

CÁLCULO I: GRADO EN ING. INFORMÁTICA 2025/26

Examen extraordinario resuelto

En Madrid, a 15 de junio de 2026.

Este examen consta de **5 ejercicios**. La puntuación máxima es de **15 puntos**. A continuación se reproducen los enunciados y se presentan soluciones redactadas con las técnicas propias de la asignatura.

Ejercicio 1

(3 puntos)

Se considera la sucesión $\{x_n\}$ definida mediante la siguiente ley de recurrencia:

$$\begin{aligned}x_1 &= 4, \\x_{n+1} &= 2 \frac{\sqrt{x_n}}{n}.\end{aligned}$$

- (I) (0.5 p.) Demostrar que $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (II) (1.5 p.) Probar que $\{x_n\}$ es monótona decreciente.
- (III) (1 p.) Razonar por qué $\{x_n\}$ es convergente y calcular su límite.

Solución:

- (I) Lo demostramos por inducción. En primer lugar, $x_1 = 4 > 0$. Supongamos ahora que $x_n > 0$. Entonces $\sqrt{x_n} > 0$ y, como $n > 0$,

$$x_{n+1} = 2 \frac{\sqrt{x_n}}{n} > 0.$$

- (II) Como $x_n > 0$, probar $x_{n+1} \leq x_n$ es equivalente a demostrar que

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq 1$$

para todo $n \geq 1$. Lo hacemos por inducción:

Para $n = 1$,

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{2\sqrt{x_1}}{x_1} = 1 \leq 1.$$

Supongamos ahora que, para cierto $n \geq 2$, se cumple $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq 1$. Entonces

$$\frac{x_{n+2}}{x_{n+1}} = \frac{\sqrt{x_{n+1}}/(n+1)}{\sqrt{x_n}/n} = \frac{n}{n+1} \sqrt{\frac{x_{n+1}}{x_n}} \leq 1 \cdot \sqrt{1} = 1.$$

Por tanto, la sucesión es monótona decreciente.

- (III) $\{x_n\}$ está acotada inferiormente por 0 y es decreciente. Por tanto, el teorema de convergencia monótona garantiza que existe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ell \geq 0.$$

Tomando límite en la ley de recurrencia, obtenemos directamente:

$$\ell = 2\sqrt{\ell} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Alternativamente, podemos probar que $\ell = 0$ usando que x_n es decreciente y positiva, ya que de $0 < x_n \leq x_1 = 4$ se deduce que

$$0 < x_{n+1} = 2 \frac{\sqrt{x_n}}{n} \leq \frac{2\sqrt{4}}{n} \rightarrow 0.$$

Por el criterio del sándwich, $\{x_{n+1}\} \rightarrow 0$.

Ejercicio 2

(2 puntos)

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{1}{x} \right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- (I) (1 p.) Estudiar la continuidad de f en el punto $x = 0$.
 (II) (1 p.) Estudiar la derivabilidad de f en el punto $x = 0$.

Solución:

- (I) Para todo $x \neq 0$ se tiene

$$\left| x \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{1}{x} \right) \right| \leq |x| \frac{\pi}{2},$$

ya que $|\operatorname{arc\,tg} t| < \pi/2$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Como el miembro de la derecha tiende a 0 cuando $x \rightarrow 0$, por el teorema del sándwich,

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{1}{x} \right) = 0 = f(0).$$

Por tanto, f es continua en $x = 0$.

- (II) Usamos la definición de derivada:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{1}{h} \right).$$

Sin embargo,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{1}{h} \right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \operatorname{arc\,tg} k = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{1}{h} \right) = \lim_{k \rightarrow -\infty} \operatorname{arc\,tg} k = -\frac{\pi}{2}.$$

Los límites laterales son distintos, por lo que el límite no existe. En consecuencia, f no es derivable en $x = 0$.

Ejercicio 3

(4 puntos)

Se considera la función $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{\log x}{x^2}, \quad x > 0.$$

- (I) (1 p.) Estudiar la monotonía de f y clasificar sus extremos relativos.
- (II) (1 p.) Justificar que f tiene extremos absolutos en $[1, e]$ y calcularlos.
- (III) (2 p.) Estudiar el carácter de la siguiente serie:

$$\sum_{n \geq 3} \frac{\log n}{n^2}.$$

Solución:

- (I) Derivamos:

$$f'(x) = \frac{1 - 2 \log x}{x^3}.$$

Como $x^3 > 0$ para $x > 0$, el signo de $f'(x)$ coincide con el de $1 - 2 \log x$. El único punto crítico satisface

$$1 - 2 \log x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \sqrt{e}.$$

Por tanto,

$$f'(x) > 0 \text{ si } 0 < x < \sqrt{e}, \quad f'(x) < 0 \text{ si } x > \sqrt{e}.$$

Así, f es creciente en $(0, \sqrt{e})$ y decreciente en $(\sqrt{e}, +\infty)$. En $x = \sqrt{e}$ alcanza un máximo relativo, cuyo valor es

$$f(\sqrt{e}) = \frac{\log(\sqrt{e})}{e} = \frac{1}{2e}.$$

No tiene mínimos relativos.

