

1. (3 puntos; 0,75 puntos por apartado) Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, aportando una demostración o dando un contraejemplo según corresponda.

- (i) Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales. Entonces $\{|x_n|\} \rightarrow +\infty$ si, y solo si, x_n no admite ninguna subsucesión convergente.

Solución. La afirmación es **verdadera**.

Supongamos primero que $\{|x_n|\} \rightarrow +\infty$. Si $\{x_n\}$ tuviera una sucesión parcial convergente, $\{x_{\sigma(n)}\} \rightarrow \ell$ para algún $\ell \in \mathbb{R}$, entonces $\{|x_{\sigma(n)}|\} \rightarrow |\ell|$. Sin embargo, $\{|x_{\sigma(n)}|\}$ es una sucesión parcial de $\{|x_n|\}$, por lo que debe tenerse $\{|x_{\sigma(n)}|\} \rightarrow +\infty$.

Para la implicación recíproca razonamos por contrarrecíproco. De negar $\{|x_n|\} \rightarrow +\infty$ obtenemos

$$\exists M > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists m_n > n \quad \text{tal que} \quad |x_{m_n}| \leq M.$$

Definimos una aplicación $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ estrictamente creciente de la siguiente forma:

$$\sigma(1) = m_1, \quad \sigma(n+1) = m_{\sigma(n)} \quad \forall n \geq 1.$$

De esta forma, $\{x_{\sigma(n)}\}$ es una sucesión parcial acotada de $\{x_n\}$. Por el teorema de Bolzano-Weierstrass, admite una sucesión parcial convergente, que es también una subsucesión de $\{x_n\}$.

- (ii) Sean $\sum_{n \geq 1} a_n$ y $\sum_{n \geq 1} b_n$ dos series convergentes. Entonces $\sum_{n \geq 1} a_n b_n$ es convergente.

Solución. La afirmación es **falsa**. Tomemos

$$a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

Las series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ convergen por el criterio de Leibniz. Sin embargo,

$$\sum_{n \geq 1} a_n b_n = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$$

es la serie armónica, que diverge.

- (iii) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable tal que existen $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ de forma que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell_1$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \ell_2$. Entonces $\ell_2 = 0$.

Solución. La afirmación es **verdadera**. Para cada $x > 1$, aplicamos el teorema del valor medio a f en el intervalo $[x-1, x]$. Existe $c_x \in (x-1, x)$ tal que

$$f'(c_x) = \frac{f(x) - f(x-1)}{x - (x-1)} = f(x) - f(x-1).$$

Cuando $x \rightarrow +\infty$, también $c_x \rightarrow +\infty$. Por una parte,

$$f'(c_x) \rightarrow \ell_2.$$

Por otra,

$$f(x) - f(x-1) \rightarrow \ell_1 - \ell_1 = 0.$$

En consecuencia, $\ell_2 = 0$.

- (iv) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f|_{(-\infty, 0]}$ y $f|_{[0, +\infty)}$ son convexas. Entonces f es convexa en $\mathbb{R}$.

Solución. La afirmación es **falsa**. Consideremos

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & x \leq 0, \\ (x-1)^2, & x \geq 0. \end{cases}$$

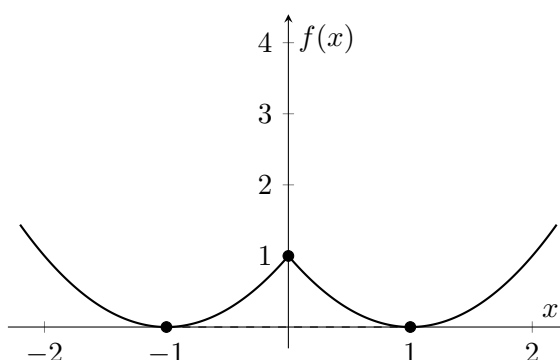
La función es continua en 0, pues ambos trozos toman allí el valor 1, y cada una de sus restricciones es convexa. No obstante,

$$f(-1) = f(1) = 0, \quad f(0) = 1,$$

de modo que

$$f\left(\frac{-1+1}{2}\right) = 1 > \frac{f(-1) + f(1)}{2} = 0.$$

Por tanto, f no es convexa en $\mathbb{R}$.



2. (2 puntos) Sea $\{x_n\}$ la sucesión definida mediante la ley de recurrencia

$$\begin{cases} x_1 \in (0, 1), \\ x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2} \int_{x_n}^1 e^{-t^2} dt. \end{cases}$$

- (i) (1 punto) Demostrar que $x_n \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solución. Razonamos por inducción. Para $n = 1$ esta propiedad es cierta por la elección de x_1 . Supongamos ahora que $x_n \leq 1$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Usando la continuidad del operador integral tenemos

$$x_{n+1} \leq x_n + \int_{x_n}^1 e^{-t^2} dt \leq x_n + \frac{1}{2}(1 - x_n) \sup_{t \in (-\infty, 1]} e^{-t^2}.$$

La función $t \mapsto e^{-t^2}$ es derivable con derivada $-2te^{-t^2}$. Por tanto, alcanza un máximo absoluto en $t = 0$, donde toma el valor 1. Entonces,

$$x_{n+1} \leq x_n + \frac{1}{2}(1 - x_n) = \frac{x_n + 1}{2} \leq 1.$$

- (ii) (1 punto) Justificar que x_n es convergente y calcular su límite.

