sum_{n \geq 3} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}.$$

(6) Dado  $\alpha \in \mathbb{R}$ , estudiar la convergencia de las siguientes series:

$$\sum_{n \geq 1} (\log(1 + 1/n))^\alpha, \quad \sum_{n \geq 1} (1 - e^{-1/n})^\alpha.$$

(7) Dado  $\alpha \in \mathbb{R}$ , estudiar la derivabilidad de la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^-, \quad f(x) = x^\alpha \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

(8) Se considera la función  $f : \mathbb{R}^+ \setminus \{e\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = x^{1/(\log x - 1)} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{e\}.$$

Estudiar el comportamiento de  $f$  en  $0, e, +\infty$ .

(9) Estudiar la convergencia de la sucesión

$$\left\{ \left( \frac{\alpha a^{1/n} + \beta b^{1/n}}{\alpha + \beta} \right)^n \right\},$$

donde  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha + \beta \neq 0$  y  $a, b \in \mathbb{R}^+$ .

(10) Estudiar la derivabilidad de la función  $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = x^x \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f(0) = 1.$$

**El siguiente ejercicio es extremadamente difícil y se propone como un reto para los lectores más valientes:**

(\*) Sea  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  una función derivable en 1 y que verifica

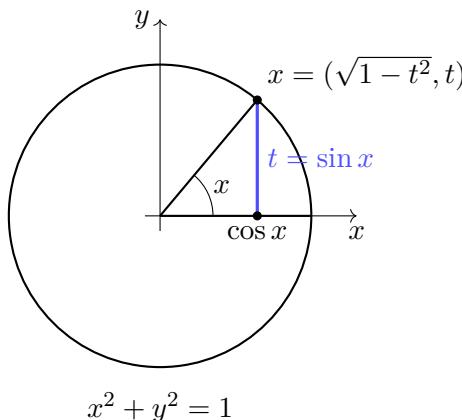
$$f(f(x)) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Probar que  $f$  es la potencia de exponente  $\sqrt{2}$  o la de exponente  $-\sqrt{2}$ .

## 6.5 Funciones trigonométricas

Para definir de forma práctica y rigurosa las funciones trigonométricas, empezaremos por el arco-seno, que es una función que aparece de manera natural al parametrizar la circunferencia *goniométrica*, esto es, la circunferencia de radio 1 y centro  $(0, 0)$  de  $\mathbb{R}^2$ , cuya ecuación es

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$



Para cada  $t \in [0, 1]$ , marcamos el ángulo  $x(t)$  del primer cuadrante que tiene como ordenada  $t$ , esto es  $(\sqrt{1-t^2}, t)$ . Como el radio de la circunferencia es uno,  $x(t)$  coincide con la medida del ángulo  $x$  en radianes (véase la figura).

Aunque los conceptos de curva y parametrización no se introducirán hasta la asignatura de Cálculo II, podemos convencernos, al menos geométricamente, de que el arco de circunferencia que va desde  $(0, 1)$  hasta  $(\sqrt{1-t^2}, t)$  puede recorrerse usando la función

$$\begin{aligned} \gamma &: [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \gamma(s) &= (\sqrt{1-s^2}, s) \end{aligned}$$

El módulo del vector velocidad de dicha parametrización viene dado por

$$\|\gamma'(s)\| = \sqrt{\left(\frac{-s}{\sqrt{1-s^2}}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{1}{1-s^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}.$$

Por tanto, la distancia recorrida hasta  $s = t$ , que es la longitud del arco considerado, vendrá dada por

$$x(t) = \int_0^t \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}}.$$

Esta función de área será la pieza fundamental que nos ayudará a construir todas las funciones trigonométricas. Así pues, olvidándonos momentáneamente de la motivación geométrica, hacemos la siguiente definición.

**Definición 6.49.** Para cada  $x \in (-1, 1)$ , definimos

$$\arcsin(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Haciendo el cambio de variable  $t = -s$  vemos sin dificultad que el arco-seno es una función *impar*. Además, por el teorema fundamental del cálculo,  $\tau$  es derivable en  $(-1, 1)$  con  $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ , por lo que es estrictamente creciente. Comenzamos viendo que  $\arcsin$  puede extenderse de forma continua a los puntos  $-1, 1$ .

**Definición 6.50.** El número  $\pi$  viene dado por

$$\pi = 4 \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = 4 \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

**Proposición 6.51.** Definiendo  $\arcsin(1) = \pi/2$  y  $\arcsin(-1) = -\pi/2$ , el arco-seno es una función continua en  $[-1, 1]$ .

### Demostración

Como  $\arcsin$  es impar, basta con probar la primera identidad. Para esto, probemos que, para todo  $x \in [0, 1)$ ,

$$\arcsin(x) + \arcsin(\sqrt{1-x^2}) = \frac{\pi}{2}. \quad (6.4)$$

Usando una estrategia de sobra conocida, llamamos  $f(x) = \arcsin(x) + \arcsin(\sqrt{1-x^2})$  para  $x \in [0, 1)$ . Sabemos que  $f \in D[0, 1)$  con

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}} \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

Por el teorema del valor medio,  $f$  es constante, luego

$$f(x) = f(\sqrt{2}/2) = 2 \arcsin(\sqrt{2}/2) = \frac{\pi}{2} \quad \text{para todo } x \in [0, 1).$$

Tomando límite cuando  $x \rightarrow 1$  en (6.4), tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 1} \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}.$$

■

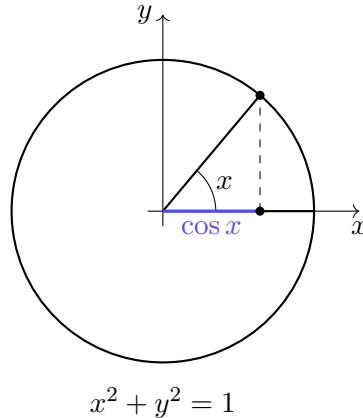
Para no introducir una nueva nomenclatura, seguimos llamando  $\arcsin$  a la función que ahora está definida y es continua en  $[-1, 1]$ . Por el teorema del valor medio  $\arcsin$  es estrictamente creciente en  $[-1, 1]$ , por lo tanto es inyectiva y su imagen no es otra que  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Por supuesto, el siguiente paso natural es considerar su inversa.

**Definición 6.52.** Para cada  $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , definimos la función

$$S(y) = \arcsin^{-1}(y),$$

es decir  $S(y)$  es el único valor en  $[-1, 1]$  tal que  $\arcsin(S(y)) = y$ .

**Proposición 6.53.** Definimos la función  $C : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$  como  $C(x) = \sqrt{1 - S(x)^2}$ . Se tiene que  $S, C \in D[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  con  $S'(x) = C(x)$  y  $C'(x) = -S(x)$ .



Nótese que hemos definido el coseno de los ángulos entre  $-\pi/2$  y  $\pi/2$  mediante el teorema de Pitágoras.

### Demostración

Como  $\arcsin$  es continua e inyectiva en un intervalo, la función  $S$  es continua en  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Además, es derivable en  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  con

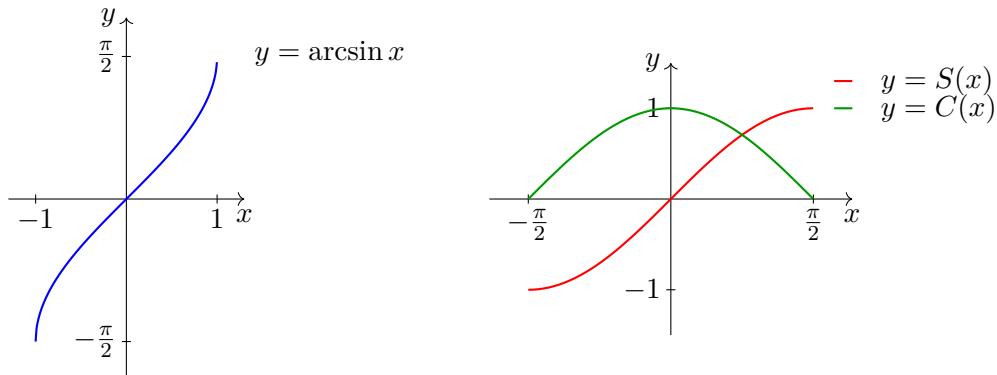
$$S'(x) = \frac{1}{\arcsin'(S(x))} = \sqrt{1 - S(x)^2} = C(x).$$

Por su parte, la función  $C(x)$  es continua en  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , lo que nos da la derivabilidad de  $S$  en los extremos, y

$$C'(x) = \frac{-S(x)C(x)}{\sqrt{1 - S(x)^2}} = -S(x),$$

así que también es derivable en todo  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , ya que su derivada tiene límite en dichos puntos. ■

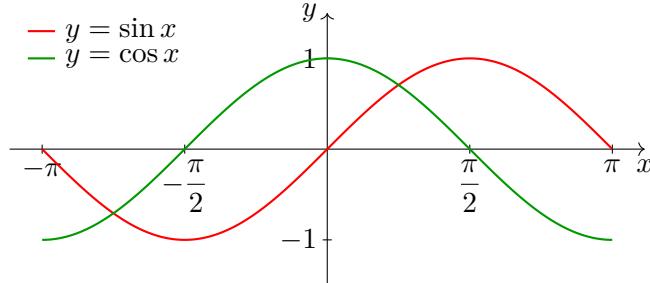
Las funciones  $S$  y  $C$  son lo que todos estamos pensando: las restricciones del seno y el coseno al intervalo  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .



Ahora, pretendemos extender las funciones  $S$  y  $C$  a todo  $\mathbb{R}$ . Para esto, nos preocupamos primero de cómo extenderlas al intervalo  $[-\pi, \pi]$ , y luego las repetiremos en cada intervalo de longitud  $2\pi$ .

**Definición 6.54.** Se definen las extensiones de  $S$  y  $C$  al intervalo  $[-\pi, \pi]$  como

$$\begin{aligned} S(x) &= C\left(x - \frac{\pi}{2}\right) & \text{si } x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], & S(x) = -C\left(x + \frac{\pi}{2}\right) & \text{si } x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}], \\ C(x) &= -S\left(x - \frac{\pi}{2}\right) & \text{si } x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], & C(x) = S\left(x + \frac{\pi}{2}\right) & \text{si } x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}], \end{aligned}$$



**Proposición 6.55.** Con las definiciones anteriores, las funciones  $S, C : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  verifican las siguientes propiedades:

- (i)  $S, C \in D[-\pi, \pi]$  con  $S'(x) = C(x)$  y  $C'(x) = -S(x)$  para todo  $x \in [-\pi, \pi]$ ,
- (ii)  $S(x)^2 + C(x)^2 = 1$  para todo  $x \in [-\pi, \pi]$ ,
- (iii)  $S$  es impar y  $C$  es par.

### Demostración

La demostración de estas propiedades se sigue de cálculos elementales.

**(i)** Lo demostramos para  $S$ , ya que para  $C$  es análogo. Por el carácter local de la derivabilidad,  $S$  es derivable en todos los puntos de  $[-\pi, \pi]$  excepto quizás  $-\frac{\pi}{2}$  y  $\frac{\pi}{2}$ . Estudiamos las derivadas laterales en dichos puntos:

$$\begin{aligned} S'\left(-\frac{\pi}{2}^-\right) &= -C'(0) = S(0) = 0, & S'\left(-\frac{\pi}{2}^+\right) &= C\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0. \\ S'\left(\frac{\pi}{2}^-\right) &= C\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, & S'\left(\frac{\pi}{2}^+\right) &= C'(0) = -S(0) = 0. \end{aligned}$$

Como las derivadas laterales existen y coinciden, entonces  $S \in D[-\pi, \pi]$ .

**(ii)** Para  $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  se sigue de la definición de  $C(x)$ . Para  $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$  tenemos

$$S(x)^2 + C(x)^2 = C\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + S\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 = 1,$$

y análogamente para  $x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}]$ .

**(iii)** La función  $S(x)$  es impar en  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  por ser inversa de la función impar  $\arcsin$ . Para verlo, tomamos  $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , que podemos escribir como  $x = \arcsin y$  para algún  $y \in [-1, 1]$ . Entonces

$$S(-x) = S(-\arcsin y) = S(\arcsin(-y)) = -y = -S(x).$$

Por tanto,  $C$  es par en  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , ya que

$$C(-x) = \sqrt{1 - S(-x)^2} = \sqrt{1 - (-S(x))^2} = C(x).$$

Ahora, si  $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ , entonces

$$S(-x) = -C \underbrace{\left( -x + \frac{\pi}{2} \right)}_{\in [-\pi/2, 0]} = -C \left( x - \frac{\pi}{2} \right) = -S(x).$$

Derivando esta identidad tenemos la paridad de la función  $C$ :

$$S(-x) = -S(x) \Rightarrow -C(-x) = -C(x).$$

■

**Definición 6.56.** Se definen el *seno* y el *coseno* como las funciones  $\sin, \cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que extienden a  $S$  y  $C$  por periodicidad  $2\pi$ , esto es,

$$\sin x = S(x - 2k_x\pi), \quad \cos x = C(x - 2k_x\pi),$$

donde  $k_x \in \mathbb{Z}$  es el único entero tal que  $(2k_x - 1)\pi < x \leq (2k_x + 1)\pi$ .

**Proposición 6.57.** Las funciones  $\sin$  y  $\cos$  son derivables en  $\mathbb{R}$ . Consecuentemente, son de clase  $C^\infty(\mathbb{R})$ . Además, verifican las propiedades de la proposición 6.55 en todo  $\mathbb{R}$ .

### Demostración

Sea  $B = \{(2k + 1)\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ . Por construcción,  $\sin$  y  $\cos$  son derivables en  $\mathbb{R} \setminus B$  y además verifican las propiedades (ii) y (iii) listadas en la proposición 6.55 en todo  $\mathbb{R}$ . Demostraremos que  $\sin$  y  $\cos$  son derivables en  $-\pi$  y  $\pi$  con  $\sin' x = \cos x$  y  $\cos' x = -\sin' x$ , lo que nos dará la derivabilidad en todo  $\mathbb{R}$  junto a la propiedad (i) completa.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\pi^+} \sin'(x) &= \lim_{x \rightarrow -\pi^+} C(x) = \cos(-\pi) \\ \lim_{x \rightarrow -\pi^-} \sin'(x) &= \lim_{x \rightarrow -\pi^-} S'(x + 2\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} C(x) = C(\pi) = C(-\pi) = \cos(-\pi). \\ \lim_{x \rightarrow \pi^-} \sin'(x) &= \lim_{x \rightarrow \pi^-} C(x) = \cos(\pi). \\ \lim_{x \rightarrow \pi^+} \sin'(x) &= \lim_{x \rightarrow \pi^+} S'(x - 2\pi) = \lim_{x \rightarrow -\pi^+} C(x) = C(-\pi) = C(\pi) = \cos(\pi). \end{aligned}$$

De igual manera,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\pi^+} \cos'(x) &= \lim_{x \rightarrow -\pi^+} -S(x) = -\sin(-\pi) = \sin(\pi) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\pi^-} \cos'(x) &= \lim_{x \rightarrow -\pi^-} C'(x + 2\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} -S(x) = -S(\pi) = 0. \\ \lim_{x \rightarrow \pi^-} \cos'(x) &= \lim_{x \rightarrow \pi^-} -S(x) = -\sin(\pi) = 0. \\ \lim_{x \rightarrow \pi^+} \cos'(x) &= \lim_{x \rightarrow \pi^+} C'(x - 2\pi) = \lim_{x \rightarrow -\pi^+} -S(x) = -S(-\pi) = \sin(\pi) = 0. \end{aligned}$$

■

Probamos a continuación una propiedad fundamental de las funciones seno y coseno, que son las correspondientes fórmulas de adición. Como consecuencia, encontramos una forma muy práctica

de derivarlas.

**Proposición 6.58.** Para cualesquiera  $x, y \in \mathbb{R}$  se tiene:

$$\sen(x+y) = \sen x \cos y + \cos x \sen y, \quad \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sen x \sen y.$$

Como consecuencia inmediata se tiene

$$\sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x = \sin' x, \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sen x = \cos' x.$$

### Demostración

Fijado  $y \in \mathbb{R}$ , consideramos las funciones  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por

$$f(x) = \sen(x+y) - \sen x \cos y - \cos x \sen y, \quad g(x) = \cos(x+y) - \cos x \cos y + \sen x \sen y$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Queremos ver que  $f$  y  $g$  son idénticamente nulas.

