CÁLCULO I: GRADO EN ING. INFORMÁTICA 2025/26

Este examen consta de dos partes:

El ***segundo examen parcial*** *consta de* ***4 ejercicios*** *y se entregará transcurridas* ***2 horas****. La puntuación máxima de esta parte es de* ***12 puntos****.* ***Esta parte es obligatoria para todos los alumnos.***

La ***segunda parte*** *del examen, junto con el segundo parcial, constituye el* ***examen final****. La duración máxima de la prueba conjunta es de* ***3 horas****. El examen final consta en total de* ***6 ejercicios*** *y tiene una puntuación máxima de* ***19 puntos****.* ***Esta parte es obligatoria para los alumnos cuya nota de evaluación continua de la primera parte del curso sea inferior a 4.***

Las respuestas deben redactarse en el espacio habilitado para ello.

En Madrid, a 16 de enero de 2026.

Apellidos: **Nombre:**

Grupo: ☐ 111 Caterina Campagnolo ☐ 112 Sergio Cruz

Ejercicio 1 *(2 puntos)*

Calcular el número exacto de soluciones de la ecuación $3\log x = x$ para $x > 0$.

Solución.

Consideramos

$$f(x) = 3\log x - x, \qquad x > 0.$$

Buscamos el número de ceros de f en $(0, +\infty)$. Derivando,

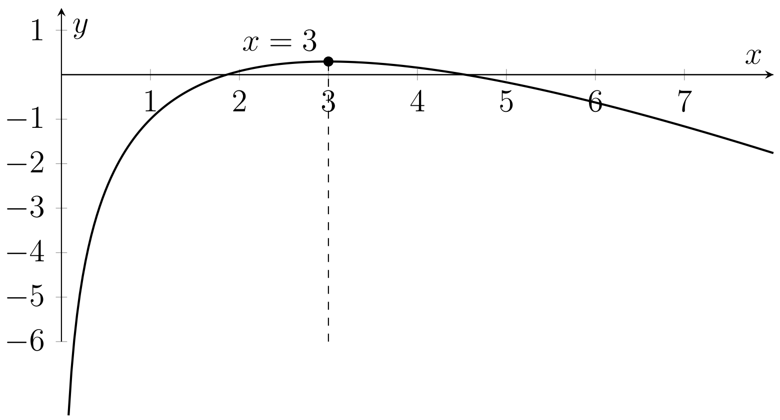
$$f'(x) = \frac{3}{x} - 1 = \frac{3-x}{x}.$$

Luego $f'(x) > 0$ si $0 < x < 3$ y $f'(x) < 0$ si $x > 3$, de modo que f es estrictamente creciente en $(0, 3)$, estrictamente decreciente en $(3, +\infty)$, y tiene un máximo global en $x = 3$. Por tanto, f es inyectiva en $(0, 3)$ y en $(3, +\infty)$ y solo puede haber, como máximo, una solución en cada intervalo.

Además,

$$f(3) = 3\log 3 - 3 > 0, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty.$$

(En este paso, es suficiente con encontrar un valor de f negativo a la izquierda de $x = 3$ y otro a la derecha.) Por continuidad, como f sube desde $-\infty$ hasta un valor positivo y luego baja hasta $-\infty$, la ecuación $f(x) = 0$ tiene exactamente **dos** soluciones en $(0, +\infty)$.



Alternativamente, puede usarse el teorema de Rolle para justificar que no hay más soluciones, ya que si hubiera otra existiría un punto $c \in (0, +\infty)$, $c \neq 3$, con $f'(c) = 0$, lo cual es imposible porque la derivada solo se anula en 3.

Ejercicio 2 *(3 puntos)*

Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^2 x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(i) Calcular el polinomio de Taylor de orden 4 de f centrado en $a = 0$.

(ii) Evaluar el límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^4}$$

Recuerda: $2 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} 2x$.

Solución

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^2 x$.