Solución. Como $x_n < 1$, la integral $\int_{x_n}^1 e^{-t^2} dt$ es estrictamente positiva. Por ello,

$$x_{n+1} > x_n,$$

de modo que $\{x_n\}$ es creciente. Por el apartado anterior está acotada superiormente por 1, así que converge a cierto $\ell \leq 1$.

La función

$$G(x) = \int_x^1 e^{-t^2} dt$$

es continua por el teorema fundamental del cálculo. Por tanto, al tomar límites en la recurrencia obtenemos

$$\ell = \ell + \frac{1}{2} \int_\ell^1 e^{-t^2} dt,$$

y, en consecuencia,

$$\int_\ell^1 e^{-t^2} dt = 0.$$

Como $e^{-t^2} > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, la positividad de la integral nos dice que esto solo es posible si $\ell = 1$.

3. (2,5 puntos) Sea $F : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por

$$F(x) = \int_1^{1/x} \frac{t-1}{t} e^{-t} dt, \quad x > 0.$$

(i) **(1 punto)** Determinar si F puede extenderse de forma continua a $x = 0$.

Solución. Esta condición es equivalente a que exista $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t-1}{t} e^{-t} dt$. Por tanto, se trata de ver si dicha integral impropia es o no convergente. Para $t \geq 1$,

$$0 \leq \frac{t-1}{t} e^{-t} \leq e^{-t}.$$

Como la integral impropia

$$\int_1^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_1^{+\infty} = \frac{1}{e}$$

es convergente, el criterio de comparación garantiza que también converge

$$\int_1^{+\infty} \frac{t-1}{t} e^{-t} dt.$$

Así, F admite una extensión continua a $[0, +\infty)$ definiendo

$$F(0) = \int_1^{+\infty} \frac{t-1}{t} e^{-t} dt.$$

(ii) **(1,5 puntos)** Calcular la imagen de F .

Solución. Por el teorema fundamental del cálculo y la regla de la cadena,

$$F'(x) = \frac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x}} e^{-1/x} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \frac{x-1}{x^2} e^{-1/x}.$$

De aquí se deduce que

$$F'(x) < 0 \quad (0 < x < 1), \quad F'(1) = 0, \quad F'(x) > 0 \quad (x > 1).$$

Por tanto, F decrece en $(0, 1)$ y crece en $(1, +\infty)$. Además, en $x = 1$ la función alcanza un mínimo absoluto, que vale

$$F(1) = \int_1^1 \frac{t-1}{t} e^{-t} dt = 0.$$

La imagen por tanto será $\left[0, \int_0^{+\infty} \frac{t-1}{t} e^{-t} dt\right)$ o $\left[0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{1/x} \frac{t-1}{t} e^{-t} dt\right)$ dependiendo de qué valor es mayor. Estudiamos entonces el comportamiento de $F(x)$ cuando $x \rightarrow +\infty$.

La integral

$$\int_1^0 \frac{t-1}{t} e^{-t} dt = \int_0^1 \frac{1-t}{t} e^{-t} dt$$

es impropia en 0. Cuando $t \rightarrow 0^+$, tenemos $(t-1)e^{-t} \rightarrow 1$, por tanto aplicamos el criterio de comparación con $t \rightarrow \frac{1}{t}$. En efecto,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1-t}{t} e^{-t}}{\frac{1}{t}} = 1,$$

luego la convergencia de la integral anterior equivale a la de $\int_0^1 \frac{dt}{t} = [\log t]_0^1 = +\infty$.

Hemos probado que, cuando $x \rightarrow +\infty$,

$$F(x) \rightarrow \int_0^1 \frac{1-t}{t} e^{-t} dt = +\infty.$$

Por tanto, $F((0, +\infty)) = [0, +\infty)$.

4. (2,5 puntos) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $C^\infty(\mathbb{R})$ que verifica

$$f(0) = 0, \quad f'(x) = 1 - xf(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(i) **(1 punto)** Calcular el polinomio de Taylor de orden 5 de f centrado en $a = 0$.

Solución. Partimos de

$$f'(x) = 1 - xf(x).$$

Derivando sucesivamente,

$$\begin{aligned} f''(x) &= -f(x) - xf'(x), \\ f^{(3)}(x) &= -2f'(x) - xf''(x), \\ f^{(4)}(x) &= -3f''(x) - xf^{(3)}(x), \\ f^{(5)}(x) &= -4f^{(3)}(x) - xf^{(4)}(x). \end{aligned}$$

Evaluando en $x = 0$ y usando $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$, obtenemos

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f^{(3)}(0) = -2, \quad f^{(4)}(0) = 0, \quad f^{(5)}(0) = 8.$$

Así,

$$T_5[f, 0](x) = x - \frac{2}{3!}x^3 + \frac{8}{5!}x^5 = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{15}.$$

(ii) **(1,5 puntos)** Evaluar el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3x - 3f(x)}{x^3} \right)^{1/x^2}.$$

Solución. Por la fórmula infinitesimal del resto, se tiene

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - 3f(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - \frac{3}{15}x^5 - 3R_5(x)}{x^3} = 1.$$

Por tanto, podemos aplicar el criterio de equivalencia logarítmica. Consideramos entonces

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left(\frac{x^3 - \frac{1}{5}x^5 - 3R_5(x)}{x^3} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-\frac{1}{5}x^5 - 3R_5(x)}{x^5} \right) = -\frac{1}{5}.$$

Por el criterio de equivalencia logarítmica,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3x - 3f(x)}{x^3} \right)^{1/x^2} = e^{-1/5}.$$