

Notas de clase de Cálculo I

Sergio Cruz Blázquez sergio.cruz@uam.es

Tema 1: Los números reales

Comprender el conjunto de los números reales, su estructura y sus propiedades es el primer paso para hacer análisis matemático. Presentamos el conjunto sin dar una definición precisa de número real, pues lo importante no es tanto saber qué es un número real como conocer qué propiedades tiene el conjunto de los números reales.

Introduciremos este conjunto mediante una serie de axiomas, que son postulados que admitimos como ciertos y a partir de los cuales podemos deducir todas las demás propiedades.

Admitimos la existencia del conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, que junto con sus operaciones internas de suma y producto y su relación de orden es un cuerpo ordenado que verifica el axioma del continuo.

Que $\mathbb{R}$ sea un cuerpo significa que sus operaciones de suma y producto satisfacen las siguientes propiedades:

Para cualesquiera $x, y, z \in \mathbb{R}$, se cumplen:

(A₁) Asociatividad: $x + (y + z) = (x + y) + z$, $x(yz) = (xy)z$

(A₂) Conmutatividad: $x + y = y + x$, $xy = yx$

(A3) Distributividad: $x(y+z) = xy + xz$

(A4) Existencia de neutros: $x+0 = x$, $x \cdot 1 = x$.
Puede comprobarse que los neutros son únicos.

(A5) Existencia de elementos simétricos: $x+(-x) = 0$ (opuesto),
si $x \neq 0$, entonces $x \cdot 1/x = 1$ (inverso).

Por comodidad, denotamos $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$. Observamos que $x \cdot 0 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, por lo que 0 no tiene inverso: $1/0$ no tiene sentido.

Además de la suma y el producto, en $\mathbb{R}$ tenemos una tercera estructura que nos permite comparar números reales y trabajar con desigualdades. Para definir este orden, partimos de la existencia de un subconjunto de $\mathbb{R}$ denotado $\mathbb{R}^+$, cuyos elementos llamamos números positivos y que tiene estas dos propiedades:

(A6) Tricotomía: Para cada $x \in \mathbb{R}$, se verifica solo una de las siguientes tres afirmaciones: $x=0$, $x \in \mathbb{R}^+$, $-x \in \mathbb{R}^+$.

El conjunto $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} : -x \in \mathbb{R}^+\}$ es llamado conjunto de los números negativos.

(A7) Estabilidad Si $x, y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow xy, x+y \in \mathbb{R}^+$.

Definición Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Decimos que $x < y \Leftrightarrow y-x \in \mathbb{R}^+$, y $x \leq y \Leftrightarrow y-x \in \mathbb{R}^+ \text{ o } y=x$.

La relación de orden $\leq$ cumple las siguientes propiedades, que pueden deducirse a partir de (A6) y (A7):

Proposición Propiedades del orden de los números reales:

(i) Reflexiva: $x \leq x$

(ii) Antisimétrica: Si $x \leq y$ e $y \leq x \Rightarrow x = y$.

(iii) Transitiva: Si $x \leq y$ e $y \leq z \Rightarrow x \leq z$.

(iv) Orden total: Para $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow x \leq y$ o bien $y \leq x$

↑ Estas propiedades se resumen diciendo que $\mathbb{R}$ es un cuerpo ordenado.

(v) $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$ (vii) $x \leq y \Rightarrow -x \geq -y$

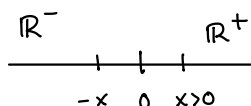
(vi) $x \leq y, z \geq 0 \Rightarrow xz \leq yz$ (viii) $0 < x \leq y \Rightarrow 1/x \geq 1/y$.

Proposición (Ejercicio) Si $x, y > 0$, entonces $x \leq y \Leftrightarrow x^2 \leq y^2$.

Ya tenemos las herramientas necesarias para hablar de la propiedad más importante de $\mathbb{R}$:

(A8) Axioma del continuo Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ subconjuntos no vacíos tales que $a \leq b \ \forall a \in A \ \forall b \in B$. Entonces existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x \leq b \ \forall a \in A \ \forall b \in B$.

Este postulado tiene una consecuencia muy intuitiva: entre dos números reales distintos cualesquiera siempre hay otro número real. Este hecho nos permite representar gráficamente $\mathbb{R}$ como una recta infinita continua.



Los números naturales. Usando las propiedades de la suma, podemos construir un subconjunto infinito de números reales, al que llamaremos los números naturales: $1 < 1+1 = 2 < 1+1+1 = 3 < \dots$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Nota: En realidad, para definir subconjuntos de $\mathbb{R}$ necesitamos también la axiomática de la teoría de conjuntos, pero esto se sale de los contenidos del curso.

El principio de inducción es un tipo de argumento que nos permite demostrar la validez de una fórmula o propiedad para todos los naturales a partir de uno en adelante.

Supongamos que queremos demostrar que una afirmación $P(n)$ es cierta para $n \geq n_0$. Lo hacemos en dos pasos:

- ① Caso base: Probamos que $P(n_0)$ es cierta.
- ② Paso inductivo: demostramos que si $P(n)$ fuese cierta para algún $n \geq n_0$ arbitrario, entonces lo sería también $P(n+1)$.

Ejemplo: Demostrar que $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Caso base: comprobamos la fórmula para $n=1$: $1 = \frac{1 \cdot 2}{2} \quad \checkmark$

Paso inductivo: Suponemos que la fórmula vale para $n \in \mathbb{N}$, y buscamos obtenerla para $n+1$.

$$\underbrace{1+2+\dots+n}_{\text{hipótesis}} + n+1 = \frac{n(n+1)}{2} + n+1 = (n+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad \checkmark$$

Uso la hipótesis de inducción

Nota: A veces, para demostrar $P(n+1)$ hacen falta $P(n)$ y $P(n-1)$. En tal caso, procedemos como sigue:

① Comprobamos $P(n)$ y $P(n+1)$ en la etapa base.

② Demostramos que $P(n+1)$ es verdad usando $P(n)$ y $P(n-1)$.

Comentamos una propiedad de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{N}$ que establece que en $\mathbb{R}$ no existe ningún elemento infinitamente pequeño o grande:

Proposición (Propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$) Si $\varepsilon > 0$ es cualquier número positivo, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ con $0 < 1/n < \varepsilon$. Equivalentemente, si $y \in \mathbb{R}$ y $x > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $y < nx$.

Recordamos a continuación otros subconjuntos notables de $\mathbb{R}$:

- Los números enteros $\mathbb{Z}$, obtenidos como los naturales, el 0 y sus opuestos:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

- Los números racionales $\mathbb{Q}$, formados como cocientes con numerador entero y denominador natural:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Mediante el algoritmo de la división, podemos identificar estos números con los números reales que tienen un desarrollo decimal finito o periódico.

- Irracionales: Números reales que no son racionales. En particular, tienen desarrollo decimal infinito no periódico: $\sqrt{2}$, π , e , $0.1010010001\dots$

Se denotan por $\mathbb{I}$ o $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

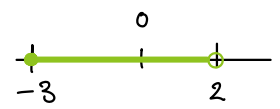
Una propiedad de la recta real es que por mucho que hagamos "zoom", siempre vemos infinitos racionales e infinitos irracionales.

Proposición: (Densidad de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ en $\mathbb{R}$). Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, existen infinitos racionales $q \in \mathbb{Q}$ tales que $a < q < b$, e infinitos irracionales r con $a < r < b$.

Hacemos un inciso para aprender a reconocer subconjuntos de números reales definidos a través de una fórmula:

Ejemplos $A = \underbrace{\left\{ (-1)^n \right\}}_{\text{Fórmula que depende de } n} : \underbrace{n \in \mathbb{N}}_{\text{Valores que toma } n} = \underbrace{\{ \dots, -2, 1, 0, -1, 2, \dots \}}_{n=-2}$

$B = \underbrace{\{ x \in \mathbb{R} : -3 \leq x < 2 \}}_{\text{valores de } x \text{ que satisfacen una condición}} = [-3, 2[$



Dado un $x \in \mathbb{R}$, el axioma de tricotomía garantiza que, entre x y $-x$, al menos uno es ≥ 0 . Llamamos a esta cantidad el valor absoluto de x :

Definición Sea $x \in \mathbb{R}$, definimos su valor absoluto como

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Intuitivamente, es el número que resulta de quitarle el signo a x .