Para calcular el polinommio de Taylor de orden 4 de f no necesitamos siquiera hacer las derivadas de f. Sabemos que

$$\operatorname{sen}(0) = 0, \quad \operatorname{sen}'(0) = \cos(0) = 1, \quad \operatorname{sen}''(0) = -\operatorname{sen}(0) = 0, \quad \operatorname{sen}'''(0) = -\cos(0) = -1.$$

Por tanto,

$$T_3[\operatorname{sen}, 0](x) = x - \frac{x^3}{6}.$$

Entonces

$$T_4[x \operatorname{sen} x, 0] = x^2 - \frac{x^4}{6}, \quad \text{y} \quad T_4[\operatorname{sen}^2, 0] = x^2 - \frac{x^4}{3}.$$

Por tanto,

$$T_4[f, 0](x) = x^2 - \frac{x^4}{6} - x^2 + \frac{x^4}{3} = \frac{x^4}{6}.$$

Ahora, usando la fórmula infinitesimal del resto:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{6}x^4 + R_4(x)}{x^4} = \frac{1}{6}.$$

Alternativamente, puede usarse la regla de L'Hôpital 4 veces para llegar a la misma conclusión.

Ejercicio 3 *(3 puntos)*

Calcular el área geométrica (sin signo) encerrada entre las gráficas de las funciones $f, g\colon (0, e) \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) = \log x, \quad g(x) = -\log x, \quad \forall x \in (0, e)$$

Solución.

Los puntos de corte de f y g satisfacen $\log x = -\log x$, es decir $2\log x = 0$, luego $x = 1$.

En $(0, 1)$ se tiene $\log x < 0$, por tanto $g(x) = -\log x$ está por encima de $f(x) = \log x$. En $(1, e)$ ocurre lo contrario: $\log x > 0$ y entonces f está por encima de g.

Así, el área geométrica pedida es

$$A = \int_0^1 \Big(g(x) - f(x)\Big)\,dx + \int_1^e \Big(f(x) - g(x)\Big)\,dx = \int_0^1 \Big(-2\log x\Big)\,dx + \int_1^e \Big(2\log x\Big)\,dx.$$

Integrando por partes vemos que $x\log x - x$ es una primitiva de $\log x$, lo que nos da

$$\int_0^1 \log x\,dx = \Big[x\log x - x\Big]_0^1 = (-1) - \lim_{x\to 0^+} (x\log x - x) = -1,$$

donde hemos usado la escala de infinitos (o la regla de L'Hôpital) para ver que

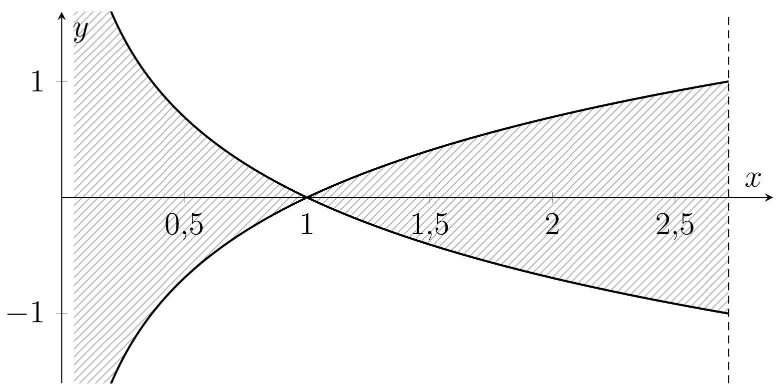
$$\lim_{x\to 0^+} x\log x = \lim_{x\to +\infty} \frac{-\log x}{x} = 0.$$

Además,

$$\int_1^e \log x\,dx = \Big[x\log x - x\Big]_1^e = (e\cdot 1 - e) - (0 - 1) = 1.$$

Por tanto,

$$A = -2\int_0^1 \log x\,dx + 2\int_1^e \log x\,dx = -2(-1) + 2(1) = 4.$$



Ejercicio 4 *(4 puntos)*

Sea $F\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$F(x) = \int_{1/x}^{x} \frac{e^{-t}}{t} dt, \quad \forall x > 0.$$

(i) Demostrar que, de las siguientes integrales impropias, la primera diverge a $+\infty$ y la segunda es convergente:

$$\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t} dt, \quad \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

(ii) Calcular F'.