Como  $f, g \in D(\mathbb{R})$ , calculamos sus derivadas:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(x+y) - \cos x \cos y + \sen x \sen y = g(x), \\ g'(x) &= -\sen(x+y) + \sen x \cos y + \cos x \sen y = -f(x) \end{aligned}$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Definimos ahora  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$h(x) = f(x)^2 + g(x)^2 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Entonces  $h \in D(\mathbb{R})$  y, usando las expresiones anteriores de  $f'$  y  $g'$ , tenemos

$$h'(x) = 2f(x)f'(x) + 2g(x)g'(x) = 2f(x)g(x) - 2g(x)f(x) = 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Luego  $h$  es constante en  $\mathbb{R}$ . Como

$$\begin{aligned} f(0) &= \sen y - \sen 0 \cos y - \cos 0 \sen y = \sen y - \sen y = 0, \\ g(0) &= \cos y - \cos 0 \cos y + \sen 0 \sen y = \cos y - \cos y = 0, \end{aligned}$$

obtenemos  $h(0) = 0$  y, por tanto,  $h(x) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

De  $f(x)^2 + g(x)^2 = 0$  se deduce necesariamente  $f(x) = g(x) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Así, se verifican las igualdades del enunciado. ■

La proposición anterior nos da una fórmula directa para calcular todas las derivadas de las funciones seno y coseno en un punto dado. Para todo  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,

$$\sen^{(k)}(x) = \sen\left(x + \frac{k\pi}{2}\right), \quad \cos^{(k)}(x) = \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Teorema 6.59.**  $\sin, \cos \in C^\omega(\mathbb{R})$ . Además, para cualesquiera  $a, x \in \mathbb{R}$  se tiene

$$\sen x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sen(a + \frac{k\pi}{2})}{k!} (x-a)^k, \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(a + \frac{k\pi}{2})}{k!} (x-a)^k.$$

En particular, tomando  $a = 0$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$  se verifica

$$\sen x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

## Demostración

Esta demostración no se vio en clase.

Fijemos  $a, x \in \mathbb{R}$  con  $a \neq x$  y un  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Aplicando la fórmula de Taylor con resto de Lagrange a la función sen en torno a  $a$ , obtenemos un punto  $c_n$  comprendido entre  $a$  y  $x$  tal que

$$\operatorname{sen} x - \sum_{k=0}^n \frac{\operatorname{sen}(a + \frac{k\pi}{2})}{k!} (x-a)^k = \frac{\operatorname{sen}(c_n + \frac{(n+1)\pi}{2})}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}.$$

Como  $|\operatorname{sen}(x)| \leq 1$  en  $\mathbb{R}$ , se tiene

$$\left| \operatorname{sen} x - \sum_{k=0}^n \frac{\operatorname{sen}(a + \frac{k\pi}{2})}{k!} (x-a)^k \right| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0.$$

El razonamiento para cos es idéntico. Tomando ahora  $a = 0$  y usando que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & k \text{ par}, \\ (-1)^n, & \text{impar}, \end{cases} \quad \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^n, & k = 2n, \\ 0, & k \text{ impar}, \end{cases}$$

las series se simplifican y obtenemos

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

■

Concluimos esta sección introduciendo la función tangente y sus propiedades básicas. Para facilitar el procedimiento, comenzamos identificando los ceros de la función coseno, para lo cual basta con identificar los ceros que tiene en su intervalo fundamental:  $[-\pi, \pi]$ .

Si  $x \in (0, \pi)$ , entonces  $\cos' x = -\sin x < 0$ , luego cos es una función estrictamente creciente en  $[0, \pi]$ , y por tanto es inyectiva. Como  $\cos 0 = 1$  y  $\cos \pi = -1$ , concluimos que  $\cos|_{[0, \pi]} = [-1, 1]$ .

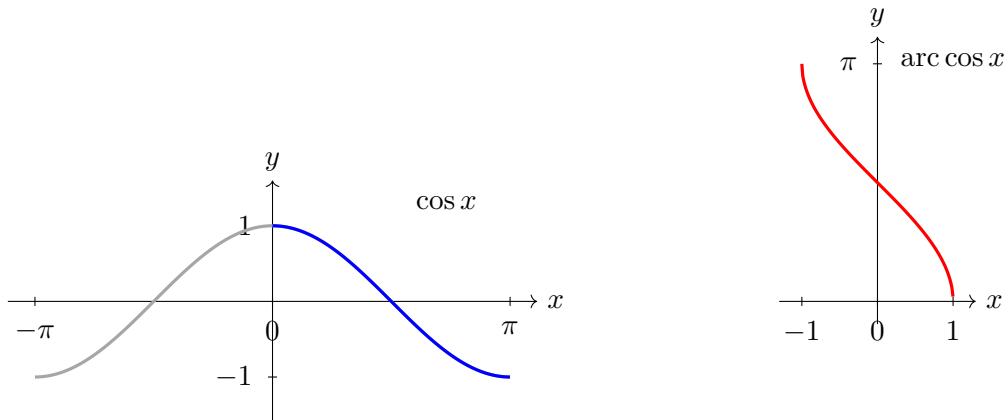
**Definición 6.60.** Definimos la función arco-coseno como  $\operatorname{arc cos} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$  dada por

$$\operatorname{arc cos}(y) = \cos|_{[0, \pi]}^{-1}(y) \quad \forall y \in [-1, 1].$$

Por el teorema de derivación de la función inversa,  $\operatorname{arc cos} \in D(-1, 1)$  con

$$\operatorname{arc cos}'(y) = \frac{1}{\cos'|_{[0, \pi]}(\operatorname{arc cos}(y))} = \frac{1}{-\sin'|_{[0, \pi]}(\operatorname{arc cos}(y))} = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}},$$

donde hemos usado que  $\sin z = |\sin z| = \sqrt{1 - \cos^2 z}$  para todo  $z \in [0, \pi]$ .



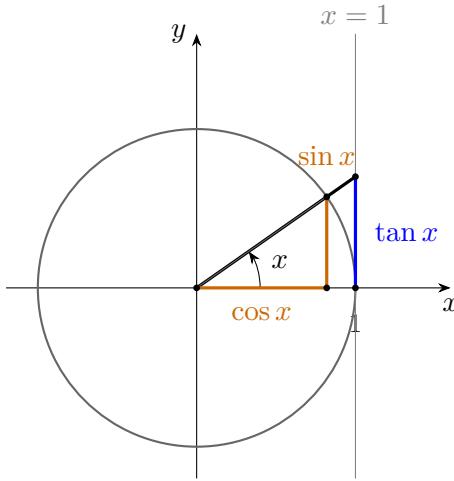
Como el coseno es una función par y es inyectiva en  $[0, \pi]$ , dado  $y \in [-1, 1]$ , las soluciones a la ecuación  $\cos x = y$  en  $[-\pi, \pi]$  son exactamente dos:  $x = \pm \arccos y$ . Por tanto

$$C_y = \{x \in \mathbb{R} : \cos x = y\} = \{\pm \arccos y + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

En particular,  $C_0 = \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Definición 6.61.** La *tangente* es la función  $\operatorname{tg} : \mathbb{R} \setminus C_0 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus C_0.$$



Por el teorema de Thales, la tangente determina la altura a la que la recta vectorial que determina un ángulo  $x$  en la circunferencia unidad corta a la recta vertical  $x = 1$ .

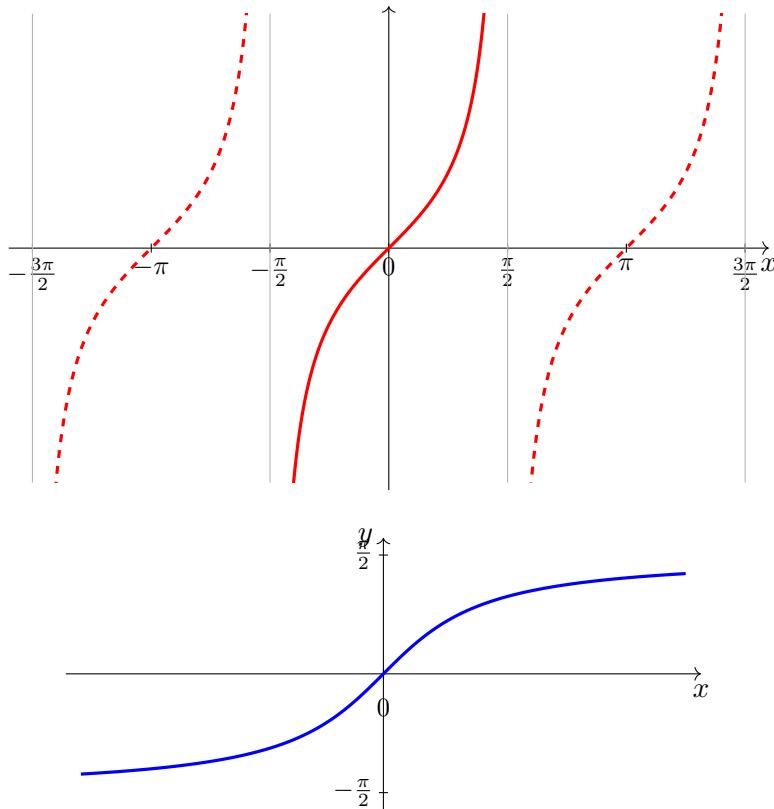
Se comprueba sin dificultad que la  $\operatorname{tg}$  es  $\pi$ -periódica, esto es,  $\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg}(x)$  para todo  $x \in \operatorname{Dom}(\operatorname{tg})$  y todo  $k \in \mathbb{Z}$ . Además,  $\operatorname{tg}$  es derivable en todo su dominio con derivada  $\operatorname{tg}'(x) = 1 + \operatorname{tg}(x)^2$ .