Proposición (Propiedades básicas del valor absoluto)

(i) $-|x| \leq x \leq |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(ii) $|x| \geq 0$, y $|x| = 0$ si, y solamente si, $x = 0$.

(iii) $|xy| = |x| \cdot |y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$

(iv) (Desigualdad triangular) $|x \pm y| \leq |x| + |y|$, y la igualdad se da si y solo si x e y tienen el mismo signo o uno es cero.

(v) (Desigualdad triangular inversa) $||x| - |y|| \leq |x - y|$, con igualdad si y solo si x e y tienen el mismo signo o uno es cero.

Recordatorio: Cada $x > 0$ tiene dos raíces cuadradas, $\sqrt{x}$ y $-\sqrt{x}$, pero $\sqrt{x}$ SIEMPRE denota la raíz positiva. Ejemplo: $\sqrt{4} = 2$.

(vi) $\sqrt{x^2} = |x|$ (Ejemplo: $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$).

(vii) Si $y \geq 0$, $|x| \leq y \Leftrightarrow -y \leq x \leq y$.

(viii) Si $y > 0$, $|x| < y \Leftrightarrow -y < x < y$.

Geométricamente:

(i) $|x - y|$ representa la distancia entre x e y .

(ii) $\{x \in \mathbb{R} : |x - a| \leq r\} = [a - r, a + r]$

(iii) $\{x \in \mathbb{R} : |x - a| < r\} =]a - r, a + r[$.

↙ No necesariamente en A .

Definición Sea $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ (no vacío), y $x \in \mathbb{R}$. Decimos que x es un mayorante (resp. minorante) de A si $a \leq x$ (resp. $x \leq a$) para todo $a \in A$. En tal caso, decimos que A está mayorado (resp. minorado). Si A está mayorado y minorado, decimos que está acotado.

Definición Sea $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ y mayorado. Entonces existe $x \in \mathbb{R}$ tal que

(i) x es un mayorante de A (x es el menor mayorante).

(ii) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $a \in A$ tal que $x - \varepsilon \leq a \leq x$.

Llamamos a x el supremo de A , y lo denotamos por $x = \sup A$. Si $x \in A$, entonces decimos que es el máximo de A ($x = \max A$).

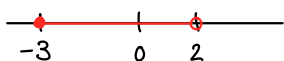
Definición Sea $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ y minorado. Entonces existe $x \in \mathbb{R}$, que llamamos ínfimo de A y denotamos por $x = \inf A$, tal que

(i) x es un minorante de A

(ii) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $a \in A$ tal que $x \leq a \leq x + \varepsilon$.

Si $\inf A \in A$, entonces se llama mínimo de A ($x = \min A$).

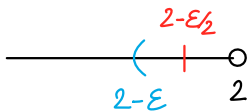
Ejemplo $A = [-3, 2[$



$\min A = -3$, ya que $-3 \leq a \quad \forall a \in A$ (por definición de intervalo) y $-3 \in A$ (si tenemos un minorante de A en A , entonces es un mínimo).

$\sup A = 2$. Por definición de intervalo, se tiene que $a \leq 2 \quad \forall a \in A$. Sea $\varepsilon > 0$. Necesitamos encontrar $a \in A$ tal que

$2 - \varepsilon \leq a \leq 2$



Podemos tomar $2 - \frac{\varepsilon}{2} = a$

Proposición Sea $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Si $\overline{x} \in A$ es una cota superior (resp. cota inferior) de A , entonces $\overline{x} = \max A$ (resp. $x = \min A$).

Ejemplo Sea $A = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N} \right\}$. Veamos que A es acotado y calculemos $\sup$ e $\inf$.

Por un lado, $0 < \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$, por lo que A está minorado e $\inf A \geq 0$.

Por otro lado, como se tiene $n \geq 1$ y $m \geq 1$, entonces $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq 2$, por lo que A está mayorado y $\sup A \leq 2$.

Dado que $2 \in A$ ($n=m=1$), entonces 2 es el máximo de A .

Veamos ahora que $\inf A = 0$. Sea $\varepsilon > 0$. Debemos encontrar $a \in A$ tal que

$$0 \leq a = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \varepsilon.$$

Por la propiedad arquimediana de $\mathbb{N}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{2}{\varepsilon}$, lo que nos da $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces, $a = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$ verifica

$$0 < a < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tema 2: Sucesiones de números reales

Intuitivamente, una sucesión de números reales es una lista ordenada de números reales indexada en los naturales:

$$\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\} = \{x_n\}_{n \geq 1}.$$

Notación.

Definición Una sucesión es una aplicación $S: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ $n \mapsto S(n) = x_n$. A menudo, identificamos la sucesión con su imagen $S(\mathbb{N})$, a la que denotamos $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ o $\{x_n\}$ si no hay lugar a confusión.

Si $\{x_n\}$ es una sucesión, llamamos al n -ésimo término x_n el término general de la sucesión, y nos permite reconstruir toda la sucesión. A veces, x_n vendrá dado mediante una fórmula recursiva.

Ejemplos:

$$(1) \{x_n\} = \left\{ \frac{n-1}{n+1} \right\} = \left\{ 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \dots \right\}$$

$$(2) x_1 = 1, x_n = \frac{1}{1+x_{n-1}} \quad n \geq 2 \quad \{x_n\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \dots \right\}$$

Definición Decimos que una sucesión $\{x_n\}$ está acotada cuando su imagen $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$. Equivalentemente, si existe $M > 0$ tal que

$$|x_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (M \text{ no depende de } n!)$$

Ejemplo $\{x_n\} = \left\{ 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right\} = \left\{ 0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \dots \right\}$ es una sucesión acotada, ya que $|x_n| = \left| 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right| \underset{\text{D.T.}}{\leq} 1 + \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = 1 + \frac{1}{n} \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Definición Sea $\{x_n\}$ una sucesión, y $L \in \mathbb{R}$. Decimos que $\{x_n\}$ converge a L si:

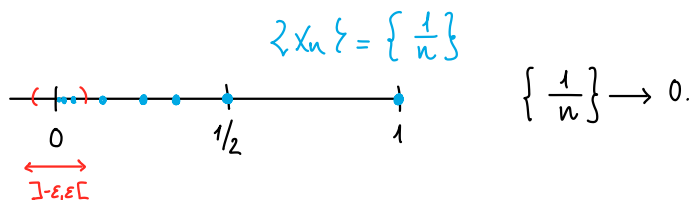
$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } [n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon]$$

En tal caso, se dice que L es el límite de $\{x_n\}$ y escribimos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = L, \text{ o bien } \{x_n\} \rightarrow L \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Nota: El límite de una sucesión, si existe, es único.

Interpretación gráfica: L es el límite de x_n si, por pequeño que tomemos un intervalo centrado en L ($]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$), encontramos un n_0 -ésimo de la sucesión $\{x_n\}$ tal que todos los términos a partir de x_{n_0} quedan dentro de $]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$.



Definición Decimos que $\{x_n\}$ es convergente cuando tiene un límite $L \in \mathbb{R}$.

En general en este curso no vamos a calcular límites por la definición, pero conviene tener ejemplos no triviales de sucesiones convergentes y no convergentes, que nos permitan estudiar una gama más amplia mediante las reglas de cálculo de límites que veremos más adelante.

Ejemplo: $\left\{ \frac{1}{n} \right\} \rightarrow 0.$

Sea un $\varepsilon > 0$ cualquiera. Para probar esto, debemos encontrar un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq n_0$, entonces $|1/n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow 1/n < \varepsilon$.

La propiedad arquimediana nos da un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > 1/\varepsilon$.

Por tanto, si $n \geq n_0 > 1/\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$, como buscábamos.

Ejemplo: La sucesión $\{n\}$ no es convergente.

Supongamos por reducción al absurdo que $\{n\} \rightarrow L$. Entonces, tomando $\varepsilon = 1$ encontramos un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq n_0$ entonces

$$|n - L| < 1 \Rightarrow n - L < 1 \Rightarrow n < 1 + L.$$

Esto contradice la propiedad arquimediana, así que lo que hemos supuesto es falso (que $\{n\}$ converge).

Proposición Si $\{x_n\}$ es convergente $\Rightarrow \{x_n\}$ está acotada

Definición Sea $s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ una sucesión y sea $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una aplicación estrictamente creciente, esto es,

para $n, m \in \mathbb{N}$ con $n < m$ se tiene $\sigma(n) < \sigma(m)$

entonces, llamamos a la sucesión $s \circ \sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ $n \mapsto s(\sigma(n))$ una subsucesión o sucesión parcial de s . Si $s = \{x_n\}$, entonces denotamos $s \circ \sigma = \{x_{\sigma(n)}\}$.