- (II) La función es continua en el intervalo cerrado y acotado $[1, e]$. Por el teorema de Weierstrass, alcanza en él un máximo y un mínimo absolutos. Comparamos los valores en los extremos y en el punto crítico:

$$f(1) = 0, \quad f(\sqrt{e}) = \frac{1}{2e}, \quad f(e) = \frac{1}{e^2}.$$

Como

$$0 < \frac{1}{e^2} < \frac{1}{2e},$$

el mínimo absoluto está en $x = 1$ y vale $f(1) = 0$, y el máximo absoluto está en $x = \sqrt{e}$ y alcanza el valor $f(\sqrt{e}) = \frac{1}{2e}$.

- (III) Sea

$$a_n = \frac{\log n}{n^2}, \quad n \geq 3.$$

La sucesión es positiva y decreciente, pues la función $g(x) = \log x/x^2$ es decreciente para $x > \sqrt{e}$ y, en particular, para $x \geq 3$. Podemos aplicar el criterio de condensación de Cauchy.

La serie original tiene el mismo carácter que la serie condensada

$$\sum_{k \geq 2} 2^k a_{2^k}.$$

Ahora bien,

$$2^k a_{2^k} = 2^k \frac{\log(2^k)}{(2^k)^2} = \frac{k \log 2}{2^k}.$$

Por tanto, la serie condensada es

$$(\log 2) \sum_{k \geq 2} \frac{k}{2^k}.$$

Esta última converge, por ejemplo, por el criterio del cociente, ya que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)/2^{k+1}}{k/2^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{2k} = \frac{1}{2} < 1.$$

En consecuencia, por el criterio de condensación de Cauchy, la serie es convergente.

Ejercicio 4

(2 puntos)

Sea $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = (\operatorname{tg} x)^2 - x \log(1+x), \quad x \in (-1, 1).$$

(I) (1 p.) Calcular el polinomio de Taylor de orden 3 de f centrado en $x = 0$.

(II) (1 p.) Evaluar el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3}.$$

Solución:

(I) Calculamos los desarrollos en serie de las funciones $\operatorname{tg} x$ y $\log(1+x)$ en $x = 0$:

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + R_3(x), \quad \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \tilde{R}_3(x).$$

Al elevar al cuadrado el primer desarrollo,

$$(\operatorname{tg} x)^2 = x^2 + \frac{x^6}{9} + R^3(x)^2 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{2}{3}x^3 R_3(x) + x R_3(x),$$

y, al multiplicar el segundo por x ,

$$x \log(1+x) = x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} + x \tilde{R}_3(x).$$

Teniendo en cuenta que $R_n(x) \sim x^{n+1}$, vemos inmediatamente que:

$$T_3[f, 0](x) = x^2 - \left(x^2 - \frac{x^3}{2}\right) = \frac{x^3}{2}.$$

(II) Por la fórmula infinitesimal del resto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^3 + R_3(x)}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

Ejercicio 5

(4 puntos)

Estudiar el carácter de la siguiente integral impropia y calcularla si es convergente:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}.$$

Solución: La integral es impropia tanto en 0 como en $+\infty$, así que la separamos, por ejemplo, en el punto 1:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}.$$

Podemos calcular una primitiva mediante el cambio de variable:

$$t = \sqrt{x}, \quad x = t^2, \quad dx = 2t dt.$$

Entonces

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = 2 \int \frac{dt}{1+t^2} = 2 \arctan t + C = 2 \arctan \sqrt{x} + C.$$

En consecuencia,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \frac{\pi}{2}, \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \frac{\pi}{2}.$$

Por tanto, la integral converge y vale

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Si no se ha podido calcular el valor numérico, aún es posible ver que la integral converge, ya que:

Para $x \sim 0$, $\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ y $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = [2\sqrt{x}]_0^1 = 2$.

Por otro lado, para $x \sim +\infty$, se tiene $\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} \sim \frac{1}{x^{3/2}}$ y $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}} = \left[\frac{-2}{x^{1/2}} \right]_1^{+\infty} = 2$.