

CÁLCULO I: GRADO EN ING. INFORMÁTICA 2025/26

VERSIÓN ADAPTADA CON SOLUCIONES

*Este examen es una **versión adaptada** del examen final planteada para resolverse en **90 minutos**. Consta de **3 ejercicios** y se entregará transcurridas **3 horas**. La puntuación máxima es de **14 puntos**.*

--	--	--	--

Apellidos:

Nombre:

Grupo: ☐ 111 Caterina Campagnolo ☐ 112 Sergio Cruz

Ejercicio 1

(4 puntos)

Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida como

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

- (a) Determinar el número de soluciones de la ecuación $f(x) = -3$ para $x \in (-\infty, 0)$.
- (b) Demostrar que la integral impropia $\int_0^1 f(x) dx$ es divergente.

Se considera la función $F : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \int_{1/x}^x \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

- (c) Calcular $F'(x)$.

Solución.

- (a) En primer lugar,

$$f'(x) = \left(\frac{e^{-x}}{x} \right)' = -\frac{e^{-x}(x+1)}{x^2}.$$

De aquí vemos fácilmente que $f'(x) < 0$ para todo $x \in (-\infty, -1)$ y $f'(x) > 0$ para $x \in (-1, 0)$. Por tanto, f es estrictamente creciente en $(-\infty, -1)$ y estrictamente decreciente en $(-1, 0)$. Además,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x} = -\infty, \quad f(-1) = -e, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-x}}{x} = -\infty.$$

Como $-3 < -e$, por continuidad e inyectividad hay exactamente una solución en $(-\infty, -1)$ y exactamente una solución en $(-1, 0)$. En total, hay **dos soluciones**.

- (b) Para $x \in (0, 1]$ se tiene $e^{-x} \geq e^{-1}$, luego

$$\frac{e^{-x}}{x} \geq \frac{e^{-1}}{x}.$$

Como $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ es divergente, por comparación también diverge $\int_0^1 f(x) dx$.

- (c) Usando la regla de Barrow, $F(x) = G(x) - G(\frac{1}{x})$, siendo G cualquier primitiva de f . Por tanto,

$$F'(x) = G'(x) + \frac{G'(1/x)}{x^2} = f(x) + \frac{f(1/x)}{x^2} = \frac{e^{-x}}{x} \cdot 1 - \frac{e^{-1/x}}{1/x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

Simplificando,

$$F'(x) = \frac{e^{-x}}{x} + \frac{e^{-1/x}}{x} = \frac{e^{-x} + e^{-1/x}}{x}, \quad x > 0.$$

Ejercicio 2

(6 puntos)

Se define la función $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$f(x) = x \sen 2x.$$

- (a) Calcular el polinomio de Taylor de orden 4 de f centrado en $a = 0$.
 (b) Evaluar el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2x^2}{x^4}.$$

- (c) Calcular el área geométrica (sin signo) encerrada entre la gráfica de f y el eje x .

Solución.

- (a) Desarrollamos $\sen 2x$ en $a = 0$ hasta orden 4:

$$\sen 2x = 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + O(x^5) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + R_4(x).$$

Multiplicando por x ,

$$f(x) = x \sen 2x = 2x^2 - \frac{4}{3}x^4 + xR_4(x).$$

Como $xR_4(x) = Cx^6$, el polinomio de Taylor de orden 4 es

$$P_4(x) = 2x^2 - \frac{4}{3}x^4.$$

- (b) Usando la expresión obtenida en el apartado anterior:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2x^2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{4}{3} + Cx^2\right) = -\frac{4}{3}.$$

- (c) Como $x \geq 0$ en $[0, \pi]$, el signo de $f(x) = x \sen 2x$ viene dado por el signo de $\sen 2x$. Así, $f \geq 0$ en $[0, \pi/2]$ y $f \leq 0$ en $[\pi/2, \pi]$. Por tanto, el área geométrica es

$$A = \int_0^{\pi/2} x \sen 2x \, dx - \int_{\pi/2}^{\pi} x \sen 2x \, dx.$$

Una primitiva es

$$\int x \sen 2x \, dx = -\frac{x \cos 2x}{2} + \frac{\sen 2x}{4}.$$

Por ello,

$$\int_0^{\pi/2} x \sen 2x \, dx = \frac{\pi}{4}, \quad \int_{\pi/2}^{\pi} x \sen 2x \, dx = -\frac{3\pi}{4}.$$

Luego

$$A = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \pi.$$

Ejercicio 3

(4 puntos)

Se considera la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definida por la ley de recurrencia

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3} \end{cases} \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

- (a) Demostrar por inducción que $1 \leq a_n \leq 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (b) Probar que $\{a_n\}$ es monótona creciente.
- (c) Justificar que $\{a_n\}$ es convergente y calcular su límite.

Solución.

- (a) Probamos por inducción que $1 \leq a_n \leq 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para $n = 1$, se tiene $a_1 = 1$, luego $1 \leq a_1 \leq 3$.

Supongamos ahora que $1 \leq a_n \leq 3$. Entonces

$$5 \leq 2a_n + 3 \leq 9.$$

Tomando raíces cuadradas,

$$\sqrt{5} \leq a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3} \leq 3.$$

En particular, como $\sqrt{5} \geq 1$, queda

$$1 \leq a_{n+1} \leq 3.$$

Por inducción, $1 \leq a_n \leq 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- (b) Usando el apartado anterior, $a_n \in [1, 3]$ para todo n . Queremos probar que $a_{n+1} \geq a_n$. Como ambos términos son no negativos, esto equivale a probar

$$\sqrt{2a_n + 3} \geq a_n \iff 2a_n + 3 \geq a_n^2.$$

Ahora bien,

$$2a_n + 3 - a_n^2 = -(a_n - 3)(a_n + 1).$$

Como $a_n \in [1, 3]$, se tiene $(a_n - 3)(a_n + 1) \leq 0$, y por tanto

$$2a_n + 3 - a_n^2 \geq 0.$$

Así, $a_{n+1} \geq a_n$ para todo n , luego $\{a_n\}$ es monótona creciente.

- (c) La sucesión es monótona creciente y está acotada superiormente por 3. Por el teorema de convergencia monótona, es convergente. Sea

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Pasando al límite en la ley de recurrencia,

$$L = \sqrt{2L + 3}.$$

Como $L \geq 0$, podemos elevar al cuadrado:

$$L^2 = 2L + 3, \quad L^2 - 2L - 3 = 0, \quad (L - 3)(L + 1) = 0.$$

Así, $L = 3$ o $L = -1$. Como $L \in [1, 3]$, necesariamente

$$L = 3.$$