Ejemplos Las aplicaciones $n \mapsto 2n$ y $n \mapsto 2n-1$ son estrictamente crecientes, lo que nos da dos subsucesiones notables:

$\{x_{2n}\} \equiv$ subsucesión de los términos en posición par

$\{x_{2n-1}\} \equiv$ subsucesión de los términos en posición impar.

Proposición Si $\{x_n\} \rightarrow L$ y $\{x_{p(n)}\}$ es una subsucesión, entonces $\{x_{p(n)}\} \rightarrow L$.

Como consecuencia de este resultado y de la unicidad del límite, si existen dos sucesiones parciales tales que

$$\{x_{p_1(n)}\} \rightarrow L_1 \quad \{x_{p_2(n)}\} \rightarrow L_2 \quad \text{con } L_1 \neq L_2,$$

entonces $\{x_n\}$ no tiene límite.

Ejemplo: Sea $\{x_n\} = \{2 + (-1)^n\}$. Estudiamos las subsucesiones.

$$\left. \begin{aligned} \{x_{2n}\} &= \{2 + (-1)^{2n}\} = \{3\} \rightarrow 3 \\ \{x_{2n-1}\} &= \{2 + (-1)^{2n-1}\} = \{1\} \rightarrow 1 \end{aligned} \right\} \{x_n\} \text{ no tiene límite}$$

En general, no es cierto que la convergencia de varias parciales a un mismo límite implique que la sucesión original converja a dicho límite. Sin embargo, esto sí es cierto para las parciales de pares e impares:

Proposición $\{x_n\} \rightarrow L \Leftrightarrow [\{x_{2n}\} \rightarrow L \text{ y } \{x_{2n-1}\} \rightarrow L]$

Teorema: (Bolzano - Weierstrass) Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada. Entonces existe una subsucesión $\{x_{p(n)}\}$ convergente.

Recogemos en el siguiente resultado las propiedades básicas que tienen las operaciones con sucesiones convergentes:

Proposición Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones de números reales, y $L, L_1, L_2 \in \mathbb{R}$.

$$(1) \{x_n\} \rightarrow L \Leftrightarrow \{|x_n - L|\} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \{x_n - L\} \rightarrow 0.$$

$$(2) \text{ Si } \{x_n\} \rightarrow L \Rightarrow \{|x_n|\} \rightarrow |L|$$

Obsérvese que el recíproco de esta propiedad no es cierto: si tomamos

$\{x_n\} = \{(-1)^n\}$, podemos ver que $\{ |x_n| \} = \{ 1 \} \rightarrow 1$, mientras que $\{x_n\}$ no es convergente, ya que $\{x_{2n}\} \rightarrow 1$ y $\{x_{2n+1}\} \rightarrow -1$.

(3) Si $\{x_n\} \rightarrow L_1$ e $\{y_n\} \rightarrow L_2 \Rightarrow \{x_n + y_n\} \rightarrow L_1 + L_2$.

(4) Si $\{x_n\}$ está acotada e $\{y_n\} \rightarrow 0 \Rightarrow \{x_n y_n\} \rightarrow 0$.

Ejemplo $\left\{ \frac{\cos(n^2\pi)}{n} \right\} = \left\{ \cos(n^2\pi) \cdot \frac{1}{n} \right\}$.

Como $|\cos(n^2\pi)| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y $\left\{ \frac{1}{n} \right\} \rightarrow 0$, entonces la sucesión tiene límite 0.

(5) Si $\{x_n\} \rightarrow L_1$ e $\{y_n\} \rightarrow L_2$, entonces $\{x_n y_n\} \rightarrow L_1 L_2$.

(6) Si $\{y_n\} \rightarrow L_2$ y $\{x_n\} \rightarrow L_1 \neq 0$, entonces $\left\{ \frac{y_n}{x_n} \right\} \rightarrow \frac{L_2}{L_1}$.

Ejemplo Estudiar la convergencia de $\left\{ \frac{n^2 - n}{2 - n^2} \right\}$

Hemos visto que la sucesión $\{n\}$ no converge, por lo que, en principio, no podemos usar las reglas enumeradas anteriormente.

Para sortear el problema, dividimos numerador y denominador por n^2 :

$$\frac{n^2 - n}{2 - n^2} = \frac{1 - 1/n}{2/n^2 - 1} = \frac{1 - 1/n}{\frac{2}{n} \cdot \frac{2}{n} - 1} \rightarrow -1.$$

→ 1
→ -1

Nos centramos ahora en proporcionar resultados que nos permitan asegurar que una sucesión $\{x_n\}$ es convergente usando desigualdades.

El primero es el llamado Teorema del sándwich, que nos da

la convergencia de cualquier sucesión que pueda encajarse entre dos sucesiones convergentes con el mismo límite:

Proposición Sean $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ y $\{z_n\}$ sucesiones tales que $x_n \leq y_n \leq z_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Si $\{x_n\} \rightarrow L$ y $\{z_n\} \rightarrow L$, entonces también $\{y_n\} \rightarrow L$.

Ejemplo Sea $\{y_n\} = \left\{ \frac{(-1)^n n}{n^2+1} \right\}$. Vamos a usar el resultado anterior para demostrar que $\{y_n\} \rightarrow 0$. $n^2+1 \geq n^2$

Acotamos como sigue: $0 \leq |y_n| = \left| \frac{(-1)^n n}{n^2+1} \right| = \frac{n}{n^2+1} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$.

Por el criterio anterior con $\{x_n\} = \{0\}$ y $\{z_n\} = \left\{ \frac{1}{n} \right\}$, obtenemos que $\{y_n\} \rightarrow 0$. _____

Los comportamientos crecientes o decrecientes de las sucesiones también nos ayudarán a determinar si estas son convergentes.

Definición Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ es:

(i) Creciente si $x_n \leq x_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) Decreciente si $x_n \geq x_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) Monótona si es creciente o decreciente.

Teorema de la convergencia monótona: Toda sucesión monótona y acotada es convergente. Más precisamente,

- Si $\{x_n\}$ es creciente y mayorada, $\{x_n\} \rightarrow \sup \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$.
- Si $\{x_n\}$ es decreciente y minorada, $\{x_n\} \rightarrow \inf \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$.

Ejemplo Sea $\{a_n\}$ la sucesión definida por la ley de recurrencia

$$a_n = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$$

En primer lugar, comprobamos por inducción que $a_n < 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Para $n=1$ es claro: $1 < 2$. Si ahora suponemos que $a_n < 2$, entonces vemos que

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n} < \sqrt{4} = 2.$$

Claramente $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{a_n} < \sqrt{2}$

Ahora, veamos que es monótona creciente. Para ello, comprobamos que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Uso el paso anterior, $\sqrt{a_n} < \sqrt{2}$.

$$\text{En efecto, } a_{n+1}/a_n = \frac{\sqrt{2a_n}}{a_n} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a_n}} > \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

Como $\{a_n\}$ es creciente y mayorada, $\{a_n\} \rightarrow L$. Si tenemos en cuenta que $\{a_{n+1}\}$ es una subsucesión de $\{a_n\}$, y por tanto

$$\{a_{n+1}\} \rightarrow L,$$

Este paso es consecuencia de un resultado que veremos más adelante.

nos queda la identidad $L = \sqrt{2L} \Rightarrow L^2 = 2L \Rightarrow$

$$\begin{cases} L = 0 & \text{Imposible, ya que es creciente y } x_1 = 1 \\ L = 2 & \Rightarrow \text{única otra posibilidad.} \end{cases}$$

Entonces, $\{a_n\} \rightarrow 2$.

Hasta ahora, hemos probado una cadena de implicaciones:

Monótona y acotada $\xRightarrow{1}$ convergente $\xRightarrow{2}$ acotada $\xRightarrow{3}$ admite subsucesión convergente.

Podemos ver fácilmente que ninguna de las implicaciones es reversible:

① $\left\{ \frac{(-1)^n}{n} \right\}$ es convergente pero no es monótona

② $\{(-1)^n\}$ es acotada pero no convergente

③ $\{n(1-(-1)^n)\} = \{2, 0, 6, 0, 8, \dots\}$ no es acotada pero la subsucesión de los pares es convergente.

El teorema de la convergencia monótona nos proporciona más ejemplos de sucesiones convergentes.