(iii) Demostrar que F es creciente en $(0,+\infty)$ y calcular su imagen.

Solución.

(i) Para $t \in (0,1]$ se cumple $e^{-t} \geq e^{-1}$, luego

$$\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t}\, dt \ \geq\ \frac{1}{e}\int_0^1 \frac{dt}{t} = +\infty.$$

Por otro lado, para $t \geq 1$ se tiene $\frac{1}{t} \leq 1$, así que

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt \ \leq\ \int_1^{+\infty} e^{-t}\, dt = \Big[-e^{-t} \Big]_1^{+\infty} = \frac{1}{e} < +\infty.$$

Alternativamente, como $t \to \frac{e^{-t}}{t}$ es decreciente, podemos usar el criterio de la integral para series y considerar la serie

$$\sum_{n\geq 1} \frac{e^{-n}}{n}.$$

Aplicando el criterio del cociente:

$$\frac{e^{-n-1}}{n+1} \cdot \frac{n}{e^{-n}} \to \frac{1}{e} < 1,$$

luego la integral converge.

(ii) La función $t \to \frac{e^{-t}}{t}$ es continua en $(0,+\infty)$, luego admite una primitiva G. Por la regla de Barrow tenemos $F(x) = G(x) - G(1/x)$ y podemos derivar usando la regla de la cadena.

$$F'(x) = \frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-1/x}}{1/x}\Big(-\frac{1}{x^2}\Big) = \frac{e^{-x}}{x} + \frac{e^{-1/x}}{x} = \frac{e^{-x} + e^{-1/x}}{x}.$$

(iii) Para todo $x > 0$, $F'(x) = \frac{e^{-x}+e^{-1/x}}{x} > 0$, luego F es estrictamente creciente en $(0,+\infty)$.

Alternativamente, podemos ver que si $y > x$, entonces $1/y < 1/x$. Esto nos dice que $(\frac{1}{x}, x) \subset (\frac{1}{y}, y)$. Como el integrando es positivo, tenemos entonces $F(x) \leq F(y)$.

Como F es creciente en $(0,+\infty)$, su imagen empieza en $\lim_{x\to 0^+} F(x)$ y termina en $\lim_{x\to+\infty} F(x)$. Usando el apartado (i):

$$\lim_{x\to 0^+} F(x) = \int_{+\infty}^{0} \frac{e^{-t}}{t}\,dt = -\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt = -\infty.$$

$$\lim_{x\to +\infty} F(x) = \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt = +\infty.$$

Por tanto

$$F\Big((0,+\infty)\Big) = \mathbb{R}.$$

Apellidos: Nombre:

Grupo: ☐ 111 Caterina Campagnolo ☐ 112 Sergio Cruz

Ejercicio 5 *(2 puntos)*

Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$x \longmapsto \begin{cases} 7\,\mathrm{sen}(|x|) - 6 & \text{si } x \geq -\dfrac{\pi}{2}, \\ kx^2 & \text{si } x < -\dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

con $k \in \mathbb{R}$.

(i) Justificar que f es continua en $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{\pi}{2}\}$.

(ii) Encontrar el valor del parámetro k para que f sea continua en $x = -\frac{\pi}{2}$.