Si bien la periodicidad de la tangente impide que sea inyectiva, podemos pensar en la función  $\tau = \operatorname{tg}_{(-\pi/2, \pi/2)}$ . Por el carácter local de la derivabilidad,  $\tau$  es derivable en  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  con derivada

$$\tau'(x) = 1 + \tau(x)^2 \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Además,

$$\operatorname{tg} x \rightarrow +\infty \quad (x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-) \quad \text{y} \quad \operatorname{tg} x \rightarrow -\infty \quad (x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+),$$



por tanto, la imagen de  $\tau$  es todo  $\mathbb{R}$ . Podemos considerar por tanto la función inversa  $\tau^{-1}$ , a la que llamamos *arcotangente*:  $\text{arc tg} : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ .

Gracias a los teoremas de la función inversa, sabemos que  $\text{arc tg}$  es una función estrictamente creciente y derivable, con derivada

$$\text{arc tg}'(y) = \frac{1}{\tau'(\text{arc tg}(y))} = \frac{1}{1 + \tau(\text{arc tg}(y))^2} = \frac{1}{1 + y^2} \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

**Ejercicios:**

- (1) Calcular la imagen de la función  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \text{arc tg}(\log |x|) \quad \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

- (2) Sea  $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \text{arc tg}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Estudiar el comportamiento de  $f$  en 1,  $+\infty$  y  $-\infty$ . Calcular su imagen.

- (3) Probar que, si  $a, b \in \mathbb{R}$  verifican  $ab < 1$ , entonces

$$\text{arc tg } a + \text{arc tg } b = \text{arc tg}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right).$$

- (4) Calcular la imagen de la función  $F : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$F(x) = \int_1^{1+(x-1)^2} \frac{\text{arc tg } t}{t^2} dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

- (5) Probar que existe una única función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que verifica

$$f(x) + \exp(f(x)) = \arctg(f(x)) + x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Probar también que  $f \in D(\mathbb{R})$  y calcular  $f'(1)$ .

- (6) Probar que la función arco-tangente es uniformemente continua, pero su inversa no lo es.

- (7) Probar que, para todo  $x \in (0, \pi/2)$ , se tiene

$$\frac{2x}{\pi} < \sin x < x < \tan x.$$

- (8) Dado  $x \in \mathbb{R}$ , estudiar la convergencia de las sucesiones  $\{\sin(nx)\}$  y  $\{\cos(nx)\}$ .

- (9) Estudiar la convergencia de las siguientes sucesiones:

$$\left\{ n \sin\left(\frac{n}{n^2 + 1}\right) \right\}, \quad \{\cos^2(n\pi/2)\}, \quad \left\{ \frac{(\log n) \cos \sqrt{n^2 + 1}}{n \arctg n} \right\}.$$

- (10) Dado  $\alpha \in \mathbb{R}$ , estudiar la convergencia de las siguientes series:

$$\sum_{n \geq 2} \frac{\cos(n\alpha)}{n(\log n)^2}, \quad \sum_{n \geq 1} (\sin(1/n))^\alpha, \quad \sum_{n \geq 3} \left( \frac{(1 - e^{-1/n}) \arctg(1/n)}{\log n} \right)^\alpha.$$

- (11) Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \sin x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(0) = 0.$$

Estudiar la continuidad y derivabilidad de  $f$ , así como su comportamiento en  $+\infty$  y  $-\infty$ .

- (12) Sea  $\alpha \in \mathbb{R}$  y  $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = x^\alpha \cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f(0) = 0.$$

Estudiar la continuidad y derivabilidad de  $f$ , así como la continuidad de su derivada.

- (13) Sea  $f : (0, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \left( \frac{1}{\tan x} \right)^{\sin x} \quad \forall x \in (0, \pi/2).$$

¿Puede extenderse  $f$  para obtener una función continua en  $[0, \pi/2]$ ?

- (14) Sea  $f : (0, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = (1 + \sin x)^{\frac{1}{\tan x}} \quad \forall x \in (0, \pi/2).$$

Estudiar la continuidad de  $f$  y su comportamiento en 0 y en  $\pi/2$ .

- (15) Sean  $J = [-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$  y  $g : J \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$  definida por

$$g(x) = \arcsin(2x\sqrt{1 - x^2}) \quad \forall x \in J.$$

Probar que  $g$  es biyectiva, continua en  $J$  y estrictamente creciente. Dar una expresión explícita para la función inversa de  $g$ .

- (16) Dado  $a \in \mathbb{R}^+$ , calcular la imagen de la función  $G : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$G(x) = \int_{-x}^x \sqrt{a^2 - t^2} dt \quad \forall x \in [0, a].$$

## 6.6 Integrales impropias de Riemann

Las nociones de área e integral que hemos desarrollado en este capítulo son en realidad bastante restrictivas, ya que se limitan a considerar funciones acotadas e intervalos cerrados y acotados. En muchas situaciones naturales aparecen funciones no acotadas o definidas en intervalos no acotados para las que puede definirse una noción de área mediante un proceso de paso al límite. Empezamos con un par de ejemplos sencillos que motivan la extensión de la definición de integral que haremos.

La función  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  no está acotada en el intervalo  $(0, 1]$ , pero admite la primitiva  $F(x) = 2\sqrt{x}$  en  $[0, 1]$ . Por tanto, fijado un  $a > 0$  se tiene

$$\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = F(1) - F(a) = 2 - 2\sqrt{a}.$$

Por tanto

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{t}) = 2.$$

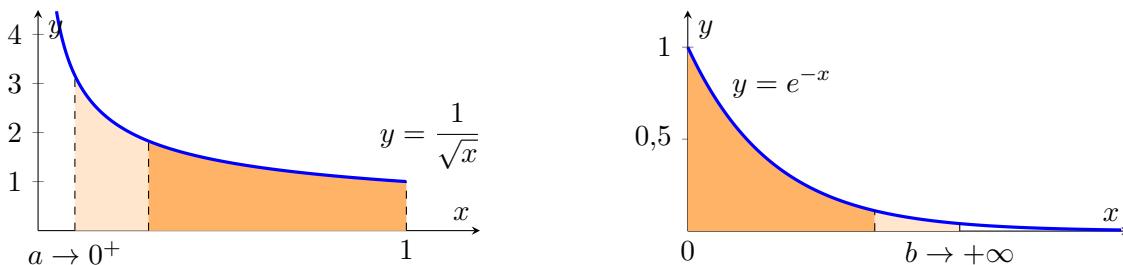
Sea ahora  $\alpha > 0$ . Para todo  $b > 0$  se tiene

$$\int_0^b e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha b}).$$

Luego

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha}.$$

En este caso la función es acotada, pero el intervalo de integración no lo es.



Estos ejemplos muestran los dos tipos básicos de integrales impropias de Riemann que consideraremos; las que tienen un integrando o un intervalo de integración no acotado.

**Definición 6.62.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función **continua**, donde suponemos que  $a \in \mathbb{R}$  y que  $b$  es un número real mayor que  $a$  o bien  $b = +\infty$ . Definimos la *integral impropia de Riemann de  $f$  en  $[a, b]$*  como el límite

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx,$$

siempre que dicho límite exista y sea un número real. En ese caso se dice que la integral de  $f$  es *convergente* en  $[a, b]$ . En caso contrario diremos que la integral es *divergente*.

Análogamente definimos la integral impropia en un intervalo  $(a, b]$ .

**Definición 6.63.** Sea  $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función **continua**, donde suponemos que  $b \in \mathbb{R}$  y que  $a$  es un número real menor que  $b$  o bien  $a = -\infty$ . Definimos la *integral impropia de Riemann de  $f$  en  $(a, b]$*  como el límite

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx,$$

siempre que dicho límite exista y sea un número real. En ese caso se dice que la integral de  $f$  es *convergente* en  $(a, b]$ .

Cuando  $f$  tiene problemas en ambos extremos del intervalo, se define la integral impropia separando en un punto interior.