Ejemplos (1) Sea $a \in \mathbb{R}$ con $|a| < 1$. La sucesión $\{ |a|^n \}$ es decreciente y mayorada, luego convergente, y se comprueba sin dificultad que su límite es 0.

(2) La sucesión $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ es creciente y mayorada, luego convergente. Llamamos a su límite "e". Este número real es irracional y verifica $2 < e < 3$ ($e = 2.71828\dots$)

Por otro lado, la sucesión $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ es también creciente y mayorada, y puede probarse que

$$\left\{ \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \right\} \rightarrow \frac{1}{e}$$

Ejemplo Estudiar la convergencia de la sucesión $\left\{ \left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{2n} \right\}$.

La idea es relacionar nuestra sucesión con una subsucesión de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ o $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$. Procedemos como sigue:

$$\frac{n-1}{n+2} = \frac{n+2-2-1}{n+2} = 1 - \frac{3}{n+2} = 1 - \frac{1}{\left(\frac{n+2}{3}\right)}$$

Entonces, $\left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{2n} = \left(\underbrace{\left(1 - \frac{1}{\frac{n+2}{3}}\right)^{\frac{n+2}{3}}}_{\substack{\text{sucesión parcial} \\ \text{de } (1-1/n)^n \rightarrow 1/e}} \right)^{\frac{3 \cdot 2n}{n+2}} \xrightarrow{\text{⊗}} \left(\frac{1}{e}\right)^6 = e^{-6}.$

⊗ Este paso es consecuencia de un resultado que veremos más adelante.

Pasamos ahora a profundizar en las sucesiones que no son convergentes, a las que llamaremos divergentes. Es menester señalar que en algunos textos, esta nomenclatura se reserva para un tipo concreto de sucesiones no convergentes, que son las que tienden a $+\infty$ o $-\infty$.

Definición Una sucesión $\{x_n\}$ se dice divergente si no es convergente.

Definición Sea $\{x_n\}$ una sucesión. Decimos que $\{x_n\}$:

- (i) diverge a $+\infty$ si para todo $K \in \mathbb{R}$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq n_0 \Rightarrow x_n > K$. En tal caso escribimos $\{x_n\} \rightarrow +\infty$.
- (ii) diverge a $-\infty$ si para todo $K \in \mathbb{R}$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq n_0 \Rightarrow x_n < K$. En tal caso escribimos $\{x_n\} \rightarrow -\infty$.

Claramente, $\{x_n\} \rightarrow -\infty \Leftrightarrow \{-x_n\} \rightarrow +\infty$, por lo que a menudo solo consideraremos uno de los dos casos.

Insistimos en que $+\infty$ y $-\infty$ son solo símbolos para indicar la dirección en la que una sucesión diverge. Escribir $\{x_n\} \rightarrow +\infty$ no significa que $\{x_n\}$ sea convergente ni que su límite sea $+\infty$. Por ello, debemos evitar expresiones como

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty,$$

que solo crean confusión.

Estudiamos ahora la relación que existe entre estas sucesiones y las que hemos visto anteriormente:

Proposición (Subsucesiones) Sea $\{x_n\}$ una sucesión y $\{x_{p(n)}\}$ una subsucesión.

Si $\{x_n\} \rightarrow +\infty \Rightarrow \{x_{p(n)}\} \rightarrow +\infty$.

Si $\{x_n\} \rightarrow -\infty \Rightarrow \{x_{p(n)}\} \rightarrow -\infty$.

Proposición (Monotonía) Si $\{x_n\}$ es creciente y no mayorada, entonces $\{x_n\} \rightarrow +\infty$. De igual forma, si $\{x_n\}$ es decreciente y no minorada, entonces $\{x_n\} \rightarrow -\infty$.

Ejemplo Sea $a > 1$. La sucesión $\{a^n\}$ es creciente y no está mayorada, por tanto $\{a^n\} \rightarrow +\infty$.

Si $a < 1$, entonces $\{|a^n|\} = \{|a|^n\} \rightarrow +\infty$, pero a^n no tiende a $+\infty$ ni a $-\infty$, pues oscila de signo. $\{(-2)^n\} = \{-2, 4, -8, 16, \dots\}$

Ejemplo La sucesión $\{\sqrt{n}\}$ es creciente y no está mayorada, por lo que $\{\sqrt{n}\} \rightarrow +\infty$.

• Creciente: como $n+1 > n$ y tanto $n+1$ como n son > 0 , entonces $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$ (Si $x, y > 0 \Rightarrow x \leq y \Leftrightarrow x^2 \leq y^2$)

• No mayorada: Si $\exists M \in \mathbb{R}: \sqrt{n} \leq M \Rightarrow n \leq M^2 \forall n \in \mathbb{N}$, que contradice la propiedad arquimediana.

El siguiente criterio permite deducir que una sucesión diverge a $\pm\infty$ comparándola con otra con el mismo comportamiento.

Proposición Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones con $x_n \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces:

(i) Si $\{x_n\} \rightarrow +\infty \Rightarrow \{y_n\} \rightarrow +\infty$

(ii) Si $\{y_n\} \rightarrow -\infty \Rightarrow \{x_n\} \rightarrow -\infty$.

Ejemplo Consideramos la sucesión

$$\{x_n\} = \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \right\} = \left\{ 1, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}, \dots \right\}$$

Si $k \leq n \Rightarrow \sqrt{k} \leq \sqrt{n} \Rightarrow 1/\sqrt{k} \geq 1/\sqrt{n}$. Entonces,

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} = n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

Como $\sqrt{n} \rightarrow +\infty$, entonces $\{x_n\} \rightarrow +\infty$. —

Finalmente, resumimos el álgebra de $\pm\infty$ en la siguiente proposición

Proposición Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones de números reales.

(i) Si $\{x_n\} \rightarrow +\infty$ e $\{y_n\}$ está minorada, entonces $\{x_n + y_n\} \rightarrow +\infty$.

(En particular, la segunda condición se cumple si $\{y_n\} \rightarrow L$ o $\{y_n\} \rightarrow +\infty$.)

(ii) Si $\{x_n\} \rightarrow -\infty$ e $\{y_n\}$ está mayorada $\Rightarrow \{x_n + y_n\} \rightarrow -\infty$

(En particular, si $\{y_n\} \rightarrow L$ o $\{y_n\} \rightarrow +\infty$).

Mayorada
lejos de 0

(iii) Si $\{x_n\} \rightarrow +\infty$ y existen $\alpha > 0$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que $y_n > \alpha > 0$ para $n \geq m$, entonces $\{x_n y_n\} \rightarrow +\infty$. (En particular, si $\{y_n\} \rightarrow L > 0$ o $\{y_n\} \rightarrow +\infty$)

(iv) Si $\{x_n\} \rightarrow -\infty$ y existen $\alpha > 0$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que $y_n > \alpha > 0$ para $n \geq m$, entonces $\{x_n y_n\} \rightarrow -\infty$. (En particular, si $\{y_n\} \rightarrow L > 0$ o $\{y_n\} \rightarrow +\infty$).

(v) Sea $\{x_n\} \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\{x_n\} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \left\{ \frac{1}{|x_n|} \right\} \rightarrow +\infty$$

Recogemos en las siguientes **tablas-resumen** los casos más frecuentes de los resultados de álgebra de límites comentados anteriormente.

Suma $x_n + y_n$

$\begin{array}{c} y_n \rightarrow \\ \swarrow x_n \searrow \end{array}$	$L_2 \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$L_1 \in \mathbb{R}$	$L_1 + L_2$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$[\infty - \infty]$
$-\infty$	$-\infty$	$[\infty - \infty]$	$-\infty$

Producto $x_n y_n$

$\begin{array}{c} y_n \rightarrow \\ \swarrow x_n \searrow \end{array}$	$L_2 \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$L_1 \neq 0$	$L_1 L_2$	0	$\text{sgn}(L_1) \infty$	$-\text{sgn}(L_1) \infty$
0	0	0	$[0 \cdot \infty]$	$[0 \cdot \infty]$
$+\infty$	$\text{sgn}(L_2) \infty$	$[0 \cdot \infty]$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\text{sgn}(L_2) \infty$	$[0 \cdot \infty]$	$-\infty$	$+\infty$

Cociente $y_n / x_n = \frac{1}{x_n} \cdot y_n$

$\begin{array}{c} y_n \rightarrow \\ \swarrow x_n \searrow \end{array}$	$L_2 \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$L_1 \neq 0$	L_2 / L_1	0	$+\infty$	$-\text{sgn}(L_1) \infty$
0	$+\infty$ (v.a.)	$[\frac{0}{0}]$	$+\infty$ (v.a.)	$+\infty$ (v.a.)
$+\infty$	0	0	$[\frac{\infty}{\infty}]$	$[\frac{\infty}{\infty}]$
$-\infty$	0	0	$[\frac{\infty}{\infty}]$	$[\frac{\infty}{\infty}]$

Notación

$$\text{sgn}: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{sgn } x = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

v.a. (en valor absoluto)

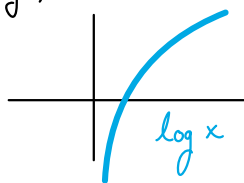
$$\left| \frac{y_n}{x_n} \right| \rightarrow +\infty.$$

Los casos señalados en rojo se conocen como indeterminaciones, que es un término que denota que no existe un criterio general que nos permita decidir el comportamiento de la sucesión.