Solución

(i) En el intervalo $(-\infty, -\frac{\pi}{2})$ se tiene $f(x) = kx^2$, que es un polinomio, luego es continua por el carácter local de la continuidad. En el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, +\infty)$ se tiene $f(x) = 7\,\mathrm{sen}(|x|) - 6$, y como $x \mapsto |x|$ es continua en $\mathbb{R}$ y sen es continua, por composición $x \mapsto \mathrm{sen}(|x|)$ es continua, y por tanto también $7\,\mathrm{sen}(|x|) - 6$, de nuevo por el carácter local de la continuidad. Por tanto, f es continua en $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{\pi}{2}\}$.

(ii) La continuidad en $x = -\dfrac{\pi}{2}$ exige que

$$\lim_{x\to(-\pi/2)^-} f(x) = \lim_{x\to(-\pi/2)^+} f(x) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

Por la derecha,

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 7\,\mathrm{sen}\left(\left|-\frac{\pi}{2}\right|\right) - 6 = 7\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - 6 = 7 \cdot 1 - 6 = 1.$$

Por la izquierda,

$$\lim_{x\to(-\pi/2)^-} f(x) = \lim_{x\to(-\pi/2)^-} kx^2 = k\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{k\pi^2}{4}.$$

Igualando,

$$\frac{k\pi^2}{4} = 1 \quad\Longrightarrow\quad k = \frac{4}{\pi^2}.$$

Ejercicio 6 *(5 puntos)*

Se considera la sucesión $\{x_n\}$ definida mediante la siguiente ley de recurrencia:

$$\begin{aligned} x_1 &> 0, \\ x_2 &> x_1, \\ x_{n+1} &= 2x_n - x_{n-1} \qquad \text{para todo } n \geq 2. \end{aligned}$$

y se define

$$y_n = \frac{x_{n+1}}{x_n} \qquad \text{para todo } n \geq 1.$$

(i) Probar que $\{x_n\}$ es creciente y deducir que $y_n \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Comprobar que $y_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{y_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y demostrar que $\{y_n\}$ es decreciente.

(iii) Justificar que $\{y_n\}$ es convergente y calcular su límite.

Solución.

(i) Lo hacemos por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$. El caso base $x_2 > x_1$ es parte de las hipótesis del problema. Suponemos ahora que $x_{n+1} > x_n$, y veamos que entonces $x_{n+2} > x_{n+1}$:

$$x_{n+2} - x_{n+1} = 2x_{n+1} - x_n - x_{n+1} = x_{n+1} - x_n > 0.$$

Como $x_1 > 0$ y la sucesión es creciente, se tiene $x_n > 0$ para todo n.

Ahora bien, para todo $n \geq 1$,

$$y_n = \frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1 \quad \iff \quad x_{n+1} \geq x_n,$$

lo cual es cierto por la monotonía ya probada. Luego $y_n \geq 1$ para todo n.

(ii) Usando las definiciones de y_n y x_n:

$$y_{n+1} = \frac{x_{n+2}}{x_{n+1}} = \frac{2x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}} = 2 - \frac{x_n}{x_{n+1}} = 2 - \frac{1}{\frac{x_{n+1}}{x_n}} = 2 - \frac{1}{y_n},$$

para todo $n \geq 1$.

Para la monotonía, recordamos que $y_n \geq 1$, luego

$$y_{n+1} - y_n = \left(2 - \frac{1}{y_n}\right) - y_n = \frac{2y_n - 1 - y_n^2}{y_n} = -\frac{(y_n - 1)^2}{y_n} \leq 0.$$

Por tanto $y_{n+1} \leq y_n$ para todo n, es decir, $\{y_n\}$ es decreciente.

(iii) Justificar que $\{y_n\}$ es convergente y calcular su límite.

De (i) y (ii), $\{y_n\}$ es decreciente y está acotada inferiormente por 1; luego es convergente. Sea

$$\ell = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Pasando al límite en la fórmula anterior obtenemos

$$\ell = 2 - \frac{1}{\ell} \quad \iff \quad \ell^2 - 2\ell + 1 = 0 \quad \iff \quad (\ell - 1)^2 = 0 \quad \iff \quad \ell = 1.$$