**Definición 6.64.** Sea  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, donde  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ , y tomamos un  $c \in \mathbb{R}$  con  $a < c < b$  cualquiera. Se dice que la integral impropia de  $f$  en  $(a, b)$  es *convergente* cuando las integrales impropias de  $f$  en  $(a, c]$  y en  $[c, b)$  son convergentes, en cuyo caso se define

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Como aplicación directa de la regla de Barrow tenemos la siguiente relación entre integrabilidad Riemann y convergencia de la integral impropia de funciones definidas en intervalos acotados.

**Proposición 6.65.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Entonces la integral impropia de  $f$  en  $(a, b)$  converge a  $\int_a^b f(x) dx$ .

**Nota:** Como para todo  $c' \in (c, b)$  se verifica la igualdad

$$\int_c^x f(t) dt = \int_c^{c'} f(t) dt + \int_{c'}^x f(t) dt,$$

se deduce que la convergencia de la integral de  $f$  en  $[c, b]$  equivale a la convergencia de la integral de  $f$  en  $[c', b]$ . Es decir, el punto interior  $c$  usado en la definición de la integral en  $(a, b)$  es irrelevante.

### Ejemplo

Sea  $\alpha \neq 1$ . Para todo  $t > 1$  se tiene

$$\int_1^t \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}.$$

De aquí deducimos, para la integral impropia en  $[1, +\infty)$ ,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \text{si } \alpha > 1, \\ +\infty, & \text{si } \alpha < 1. \end{cases}$$

Análogamente, para la integral impropia en  $(0, 1]$  obtenemos

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \text{si } \alpha < 1, \\ +\infty, & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

Naturalmente, no siempre dispondremos de una primitiva expresable mediante funciones elementales, o bien su cálculo puede resultar excesivamente laborioso. Si lo único que nos interesa es saber si una integral impropia es convergente o divergente, podemos recurrir a varios criterios que permiten decidirlo por comparación con otras funciones cuyo comportamiento sí conocemos.

Consideraremos integrales definidas en intervalos del tipo  $[a, b)$  donde  $a < b \leq +\infty$ . Resultados análogos valen para intervalos del tipo  $(a, b]$ , donde  $-\infty \leq a < b$ .

El caso en que la función integrando es positiva es particularmente sencillo, ya que si  $f \geq 0$  entonces la función  $t \mapsto \int_a^t f(x)dx$  creciente, y por tanto solo converger o divergir a  $+\infty$  cuando  $t \rightarrow b^-$ .

**Proposición 6.66.** Sea  $f$  una función continua y no negativa en  $[a, b)$ . Entonces la integral de  $f$  en  $[a, b)$  es convergente si, y sólo si, la función de área

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx$$

está mayorada en  $[a, b)$ , en cuyo caso

$$\int_a^b f(x)dx = \sup \{F(t) : t \in [a, b)\}.$$

En caso contrario la integral de  $f$  en  $[a, b)$  diverge a  $+\infty$ .

Como consecuencia de este hecho tenemos varios criterios de comparación, análogos a los que demostramos para series de términos negativos.

**Proposición 6.67** (Criterio de comparación). Sean  $f, g \in C[a, b)$  satisfaciendo

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b).$$

- Si  $\int_a^b g(x)dx$  es convergente, entonces  $\int_a^b f(x)dx$  es convergente.
- Si  $\int_a^b f(x)dx$  es divergente, entonces  $\int_a^b g(x)dx$  es divergente.

■

### Ejemplo

**Problema.** Estudiar el carácter de la integral impropia  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ .

**Resolución.** La primitiva de  $x \mapsto e^{-x^2}$  no puede expresarse usando las funciones vistas hasta ahora, así que aplicaremos el criterio visto anteriormente. En primer lugar, descomponemos la integral para poder estimar cada parte por separado:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \int_0^1 e^{-x^2}dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx.$$

La función  $e^{-x^2}$  es continua en  $[0, 1]$ , luego es integrable en dicho intervalo.

Sea ahora  $x \geq 1$ , entonces  $x^2 \geq x$ , de donde

$$-x^2 \leq -x \quad \Rightarrow \quad e^{-x^2} \leq e^{-x}.$$

Sabemos que

$$\int_1^{+\infty} e^{-t}dt = [-e^{-t}]_1^{+\infty} = \frac{1}{e},$$

por lo que la integral de  $e^{-x}$  en  $[1, +\infty)$  es convergente. Como  $0 \leq e^{-x^2} \leq e^{-x}$  para todo  $x \geq 1$ , el criterio de comparación nos dice que  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$  también es convergente.

Concluimos que la integral de  $e^{-x^2}$  converge en  $[0, +\infty)$ .

**Nota:** Usando herramientas de la asignatura de Cálculo II podrá verse que el valor de la integral anterior es  $\sqrt{\pi}/2$ .

**Proposición 6.68** (Criterio de comparación por paso al límite). Sean  $f$  y  $g$  continuas y positivas en  $[a, b)$  con  $g(x) \neq 0$  para todo  $x \in [a, b)$ . Supongamos que existe  $L \in \mathbb{R}^+$  tal que

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Entonces las integrales de  $f$  y  $g$  en  $[a, b)$  o bien ambas convergen, o bien ambas divergen positivamente. ■

### Ejemplo

**Problema.** Estudiar el carácter de la integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

**Resolución.** En cada intervalo  $[0, M]$ , con  $M > 0$ , la función

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

es continua, luego integrable. Fijamos  $M$  suficientemente grande y escribimos

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \int_0^M \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} + \int_M^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

El primer sumando es una integral ordinaria. Para el segundo aplicamos el criterio de comparación por paso al límite con  $g(x) = 1/x$ . Observamos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = 1.$$

Además,

$$\int_M^{+\infty} \frac{dx}{x} = [\log x]_M^{+\infty} \rightarrow +\infty,$$

es decir, la integral de  $g$  diverge positivamente. Por el criterio límite de comparación con funciones positivas, se deduce que

$$\int_M^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} \rightarrow +\infty,$$

y, en consecuencia,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} \rightarrow +\infty.$$

**Definición 6.69.** Se dice que la integral impropia de  $f$  en un cierto intervalo es *absolutamente convergente* cuando la integral impropia de  $|f|$  es convergente en dicho intervalo.

Naturalmente, los criterios de convergencia anteriores, formulados para integrales de funciones positivas, pueden usarse para estudiar la convergencia absoluta de la integral de cualquier función.

**Teorema 6.70.** Si la integral impropia de  $f$  es absolutamente convergente en  $[a, b)$ , entonces la integral impropia de  $f$  en  $[a, b)$  también es convergente.

### Demostración

*Esta demostración no se vio en clase.*

Denotemos

$$G(x) = \int_a^x |f(t)| dt, \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

para  $x \in [a, b)$ . Sea  $\{x_n\} \subset [a, b)$  una sucesión tal que  $x_n < b$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y  $\{x_n\} \rightarrow b$ . Como  $f$  es absolutamente integrable,  $G(x_n)$  es convergente, luego es de Cauchy. Nuestro objetivo será probar que  $\{F(x_n)\}$  también es de Cauchy.

Sean  $\varepsilon > 0$  y  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que, para  $m, n \geq n_0$  se tiene  $|G(x_n) - G(x_m)| < \varepsilon$ . Entonces,

$$F(x_m) - F(x_n) = \int_a^{x_m} f(t) dt - \int_a^{x_n} f(t) dt = \int_{x_n}^{x_m} f(t) dt.$$

Usando las propiedades de la integral:

$$|F(x_m) - F(x_n)| \leq \left| \int_{x_n}^{x_m} |f(t)| dt \right| = |G(x_m) - G(x_n)| < \varepsilon.$$

Hemos probado que  $F(x_n)$  es de Cauchy, y por tanto convergente. ■

### Ejemplo

La integral impropia de la función  $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad \forall x > 0, \quad f(0) = 1,$$

converge en  $[0, +\infty)$  pero no es absolutamente convergente.

**Resolución.**

Empezamos estudiando su **convergencia**. Tomamos  $R > 1$  y escribimos

$$\int_0^R \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx + \int_1^R \frac{\sin x}{x} dx.$$

Como  $f$  es continua en  $[0, 1]$ , nos ocupamos de la segunda integral. Integraremos por partes tomando

$$u = \frac{1}{x}, \quad dv = \sin x dx, \quad \Rightarrow \quad du = -\frac{1}{x^2} dx, \quad v = -\cos x.$$

Entonces

$$\int_1^R \frac{\sin x}{x} dx = -\frac{\cos R}{R} + \cos 1 - \int_1^R \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Observamos ahora que

$$\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2} \quad \forall x \geq 1,$$

Por el criterio de comparación,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \text{ converge} \implies \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx \text{ converge absolutamente.}$$

Aquí se hace evidente la importancia de haber partido la integral en  $x = 1$ , ya que la integral anterior no converge en  $(0, +\infty)$ , y no podríamos comparar directamente en dicho intervalo.