Además de las presentadas anteriormente, existen otras que aparecen al considerar sucesiones de la forma $\{a_n b_n\}$. Para poder tratarlas, adelantamos una pequeña parte del temario de funciones reales:

El **logaritmo** es la función $\log: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ que verifica

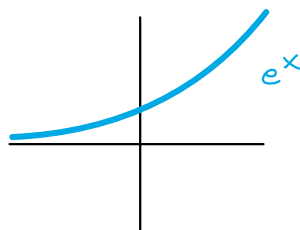
- es estrictamente creciente (si $0 < x < y \Rightarrow \log x < \log y$)
- $\log(xy) = \log x + \log y \quad \forall x, y > 0$
- $\log 1 = 0$, $\log e = 1$



- Si $\{x_n\} \rightarrow L > 0 \Rightarrow \log(x_n) \rightarrow \log L$
- Si $\{x_n\} \rightarrow +\infty \Rightarrow \log(x_n) \rightarrow +\infty$
- Si $x_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ y $\{x_n\} \rightarrow 0 \Rightarrow \log(x_n) \rightarrow -\infty$

La **exponencial** es la aplicación $e^{\square} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ que verifica

- es estrictamente creciente (si $x < y \Rightarrow e^x < e^y$).
- $e^{x+y} = e^x e^y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
- $e^0 = 1, e^1 = e$
- Si $\{x_n\} \rightarrow L \Rightarrow e^{x_n} \rightarrow e^L$
- Si $\{x_n\} \rightarrow +\infty \Rightarrow e^{x_n} \rightarrow +\infty$
- Si $\{x_n\} \rightarrow -\infty \Rightarrow e^{x_n} \rightarrow 0$.



La exponencial y el logaritmo son inversas la una de la otra, esto es,

$$e^{\log x} = x \quad \forall x > 0, \quad \log e^y = y \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Definición Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a > 0$. Se define la potencia de base a y exponente b como

$$a^b = e^{b \log a}$$

El siguiente resultado nos permite resolver indeterminaciones de los tipos anteriores que involucran exponenciales y logaritmos:

Teorema (Escala de infinitos) Sea $\alpha > 0$. Entonces

$$(i) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log n}{n^\alpha} = 0 \quad (ii) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{e^n} = 0.$$

Cabe resaltar que no importa cuán grande o pequeño sea el valor

de $\alpha > 0$; cualquier potencia positiva de n "domina" al $\log n$, así como la exponencial domina a cualquier potencia de n .

Ejemplo Consideramos la sucesión $\left\{ \frac{n^2 \log n}{1 + n^3 + n^4 2^{-n}} \right\} = \{x_n\}$

Identificamos n^3 como el término dominante, y dividimos numerador y denominador por este:

$$\frac{n^2 \log n}{1 + n^3 + n^4 2^{-n}} = \frac{\frac{\log n}{n}}{\frac{1}{n^3} + 1 + n 2^{-n}}$$

Usando la escala de infinitos sabemos que $\frac{\log n}{n} \rightarrow 0$ y que $n 2^{-n} = \frac{n}{2^n} \rightarrow 0$. Por tanto, $\{x_n\} \rightarrow 0$

Teorema (equivalencia logarítmica) Sea $\{x_n\}$ una sucesión tal que $x_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ y $\{x_n\} \rightarrow 1$, y sea $\{y_n\}$ otra sucesión. Entonces,

- $y_n(x_n - 1) \rightarrow L \Leftrightarrow x_n^{y_n} \rightarrow e^L$
- $y_n(x_n - 1) \rightarrow +\infty \Leftrightarrow x_n^{y_n} \rightarrow +\infty$
- $y_n(x_n - 1) \rightarrow -\infty \Leftrightarrow x_n^{y_n} \rightarrow 0$

La sucesión $y_n(x_n - 1)$ juega el papel del exponente.

Ejemplo Consideramos la sucesión $\left\{ \left(\frac{3^n}{3^n + 2^n} \right)^{\left(\frac{3}{2}\right)^n} \right\}$.

Es fácil ver que

$$\frac{3^n}{3^n + 2^n} = \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n} \rightarrow 1,$$

por lo que tenemos una indeterminación del tipo $[1^\infty]$. Estudiamos la sucesión

$$\frac{3^n}{2^n} \left(\frac{3^n}{3^n + 2^n} - 1 \right) = \frac{3^n}{2^n} \cdot \frac{3^n - 3^n - 2^n}{3^n + 2^n} = \frac{-6^n}{6^n + 4^n} \rightarrow -1$$

Por equivalencia logarítmica, $\left\{ \left(\frac{3^n}{3^n + 2^n} \right)^{\left(\frac{3}{2}\right)^n} \right\} \rightarrow \frac{1}{e}$

Teorema (Criterio de la raíz para sucesiones) Sea $x_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

- Si $\left\{ \frac{x_{n+1}}{x_n} \right\} \rightarrow L \Rightarrow \left\{ \sqrt[n]{x_n} \right\} \rightarrow L$
- Si $\left\{ \frac{x_{n+1}}{x_n} \right\} \rightarrow +\infty \Rightarrow \left\{ \sqrt[n]{x_n} \right\} \rightarrow +\infty$.

Ejemplo Probamos que la sucesión $\left\{ (n!)^{1/n} \right\} \rightarrow +\infty$.

Tenemos $x_n = \sqrt[n]{a_n}$, con $a_n = n! \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{k=1}^n k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$.

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{(n+1)n!}{n!} = (n+1) \rightarrow +\infty$. Entonces, lo mismo le ocurre a $(n!)^{1/n}$ por el criterio de la raíz.

Tema 3: Series de números reales

Al estudiar una sucesión de números reales $\{x_n\}$ surge de forma natural una nueva idea, la de sumar todos sus términos. Para ello, podemos considerar sumas finitas sucesivas:

$$x_1, \quad x_1 + x_2, \quad x_1 + x_2 + x_3, \dots$$

Si esta nueva sucesión es convergente, es plausible interpretar su límite como la suma infinita de los términos de x_n .

Definición Dada una sucesión $\{x_n\}$, llamamos serie de término general $\{x_n\}$ a la sucesión de sumas parciales

$$\{S_n\} = \left\{ \sum_{k=1}^n x_k \right\},$$

y la denotaremos simplemente $\sum_{n \geq 1} x_n$.

Con esta definición queda claro que las series no son un objeto nuevo, son sucesiones cuyo término general se obtiene sumando los términos de otra sucesión. Por tanto, todas las nociones de sucesiones (convergencia, monotonía, ...) se trasladan de forma automática a este contexto.

Definición Decimos que una serie $\sum_{n \geq 1} x_n$ es convergente cuando $\{S_n\}$ lo es como sucesión. En tal caso, llamamos a su límite la suma de la serie y lo denotamos por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

Cuando estudiamos una serie, estamos considerando dos sucesiones, así que conviene fijar una notación que aclare a cuál nos referimos en cada momento.

$$\sum_{n \geq 1} x_n = \left\{ \sum_{k=1}^n x_k \right\}$$

Sumas parciales de la serie

Término general de la serie

Para $n \in \mathbb{N}$, a x_n lo llamaremos n -ésimo término de la serie, y diremos que $\sum_{k=1}^n x_k$ es la n -ésima suma parcial de la serie.

Si $\sum_{n \geq 1} x_n$ es convergente, llamamos a su límite la suma de la serie para diferenciarlo del posible límite de $\{x_n\}$, del que hablaremos enseguida.