Tomando límite cuando  $R \rightarrow +\infty$  se tiene

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx + \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx,$$

luego es convergente.

Estudiamos ahora la convergencia absoluta

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx.$$

Para cada  $n \in \mathbb{N}$  consideramos el intervalo  $[(n-1)\pi, n\pi]$ . Usando la periodicidad  $\pi$  de la función  $|\sin x|$  tenemos:

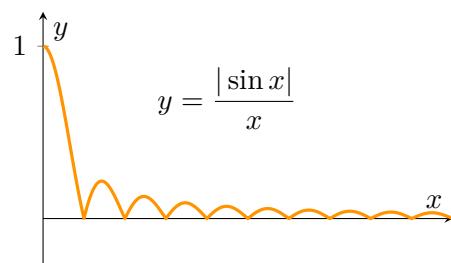
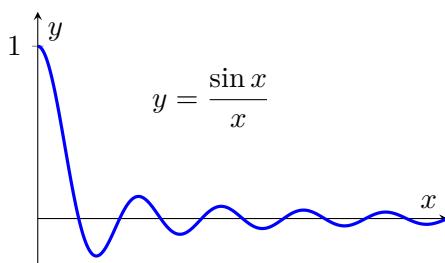
$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \frac{1}{n\pi} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\sin x| dx = \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi |\sin x| dx = \frac{2}{n\pi}.$$

Sumando desde  $n = 1$  hasta  $n = N$ , obtenemos

$$\int_0^{N\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx = \sum_{n=1}^N \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}.$$

Sabemos que la serie armónica  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  diverge, luego

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx \rightarrow +\infty.$$



El método anterior puede aplicarse en el estudio del comportamiento asintótico de sucesiones tales como  $\log(n!)$ .

**Ejemplo**

Se verifica

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(n!)}{n \log n - n} = 1.$$

**Resolución.** Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Nuestra primera tarea es encontrar una estima inferior y otra superior para  $\log(n!)$  usando áreas.

Como  $\log x$  es creciente, para cada  $k = 1, \dots, n$  y todo  $x \in [k-1, k]$  se tiene  $\log x \leq \log k$ . Integrando en  $[k-1, k]$ :

$$\int_{k-1}^k \log x \, dx \leq \log k.$$

Sumando de  $k = 1$  a  $n$ ,

$$\int_0^n \log x \, dx = \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k \log x \, dx \leq \sum_{k=1}^n \log k = \log(n!).$$

La integral de la izquierda es impropia, pero sabemos que  $x \log x - x$  es una primitiva de  $\log x$  en  $\mathbb{R}^+$ , de modo que

$$\int_0^n \log x \, dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^n \log x \, dx = n \log n - n.$$

En consecuencia,

$$n \log n - n \leq \log(n!). \quad (1)$$

Por otra parte, para cada  $k = 1, \dots, n$  y todo  $x \in [k, k+1]$  se verifica  $\log k \leq \log x$ . Integrando en  $[k, k+1]$ :

$$\log k \leq \int_k^{k+1} \log x \, dx.$$

Sumando de  $k = 1$  a  $n$ ,

$$\log(n!) = \sum_{k=1}^n \log k \leq \int_1^{n+1} \log x \, dx = [x \log x - x]_1^{n+1} = (n+1) \log(n+1) - n.$$

Por tanto

$$\log(n!) \leq (n+1) \log(n+1) - n. \quad (2)$$

De (1) y (2) obtenemos, para todo  $n \geq 1$ ,

$$n \log n - n \leq \log(n!) \leq (n+1) \log(n+1) - n.$$

Dividimos toda la desigualdad por  $n \log n - n$ , que es positivo para  $n \geq 2$ :

$$1 \leq \frac{\log(n!)}{n \log n - n} \leq \frac{(n+1) \log(n+1) - n}{n \log n - n}.$$

Para ver que el extremo derecho tiende también a 1 cuando  $n \rightarrow +\infty$  basta con aplicar la regla de L'Hôpital dos veces al límite funcional

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1) \log(x+1) - x}{x \log x - x}.$$

**Ejercicio:** Usar el ejemplo anterior para calcular

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \left( \frac{2n}{n} \right).$$

**Ejercicio:** Sea  $\alpha \in (0, 1)$ . Demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \left( \frac{n}{\lfloor \alpha n \rfloor} \right) = -\alpha \log \alpha - (1 - \alpha) \log(1 - \alpha).$$

Sugerencia: Ver primero que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor \alpha n \rfloor}{n} = \alpha$ .

Si no estaba suficientemente clara la estrecha relación entre series e integrales, el siguiente resultado establece una equivalencia entre la convergencia de ciertas series de números positivos con la convergencia de una integral impropia.

**Teorema 6.71** (Criterio de la integral para series). Sea  $n_0 \in \mathbb{N}$ . Supongamos que  $f \in C[n_0, +\infty)$  es no negativa y decreciente. Entonces

$$\sum_{n \geq n_0} f(n) \text{ converge} \Leftrightarrow \int_{n_0}^{+\infty} f(x) dx \text{ converge.}$$

### Demostración

Como  $f$  es decreciente, para cada intervalo  $(n, n+1)$  con  $n \geq n_0$  se tiene

$$f(n) = \underbrace{f(n)((n+1) - n)}_{\text{área del rectángulo de altura } f(n)} \geq \int_n^{n+1} f(x) dx \geq f(n+1)((n+1) - n) = f(n+1).$$

Sumando estas desigualdades desde  $n = n_0$  hasta  $n = m - 1$ , obtenemos

$$\sum_{n=k}^{m-1} f(n) \geq \int_k^m f(x) dx \geq \sum_{n=k+1}^m f(n)$$

para todo  $m > n_0$ . Por tanto, las sumas parciales de la  $\sum_{m \geq n_0} f(m)$  están mayoradas si, y solo si, lo está la sucesión  $\int_{n_0}^m f(x) dx$ . ■

### Ejemplo

**Problema.** Estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \log n}.$$

**Resolución.** Buscamos aplicar el criterio de la integral. Sea

$$f: [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x \log x}.$$

Claramente  $f \in D([2, +\infty))$  y

$$f'(x) = -\frac{1 + \log x}{x^2 (\log x)^2} \leq 0 \quad \forall x \geq 2.$$

Por tanto,  $f$  es decreciente en  $[2, +\infty)$ .

Estudiamos ahora la integral impropia mediante el cambio de variable  $u = \log x$ ,  $du = \frac{1}{x} dx$ , obteniendo

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \log x} = \int_{\log 2}^{+\infty} \frac{du}{u} = [\log u]_{\log 2}^{+\infty} \rightarrow +\infty.$$

La integral diverge a  $+\infty$ , y como  $f$  es positiva, continua y decreciente en  $[2, +\infty)$ , el criterio de la integral nos dice que la serie

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \log n}$$

es divergente.

**Nótese** que esta serie puede ser estudiada de forma más directa usando el criterio de condensación.

## Anexos del capítulo: algunos métodos de cálculo de primitivas

### Primitivas de funciones elementales

Recordamos primero un pequeño formulario de primitivas que usaremos como referencia. Todas las identidades siguientes pueden comprobarse derivando el término de la derecha. En todas ellas,  $C \in \mathbb{R}$  denota una constante arbitraria.

$$\int 0 \, dx = C,$$

$$\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad \text{si } \alpha \neq -1,$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \log |x| + C,$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\log a} + C \quad (a > 0, a \neq 1),$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C,$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C,$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\frac{1}{\operatorname{tg} x} + C,$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \operatorname{arcsin} x + C.$$

## 1. Integrales por sustitución o cambio de variable

Sea  $\psi: [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow [a, b]$  una función derivable y sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Entonces

$$\int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f(\psi(x)) \psi'(x) dx = \int_{\psi(\tilde{a})}^{\psi(\tilde{b})} f(t) dt.$$

En términos de integrales indefinidas,

$$\int f(\psi(x)) \psi'(x) dx = \int f(t) dt, \quad t = \psi(x).$$

**Obsérvese** que la primera identidad es una igualdad entre números reales, por lo que no hay que *deshacer* el cambio de variable  $t = \varphi(x)$ ; dicha información va implícita en el cambio de los límites de integración. En cambio, la segunda identidad es una entre funciones, por lo que deben estar expresadas en una misma variable, y por tanto debemos sustituir  $t = \varphi(x)$  al final del cálculo.

### Ejemplo

**Problema.** Calcular

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos x dx.$$

**Resolución.** Escribimos

$$\int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin^3 x}_{\text{función de } \sin x} \underbrace{\cos x dx}_{\text{derivada de } \sin x}.$$

Tomamos  $t = \sin x$ , de modo que  $dt = \cos x dx$  y, cuando  $x = 0$ ,  $t = 0$ , mientras que cuando  $x = \pi/2$ ,  $t = 1$ . Entonces

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos x dx = \int_0^1 t^3 dt = \left[ \frac{t^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

### Ejemplo

**Problema.** Calcular una primitiva de la función  $\operatorname{tg} x$ .

**Resolución.** Partimos de

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{dt}{\underbrace{\cos x}_{t} dx}.$$

Tomando  $t = \cos x$  se tiene  $dt = -\sin x dx$  y, por tanto,

$$\int \operatorname{tg} x dx = - \int \frac{1}{t} dt = -\log|t| + C = -\log|\cos x| + C.$$

Hemos *deshecho* el cambio  $t = \cos x$  para volver a la variable  $x$ , que es en la que estaba planteado el problema.

## 2. Integración por partes

Sean  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funciones derivables. Entonces

$$\int_a^b \underbrace{f(x)}_u \underbrace{g'(x)}_{dv} dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b \underbrace{f'(x)}_{du} \underbrace{g(x)}_v dx.$$

Para la integral indefinida, se tiene la fórmula análoga

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Esta técnica es especialmente útil cuando queremos integrar un producto en el que un factor es fácil de derivar y el otro es fácil de integrar.

### Ejemplo

**Problema.** Calcular una primitiva de  $x \log x$ .

**Resolución.** Elegimos

$$\underbrace{u}_{\text{difícil de integrar}} = \log x, \quad \underbrace{dv}_{\text{fácil de integrar}} = x dx.$$

Entonces  $du = \frac{1}{x} dx$  y  $v = \frac{x^2}{2}$ , de modo que

$$\begin{aligned} \int x \log x dx &= \underbrace{\log x}_u \underbrace{\frac{x^2}{2}}_v - \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{du} \underbrace{\frac{x^2}{2}}_v dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \log x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{1}{2}x^2 \log x - \frac{1}{4}x^2 + C. \end{aligned}$$

### Ejemplo

**Problema.** Calcular

$$\int_1^2 \log x dx.$$

**Resolución.** Tomamos  $u = \log x$ ,  $dv = dx$ ; entonces  $du = \frac{1}{x} dx$  y  $v = x$ . Aplicando integración por partes en  $[1, 2]$ :

$$\begin{aligned} \int_1^2 \log x dx &= [\underbrace{\log x}_u \underbrace{x}_v]_1^2 - \int_1^2 \underbrace{\frac{1}{x}}_{du} \underbrace{x}_v dx \\ &= [x \log x]_1^2 - \int_1^2 1 dx = 2 \log 2 - 1. \end{aligned}$$

En ocasiones, al aplicar integración por partes sucesivamente entramos en un bucle que termina por volver al punto de partida. Ejemplificamos a continuación un método que permite resolver algunos de estos casos.

**Ejemplo**

**Problema.** Calcular una primitiva de  $e^{-x} \sin x$ .

**Resolución.** Sea

$$I = \int e^{-x} \sin x \, dx.$$

Integramos por partes tomando  $u = e^{-x}$  y  $dv = \sin x \, dx$ . Entonces  $du = -e^{-x} \, dx$  y  $v = -\cos x$ , y

$$I = -e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \cos x \, dx.$$

Denotemos

$$J = \int e^{-x} \cos x \, dx.$$

Volvemos a integrar por partes en  $J$  repitiendo la elección de  $u$  y  $v$  que hemos hecho en el paso anterior (si no, terminaremos por *deshacer* la integración por partes y llegar a  $0 = 0$ ). Tomamos por tanto  $u = e^{-x}$ ,  $dv = \cos x \, dx$ ; así  $du = -e^{-x} \, dx$  y  $v = \sin x$ , y

$$J = e^{-x} \sin x + I.$$

Sustituyendo en la expresión de  $I$ ,

$$I = -e^{-x} \cos x - (e^{-x} \sin x + I),$$

por lo que

$$2I = -e^{-x}(\cos x + \sin x), \quad I = -\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x + \sin x) + C.$$

### 3. Integración de funciones racionales

Nos ocupamos ahora del cálculo de primitivas de funciones racionales, esto es, integrales de la forma

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} \, dx,$$

donde  $P, Q$  son polinomios. En primer lugar nos limitaremos al caso en que  $\deg P < \deg Q \leq 2$ . Si  $\deg P \geq \deg Q$ , empezamos haciendo la división de polinomios para escribir el integrando como suma de un polinomio y una fracción propia.

#### 3.i Caso $\deg Q = 1$

Sean  $a, b, c \in \mathbb{R}$  con  $b \neq 0$ . Entonces

$$\int \frac{a}{bx + c} \, dx = \frac{a}{b} \int \frac{b \, dx}{bx + c} = \frac{a}{b} \int \frac{1}{t} \, dt = \frac{a}{b} \log |t| + K = \frac{a}{b} \log |bx + c| + K.$$

#### 3.ii Caso $\deg Q = 2$ y $Q$ tiene dos raíces simples

Si  $r_1, r_2$  son las raíces reales de  $Q$ , buscamos constantes  $A, B \in \mathbb{R}$  tales que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x - r_1} + \frac{B}{x - r_2}.$$

**Ejemplo****Problema.** Calcular

$$\int \frac{x-1}{4x^2-1} dx.$$

**Resolución.** Las raíces de  $4x^2 - 1$  son  $r_1 = 1/2$  y  $r_2 = -1/2$ . Buscamos  $A, B \in \mathbb{R}$  tales que

$$\frac{x-1}{4x^2-1} = \frac{A}{x-\frac{1}{2}} + \frac{B}{x+\frac{1}{2}}.$$

Equivalente a

$$x-1 = A\left(x+\frac{1}{2}\right) + B\left(x-\frac{1}{2}\right) = (A+B)x + \frac{A-B}{2}.$$

Comparando coeficientes,

$$A+B=1, \quad \frac{A-B}{2}=-1.$$

De aquí se obtiene  $A = -\frac{1}{8}$ ,  $B = \frac{3}{8}$ , y por tanto

$$\frac{x-1}{4x^2-1} = -\frac{1}{8} \frac{1}{x-\frac{1}{2}} + \frac{3}{8} \frac{1}{x+\frac{1}{2}}.$$

Integrando,

$$\int \frac{x-1}{4x^2-1} dx = -\frac{1}{8} \int \frac{1}{x-\frac{1}{2}} dx + \frac{3}{8} \int \frac{1}{x+\frac{1}{2}} dx = -\frac{1}{8} \log|x-\frac{1}{2}| + \frac{3}{8} \log|x+\frac{1}{2}| + C.$$

**3.iii Caso  $Q$  con una raíz doble: integrales *log–potencia***

Si  $Q(x)$  tiene una raíz doble  $r$ , el camino más rápido suele ser la sustitución  $t = x - r$ .

**Ejemplo****Problema.** Calcular

$$\int \frac{x}{x^2+2x+1} dx.$$

**Resolución.** Observamos que  $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$  tiene una raíz doble  $r = -1$ . Tomamos  $t = x + 1$ , de modo que  $dt = dx$  y

$$\frac{x}{x^2+2x+1} = \frac{t-1}{t^2} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}.$$

Así,

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^2+2x+1} dx &= \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\right) dt = \int \frac{1}{t} dt - \int \frac{1}{t^2} dt \\ &= \log|t| + \frac{1}{t} + C = \log(1+x) + \frac{1}{1+x} + C. \end{aligned}$$

Alternativamente, podríamos buscar una descomposición en fracciones simples de la forma

$$\frac{A}{x-r} + \frac{B}{(x-r)^2},$$

**Ejemplo**

**Problema.** Calcular la integral

$$\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^2} dx.$$

**Resolución.** Buscamos  $A, B \in \mathbb{R}$  tales que

$$\frac{x}{(x+1)^2} = \underbrace{\frac{A}{x+1}}_{\text{término logarítmico}} + \underbrace{\frac{B}{(x+1)^2}}_{\text{término potencia}}.$$

Esto equivale a

$$x = A(x+1) + B \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Evaluando en  $x = 0$  y  $x = -1$  obtenemos el sistema

$$\begin{cases} 0 = A + B, \\ -1 = B, \end{cases} \implies A = 1, B = -1.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x}{(x+1)^2} dx &= \int_0^1 \left( \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx \\ &= \left[ \log(x+1) \right]_0^1 + \left[ \frac{1}{x+1} \right]_0^1 \\ &= \log 2 + \frac{1}{2} - 1 = \log 2 - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**Ejemplo.** Cálculo de una integral definida usando una descomposición en fracciones simples:

$$\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^2} dx.$$

Buscamos  $A, B \in \mathbb{R}$  tales que

$$\frac{x}{(x+1)^2} = \underbrace{\frac{A}{x+1}}_{\text{término logarítmico}} + \underbrace{\frac{B}{(x+1)^2}}_{\text{término potencia}}.$$