Ejemplo: Si decimos que $\sum_{n \geq 1} x_n$ es una serie de términos no negativos, significa que $x_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. En particular, $\sum_{n \geq 1} x_n$ es una sucesión creciente.

Queda claro por tanto que toda serie es, por definición, una sucesión, pero el recíproco también es cierto: toda sucesión puede escribirse como una serie. Por tanto, series y sucesiones son dos puntos de vista diferentes para estudiar el mismo concepto matemático.

Sea $\{y_n\}$ una sucesión, y aceptemos por convenio que $y_0 = 0$. Definimos entonces

$$x_n = y_n - y_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Entonces, podemos ver que $\sum_{n \geq 1} x_n = \{y_n\}$. En efecto, dado $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n y_k - y_{k-1} = \\ &= \cancel{y_1} + (y_2 - \cancel{y_1}) + (\cancel{y_2} - y_3) + \dots + y_n - \cancel{y_{n-1}} = y_n. \end{aligned}$$

Merece la pena dar un nombre a las series que se reducen a estudiar una única sucesión del tipo que acabamos ver:

Definición Diremos que una serie $\sum_{n \geq 1} x_n$ es telescópica si su término general puede escribirse de la forma

$$x_n = y_{n+1} - y_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

para alguna sucesión $\{y_n\}$. Entonces, el estudio de $\sum_{n \geq 1} x_n$ equivale al de $\{y_{n+1} - y_n\}$.

Ejemplo La serie de Mengoli es $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$.

Podemos ver fácilmente que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = -\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)$, por lo que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = - \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right)$$

llamando $y_n = \frac{1}{n}$, tenemos $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = - \sum_{n \geq 1} (y_{n+1} - y_n)$

$$= -((y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + \dots + (y_{n+1} - y_n)) = y_1 - y_{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Como $\left\{1 - \frac{1}{n+1}\right\} \rightarrow 1$, la serie es convergente y su suma es 1. —

Si bien series y sucesiones son conceptos equivalentes, muchas de las sucesiones más importantes que aparecerán en análisis matemático vendrán en forma de series para las cuales no hay una forma cómoda de dar una fórmula explícita para sus sumas parciales.

Por tanto, debemos priorizar el obtener información sobre $\sum_{n \geq 1} x_n$ a partir de su término general $\{x_n\}$. Un primer hecho básico es que $\sum_{n \geq 1} x_n$ no puede ser convergente si $\{x_n\} \not\rightarrow 0$:

Proposición Si $\sum_{n \geq 1} x_n$ es convergente $\Rightarrow \{x_n\} \rightarrow 0$.

La pregunta sobre si el recíproco es cierto plantea un problema sobre sucesiones que no habríamos considerado de no adoptar el punto de vista de las series:

¿Si $\{y_{n+1} - y_n\} \rightarrow 0$, entonces $\{y_n\}$ converge?

La respuesta es negativa en ambos casos: que $\{x_n\} \rightarrow 0$ NO ES SUFICIENTE para afirmar que $\sum_{n \geq 1} x_n$ converge.

Ejemplo La serie armónica $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge positivamente.

Como $0 < \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N}$, la serie es creciente, por lo que basta ver que no está mayorada. Para ello, demostramos por inducción que

$$S_{2^n} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{n}{2}$$

Para $n=1$ es claro: $1 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}$. Supongamos ahora que la

Desigualdad es cierta para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$S_{2^{n+1}} = \sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{n}{2} + \underbrace{(2 \cdot 2^n - 2^n)}_{\text{Cantidad de sumandos}} \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$= 1 + \frac{n}{2} + 2^n \frac{1}{2^{n+1}} = 1 + \frac{n+1}{2}$$

Sumando más pequeño. ↙

A veces, puede interesarnos que una serie empiece en $n=0$. Denotamos por $\sum_{n \geq 0} x_n$ a la serie cuyas sumas parciales vienen dadas por:

$$\hat{S}_n = \sum_{k=0}^n x_k = \sum_{k=1}^n x_{k-1} \Rightarrow \sum_{n \geq 0} x_n = \sum_{n \geq 1} x_{n-1}$$

Sumamos n términos ↙

Además, si S_n son las sumas parciales de $\sum_{n \geq 1} x_n$, se comprueba sin dificultad que

$$\hat{S}_{n+1} = x_0 + S_n,$$

de donde sigue que la convergencia de $\sum_{n \geq 0} x_n$ equivale a la de $\sum_{n \geq 1} x_n$ y, si son convergentes, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

De igual manera, podemos considerar series que empiezan en valores mayores que 1. Si $p \in \mathbb{N}$, entonces definimos

$$\sum_{n \geq p+1} x_n \stackrel{\text{def.}}{=} \left\{ \sum_{k=p+1}^{n+p} x_k \right\} = \left\{ \sum_{k=1}^n x_{k+p} \right\} = \sum_{n \geq 1} x_{n+p}.$$

Ejemplo Usando la fórmula anterior para $p=2$, vemos que

$$\sum_{n \geq 3} \frac{1}{(n-1)(n-2)} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n-1)} \quad (\text{serie de Mengoli})$$

Definición Dado $a \in \mathbb{R}$, la serie geométrica de razón a es la serie

$$\sum_{n \geq 0} a^n = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots$$

Como $2a^n \rightarrow 0 \Leftrightarrow |a| < 1$, esta es una condición necesaria para que la serie sea convergente. Vemos que también es suficiente:

Ejemplo: Si $|a| < 1$, $\sum_{n \geq 0} a^n$ es convergente y $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$.

Para $a \neq 1$, tenemos:

$$(1-a)(1+a+a^2+\dots+a^n) = 1-a+a-a^2+a^2-\dots-a^{n+1} = 1-a^{n+1}$$

$$\text{Entonces } \sum_{k=0}^n a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \longrightarrow \frac{1}{1-a}, \text{ al ser } |a| < 1.$$

Una sencilla consecuencia del álgebra de sucesiones convergentes nos permite ampliar nuestro catálogo de series convergentes.

Proposición Si $\sum_{n \geq 1} x_n$ y $\sum_{n \geq 1} y_n$ son convergentes y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces $\sum_{n \geq 1} (\alpha x_n + \beta y_n)$ es convergente y $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} y_n$

Ejemplo: Probar que $\sum_{n \geq 1} \frac{2^{n-1} + 3^{n+1}}{5^n}$ es convergente y calcular su suma.

Reescribimos el término general: $\frac{2^{n-1} + 3^{n+1}}{5^n} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^n + 3 \left(\frac{3}{5}\right)^n$

$$\sum_{n \geq 1} \frac{2^{n-1} + 3^{n+1}}{5^n} = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{2}{5}\right)^n + 3 \sum_{n \geq 1} \left(\frac{3}{5}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} + 3 \sum_{n \geq 0} \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} = \frac{1}{5} \underbrace{\sum_{n \geq 0} \left(\frac{2}{5}\right)^n}_{\text{convergente}} + \frac{9}{5} \underbrace{\sum_{n \geq 0} \left(\frac{3}{5}\right)^n}_{\text{convergente}}$$

La serie por tanto es convergente y su suma vale

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} + 3^{n+1}}{5^n} = \frac{1}{5} \frac{1}{1 - (\frac{2}{5})} + \frac{9}{5} \frac{1}{1 - (\frac{3}{5})} = \frac{29}{6}.$$

Criterios de convergencia para series de términos no negativos

En esta sección trabajaremos con series $\sum_{n \geq 1} a_n$ con $a_n \geq 0$. Este tipo de series son crecientes, ya que sus sumas parciales S_n verifican

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n.$$

Por tanto, será convergente o divergirá a $+\infty$ dependiendo de si está mayorada o no:

$$(a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}) \quad \sum_{n \geq 1} a_n \text{ converge} \Leftrightarrow \left\{ \sum_{k=1}^n a_k \right\} \text{ está mayorada.}$$

Por tanto, de la convergencia de una serie podemos deducir la de muchas otras a las que esta mayorada.

Criterio de comparación: Sean $\sum_{n \geq 1} a_n$ y $\sum_{n \geq 1} b_n$ dos series con $a_n, b_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $\exists p \in \mathbb{N}$: $a_n \leq b_n \forall n \geq p$. Entonces:

$$\sum_{n \geq 1} b_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n \geq 1} a_n \text{ converge.}$$

De este criterio puede deducirse en la práctica no mucho más útil

Criterio de comparación por paso al límite Sean $\sum_{n \geq 1} a_n$ y $\sum_{n \geq 1} b_n$ dos series con $a_n \geq 0$ y $b_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$. Supongamos que

$$\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\} \rightarrow L \geq 0$$

(i) Si $L > 0$, entonces $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge $\Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} b_n$ converge

(ii) Si $L = 0$ y $\sum_{n \geq 1} b_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n \geq 1} a_n$ converge.

Ejemplo $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{n^2 + 3n + 4}$. Vamos a compararla con la serie armónica $\sum_{n \geq 1} 1/n$.

Si $a_n = \frac{n}{n^2 + 3n + 4}$ y $b_n = \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{n}{n^2 + 3n + 4}}{\frac{1}{n}} = \frac{n^2}{n^2 + 3n + 4} \quad (\rightarrow 1)$$

Entonces, $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge $\Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} 1/n$ converge, por lo que no es convergente.

Nota: Que la convergencia de dos sucesiones sea equivalente no significa que tengan la misma suma. Por ejemplo,

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \text{ converge } \Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)} \text{ converge, ya que } \left\{ \frac{1/(n+1)}{1/n^2} \right\} \rightarrow 1,$$

$$\text{pero } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (\text{Se necesitan herramientas más avanzadas para probar esto}).$$

Ejemplo La serie $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^p}$ converge para $p \in \mathbb{R}, p \geq 2$.

El caso $p=2$ acabamos de verlo. Si $p \geq 2$, entonces $n^p \geq n^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego

$$\frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

y podemos usar el primer criterio de comparación.

Teorema (Criterio de la raíz para series). Sea $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y supongamos que $\{\sqrt[n]{a_n}\} \rightarrow L \geq 0$.

- (1) Si $L > 1$, entonces $\{a_n\} \not\rightarrow 0$ y la serie $\sum_{n \geq 1} a_n$ diverge a $+\infty$.
- (2) Si $L < 1$, entonces la serie $\sum_{n \geq 1} a_n$ es convergente

Ejemplo: $\sum_{n \geq 1} \frac{2^n (n^2+1)}{n^n}$. Llamamos $a_n = \frac{2^n (n^2+1)}{n^n}$.

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{2 \sqrt[n]{n^2+1}}{n} = \frac{2}{n} \sqrt[n]{n^2+1}.$$

Podemos usar el criterio de la raíz para sucesiones para estudiar $\{\sqrt[n]{n^2+1}\}$:

Sea $x_n = n^2 + 1$. $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^2 + 1}{n^2 + 1} \rightarrow 1$, luego $\{\sqrt[n]{n^2+1}\} \rightarrow 1$

Como $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow 0$, el criterio de la raíz (para series) nos dice que la serie $\sum_{n \geq 1} a_n$ es convergente

Observación importante: Si $L=1$, el criterio no decide. Por ejemplo:

$$\left\{ \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} \right\} \rightarrow 1 \quad \text{y} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \text{ converge}$$

$$\left\{ \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \right\} \rightarrow 1 \quad \text{y} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \rightarrow +\infty$$

Teorema (Criterio del cociente o de D'Alembert) Sea $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y supongamos que $\left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\} \rightarrow L \geq 0$

(i) Si $L > 1$, entonces $a_n \not\rightarrow 0$, luego la serie diverge.

(ii) Si $L < 1$, entonces la serie $\sum_{n \geq 1} a_n$ es convergente.

Ejemplo (Hoja 3-6d) $\sum_{n \geq 1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ Sea $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{((n+1)!)^2 (2n)!}{(2n+2)! (n!)^2} = \frac{(n+1)! (n+1)! (2n)!}{(2n+2)(2n+1) 2n! n! n!} = \frac{(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} \\ &= \frac{n^2 + 2n + 1}{4n^2 + 6n + 2} \rightarrow \frac{1}{4}, \text{ luego la serie converge.} \end{aligned}$$

Los criterios de la raíz y el cociente pueden parecerse equivalentes, pero no es difícil ver que el criterio de la raíz permite decidir casos en los que el criterio del cociente no lo hace:

Ejemplo $\sum_{n \geq 1} a_n$ con $a_n = \frac{3 + (-1)^n}{2^n}$.

Usando el criterio del cociente:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(3 + (-1)^{n+1}) 2^n}{2^{n+1} (3 + (-1)^n)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3 + (-1)^{n+1}}{3 + (-1)^n}$$

$\begin{matrix} \nearrow \text{Pares} & 1/4 \\ \searrow \text{Impares} & 1 \end{matrix} \left. \vphantom{\frac{1}{2}} \right\} \text{No puede aplicarse el criterio.}$

Usando el de la raíz:

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} \sqrt[n]{3 + (-1)^n}$$

$\begin{matrix} \nearrow \text{Pares} & \frac{1}{2} \sqrt[4]{4} \rightarrow 1/2 \\ \searrow \text{Impares} & \frac{1}{2} \sqrt[2]{2} \rightarrow 1/2 \end{matrix} \left. \vphantom{\frac{1}{2}} \right\} \text{la serie converge.}$

Teorema (Criterio de condensación o de Cauchy) Sea $\{a_n\}$ una sucesión decreciente con $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\sum_{n \geq 1} a_n \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} 2^n a_{2^n} \text{ converge}$$

Ejemplo Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. La serie $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

Si $\alpha \leq 0$, el término general no converge a 0, por lo que la serie no es convergente.

Sea por tanto $\alpha > 0$. La sucesión $\left\{ \frac{1}{n^\alpha} \right\}$ es decreciente, ya que:

$$n^\alpha = e^{\alpha \log n} < e^{\alpha \log(n+1)} = (n+1)^\alpha \Rightarrow \frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{(n+1)^\alpha}$$

Entonces podemos estudiar $\sum_{n \geq 0} 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha} = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}} \right)^n$. Esta es

la serie geométrica de razón $1/2^{\alpha-1}$, que converge cuando

$$\frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$$

$$\frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1 \Leftrightarrow 1 < 2^{\alpha-1} \Leftrightarrow 0 < \alpha-1 \Leftrightarrow \alpha > 1$$

Criterios de convergencia para series de signo variable

Pasamos ahora al caso general de una serie $\sum_{n \geq 1} x_n$ con $x_n \in \mathbb{R}$. Diremos que la serie es de signo variable cuando existan infinitos términos positivos e infinitos negativos.

- Si hay un número finito de términos negativos, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \geq 0 \quad \forall n \geq m$. Sabemos que la convergencia de $\sum_{n \geq 1} x_n$ equivale a la de

$$\sum_{n \geq m} x_n,$$

que es de términos no negativos, luego podemos usar los criterios ya vistos.

- Si hay un número finito de términos positivos, entonces consideramos

$$\sum_{n \geq 1} (-x_n),$$

cuya convergencia es equivalente a la de $\sum_{n \geq 1} x_n$, y se encuentra en las condiciones del punto anterior.

Cuando $\sum_{n \geq 1} x_n$ es de signo variable, resulta natural compararla con $\sum_{n \geq 1} |x_n|$, lo que nos lleva a la siguiente noción:

Definición Decimos que una serie $\sum_{n \geq 1} x_n$ es absolutamente convergente cuando $\sum_{n \geq 1} |x_n|$ es convergente.

Teorema Toda serie absolutamente convergente es convergente. Más aún, si $\sum_{n \geq 1} |x_n|$ converge entonces $\sum_{n \geq 1} x_n$ converge y:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$$

El recíproco no es cierto, y para dar numerosos ejemplos de series que convergen pero no lo hacen absolutamente, introducimos las series alternadas y el criterio de Leibniz:

Definición Llamamos serie alternada a cualquier serie de la forma

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^n a_n \quad \text{o} \quad \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} a_n,$$

donde $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Teorema (Criterio de Leibniz) Sea $\{a_n\}$ una sucesión sucesión decreciente con $\{a_n\} \rightarrow 0$. Entonces la serie alternada

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^n a_n$$

converge.

Ejemplo La sucesión $\{\frac{1}{n}\}$ es decreciente y $\{\frac{1}{n}\} \rightarrow 0$, por lo que la serie armónica alternada

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$$

es convergente. Sin embargo, no es absolutamente convergente, ya que

$$\sum_{n \geq 1} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$$

es divergente.