Equivalente a

$$x = A(x+1) + B \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

y evaluando en  $x = 0$  y  $x = -1$  obtenemos

$$\begin{cases} 0 = A + B, \\ -1 = B, \end{cases} \implies A = 1, B = -1.$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{x}{(x+1)^2} dx &= \int_0^1 \left( \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx \\
 &= \left[ \log(x+1) \right]_0^1 + \left[ \frac{1}{x+1} \right]_0^1 \\
 &= \log 2 + \frac{1}{2} - 1 = \log 2 - \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

### 3.iv Caso $Q$ sin raíces reales: integrales del tipo $\log - \arctg$

Supongamos que  $Q(x)$  es un polinomio de grado 2 sin raíces reales y que el numerador tiene grado 1. El objetivo es forzar que en el numerador aparezca la derivada de  $Q$ , para obtener un término logarítmico, y tratar el resto como una integral inmediata de la arctangente.

#### Caso «más general».

(No cubrimos todos los casos posibles, pero sí los más factibles de tratar a mano.)

Supongamos que  $Q$  y  $P$  son polinomios y que  $Q$  factoriza de la forma

$$Q(x) = \overbrace{a}^{\text{coeficiente líder}} (x - r_1)^{k_1} \cdots (x - r_n)^{k_n} q_1(x) \cdots q_m(x),$$

donde  $r_1, \dots, r_n$  son raíces reales distintas, de multiplicidades  $k_1, \dots, k_n$ , y  $q_1, \dots, q_m$  son polinomios irreducibles de grado 2. Si  $\deg P < \deg Q$ , podemos escribir

$$\begin{aligned}
 \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{a_{11}}{x - r_1} + \frac{a_{12}}{(x - r_1)^2} + \cdots + \frac{a_{1k_1}}{(x - r_1)^{k_1}} \\
 &\quad + \cdots + \frac{a_{n1}}{x - r_n} + \cdots + \frac{a_{nk_n}}{(x - r_n)^{k_n}} \\
 &\quad + \frac{\alpha_1 x + \beta_1}{q_1(x)} + \cdots + \frac{\alpha_m x + \beta_m}{q_m(x)},
 \end{aligned}$$

para ciertos coeficientes reales  $a_{ij}, \alpha_j, \beta_j$  que se determinan resolviendo un sistema de ecuaciones lineales. Cada uno de los sumandos anteriores se integra mediante las fórmulas ya vistas (logaritmos, potencias y términos del tipo arco-tangente).

## 4. Potencias de senos y cosenos

Afrontamos ahora el cálculo de integrales del tipo

$$\int \sin^n x \cos^m x dx,$$

distinguiendo dos casos según haya un exponente impar o no.

### 4.i Caso con un exponente impar

Si uno de los exponentes es impar, separamos una potencia 1 de dicho exponente y escribimos el resto como función de una sola razón trigonométrica.

**Ejemplo****Problema.** Calcular

$$\int \sin^2 x \cos^3 x dx.$$

**Resolución.** En este caso el exponente impar es el de  $\cos x$ :

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^3 x dx &= \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x dx \\ &= \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \cos x dx. \end{aligned}$$

Hacemos el cambio  $t = \sin x$ , de modo que  $dt = \cos x dx$  y

$$\underbrace{\sin^2 x}_{t^2} (1 - \underbrace{\sin^2 x}_{t^2}) dx \rightsquigarrow t^2 (1 - t^2) dt.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^3 x dx &= \int t^2 (1 - t^2) dt = \int (t^2 - t^4) dt \\ &= \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C. \end{aligned}$$

**4.ii Ambos exponentes pares**Cuando tanto  $n$  como  $m$  son pares, la técnica anterior no funciona directamente. En ese caso usamos las identidades

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x,$$

de donde se obtiene

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x).$$

**Ejemplo****Problema.** Calcular

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx.$$

**Resolución.** Usamos las fórmulas de reducción de exponente:

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^2 x dx &= \int \underbrace{\left(\frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\right)}_{\sin^2 x} \underbrace{\left(\frac{1}{2}(1 + \cos 2x)\right)}_{\cos^2 x} dx \\ &= \frac{1}{4} \int (1 - \cos^2 2x) dx \\ &= \frac{1}{4} \int 1 dx - \frac{1}{4} \int \cos^2 2x dx. \end{aligned}$$

Aplicamos de nuevo la misma identidad a  $\cos^2 2x$ :

$$\cos^2 2x = \frac{1}{2}(1 + \cos 4x),$$

de forma que

$$\begin{aligned}
 \int \sin^2 x \cos^2 x \, dx &= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} \int \frac{1}{2}(1 + \cos 4x) \, dx \\
 &= \frac{x}{4} - \frac{1}{8} \int (1 + \cos 4x) \, dx \\
 &= \frac{x}{4} - \frac{x}{8} - \frac{1}{8} \int \cos 4x \, dx \\
 &= \frac{x}{8} - \frac{1}{32} \sin 4x + C.
 \end{aligned}$$

## 5. Integrales a trozos. Simetrías

Cuando integramos funciones definidas a trozos, conviene dividir el intervalo de integración en los puntos donde cambia la definición de la función, usando la aditividad de la integral.

### Ejemplo

**Problema.** Calcular

$$\int_0^2 |x^2 - 1| \, dx.$$

**Resolución.** Escribimos el integrando como una función a trozos:

$$|x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1, & x^2 - 1 \geq 0 \iff x \geq 1, \\ 1 - x^2, & x^2 - 1 < 0 \iff x \in (-1, 1). \end{cases}$$

En el intervalo de integración esto se traduce en

$$\int_0^2 |x^2 - 1| \, dx = \int_0^1 (1 - x^2) \, dx + \int_1^2 (x^2 - 1) \, dx.$$

Calculamos ambas integrales:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 (1 - x^2) \, dx &= \left[ x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3}, \\
 \int_1^2 (x^2 - 1) \, dx &= \left[ \frac{x^3}{3} - x \right]_1^2 = \left( \frac{8}{3} - 2 \right) - \left( \frac{1}{3} - 1 \right).
 \end{aligned}$$

Sumando,

$$\int_0^2 |x^2 - 1| \, dx = \left( 1 - \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{8}{3} - 2 \right) - \left( \frac{1}{3} - 1 \right) = 2.$$

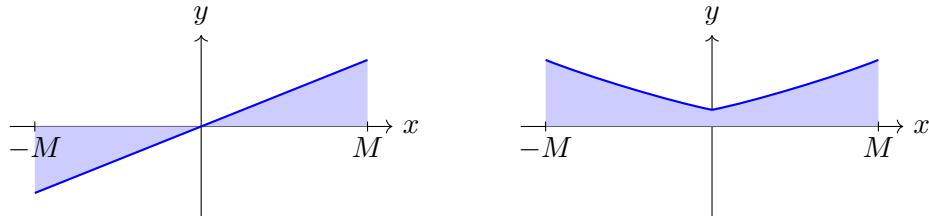
Supongamos ahora que tenemos un intervalo simétrico respecto de 0, es decir,  $[-M, M]$  para algún  $M > 0$ .

- Si  $f$  es impar, es decir,  $f(-x) = -f(x)$ , entonces

$$\int_{-M}^M f(x) \, dx = 0.$$

- Si  $f$  es par, es decir,  $f(x) = f(-x)$ , entonces

$$\int_{-M}^M f(x) dx = 2 \int_0^M f(x) dx.$$



Ambas identidades se demuestran de forma inmediata dividiendo el intervalo de integración en  $[-M, 0]$  y  $[0, M]$  y aplicando el cambio de variable  $-x = t$  en la integral a la izquierda de 0.

### Ejemplo

**Problema.** Calcular

$$\int_{-2}^2 x^5 \sin(x^2) dx.$$

**Resolución.** El intervalo de integración es simétrico respecto de 0, así que estudiamos la simetría del integrando

$$f(x) = x^5 \sin(x^2).$$

Tenemos

$$f(-x) = (-x)^5 \sin((-x)^2) = -x^5 \sin(x^2) = -f(x),$$

luego  $f$  es impar. Por la propiedad anterior,

$$\int_{-2}^2 x^5 \sin(x^2) dx = 0$$

por simetría.