Ejemplo $\sum_{n \geq 1} \frac{(-2)^n}{(-3)^n + n^2}$. Sea $x_n = \frac{(-2)^n}{(-3)^n + n^2}$ para $n \in \mathbb{N}$.

Estudiamos

$$\sum_{n \geq 1} |x_n| = \sum_{n \geq 1} \frac{2^n}{|(-3)^n + n^2|}.$$

Se tiene:

$$\frac{2^n}{|(-3)^n + n^2|} \leq \frac{2^n}{|(-3)^n| - n^2} = \frac{2^n}{3^n - n^2}$$

Veamos que $\sum_{n \geq 1} \frac{2^n}{3^n - n^2}$ es convergente usando, por ejemplo, el criterio del cociente:

$$\frac{2^{n+1}}{3^{n+1} - (n+1)^2} \cdot \frac{3^n - n^2}{2^n} = \frac{2(3^n - n^2)}{3^{n+1} - (n+1)^2} = \frac{2\left(1 - \frac{n^2}{3^n}\right)}{3\left(1 - \frac{(n+1)^2}{3^n}\right)} \longrightarrow \frac{2}{3} < 1.$$

Por tanto, $\sum_{n \geq 1} \frac{2^n}{3^n - n^2}$ es convergente. Por comparación, también lo es $\sum_{n \geq 1} |x_n|$, lo cual significa que $\sum_{n \geq 1} x_n$ es absolutamente convergente $\Rightarrow \sum_{n \geq 1} x_n$ converge.

Curiosidad: convergencia incondicional

Volvemos a la pregunta que nos hicimos al principio: si $\sum_{n \geq 1} x_n$ es convergente, ¿tiene sentido identificar $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ con la suma de todos los términos de x_n ?

Hemos visto que esta suma infinita verifica de una cierta manera las propiedades asociativa y distributiva, así que ahora nos preguntamos por la conmutativa en sentido general:

Pregunta: Si reordenamos los términos de una serie convergente, ¿sigue siendo convergente y su suma es la misma?

Definición Una permutación de $\mathbb{N}$ es una aplicación $P: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ biyectiva (si $n_1 \neq n_2 \Rightarrow P(n_1) \neq P(n_2)$) y $\forall m \in \mathbb{N} \exists n \in \mathbb{N}: P(n) = m$, es decir, todo natural m tiene una única preimagen $n \in \mathbb{N}$ con $P(n) = m$).

Dadas $\{x_n\}$ una sucesión y $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una permutación, consideramos la sucesión $\{x_{\pi(n)}\}$, que consiste en reordenar los términos de $\{x_n\}$.

Pregunta: $\sum_{n \geq 1} x_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n \geq 1} x_{\pi(n)}$ converge

Esto motiva la siguiente definición:

Definición Una serie $\sum_{n \geq 1} x_n$ se dice incondicionalmente convergente si $\sum_{n \geq 1} x_{\pi(n)}$ converge para toda permutación $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

Toda serie incondicionalmente convergente es convergente, ya que basta con tomar $\pi(n) = n$, pero el recíproco es falso. De hecho, se tiene la siguiente equivalencia:

Teorema: Una serie de números reales $\sum_{n \geq 1} x_n$ es incondicionalmente convergente $\Leftrightarrow$ es absolutamente convergente. En tal caso,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \quad \text{para toda permutación } \pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}.$$

Esta equivalencia arroja un hecho interesante: si una serie $\sum_{n \geq 1} x_n$ es convergente pero no absolutamente convergente, podemos encontrar una reordenación de sus términos para formar una serie divergente.

← Esta definición sí debe recordarse.

Definición: Una serie $\sum_{n \geq 1} x_n$ se dice condicionalmente convergente cuando $\sum_{n \geq 1} x_n$ es convergente pero $\sum_{n \geq 1} |x_n|$ no.

Peor aun: toda serie condicionalmente convergente puede reordenarse para que su suma sea cualquier valor que queramos:

Teorema (de Riemann) Sean $\sum_{n \geq 1} x_n$ una serie condicionalmente convergente y $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha = +\infty$ o $\alpha = -\infty$. Entonces, existe $\pi_{\alpha}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n \geq 1} x_n \rightarrow \alpha.$$

Por tanto, la idea intuitiva de "sumar todos los términos de x_n " debe manejarse con cuidado cuando $\sum_{n \geq 1} x_n$ no es absolutamente convergente.

Notas de clase de Cálculo I

Sergio Cruz Blázquez sergio.cruz@uam.es

Tema 4 : Funciones continuas

La noción de función surge en el siglo XVII al estudiar la dependencia entre cantidades variables en física y geometría. Por ejemplo, Galileo describía la posición de un cuerpo en movimiento como dependiente del tiempo.

El propósito de las funciones, por tanto, es expresar de manera precisa la dependencia entre dos magnitudes reales. Algunos ejemplos de uso cotidiano pueden ser

- (i) La altura de una persona en función de su edad
- (ii) Nota media del expediente en función del número de asignaturas cursadas.

En su formulación directa, una función es una ley que asocia a cada elemento de un conjunto un único elemento de $\mathbb{R}$.

Definición Dado $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, una función real de variable real definida en A es una correspondencia que asocia a cada valor $x \in A$ un único valor $f(x) \in \mathbb{R}$. Escribimos:

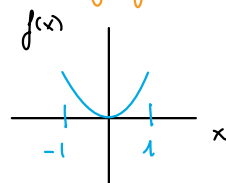
$$\begin{aligned} f: A &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \dots \end{aligned}$$

Decimos que A es el conjunto de definición o dominio de f . Al mayor conjunto A donde puede definirse f se le llama dominio natural $\circ$

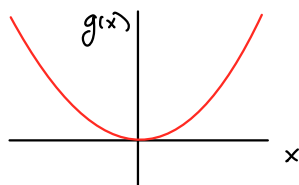
(más adelante hablaremos de gráficas)

dominio maximal de f .

Ejemplo $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$ es la función que asocia x^2 a cada elemento $x \in [-1, 1]$



El dominio maximal de la relación $x \mapsto x^2$ es $\mathbb{R}$, porque podemos calcular el cuadrado de cualquier número real



$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ g(x) = x^2$$

f y g no son la misma función porque sus dominios son distintos

Definición Dada $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, llamamos imagen de f al conjunto de valores que toma f , esto es,

$$f(A) = \{ f(x) : x \in A \}$$

Si $B \subseteq \mathbb{R}$ es tal que $f(A) \subseteq B$, podemos escribir $f: A \rightarrow B$ para enfatizar que f toma valores en A y devuelve valores de B . Por ejemplo:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty) \\ x \mapsto x^2$$

Definición Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ no vacíos y $f: A \rightarrow B$ una función. Decimos que f es

(i) inyectiva si $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$, es decir, si puntos distintos tienen siempre imágenes distintas.

(ii) sobreyectiva si $f(A) = B$, es decir, para todo $b \in B$ existe (al menos) un $a \in A$ tal que $f(a) = b$.

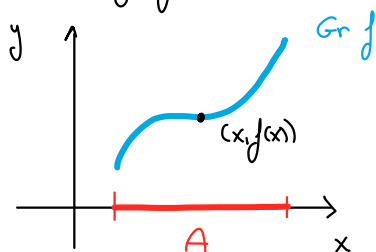
(iii) biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva.

Toda función real de variable real queda completamente determinada por su gráfica, que es el siguiente subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$:

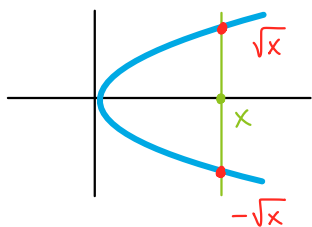
$$\text{Gr}(f) = \{(x, f(x)) : x \in A\}$$

Si representamos este conjunto en el plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, los puntos que forman $\text{Gr}(f)$ son aquellos que cumplen dos condiciones:

- $x \in A$
- $y = f(x)$.

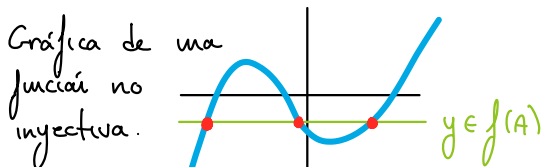


Si f es una función, cada recta vertical que pasa por $(x, 0)$ con $x \in A$ corta una única vez a $\text{Gr}(f)$, a altura $y = f(x)$. Si $x \notin A$, la recta vertical no corta a $\text{Gr}(f)$.

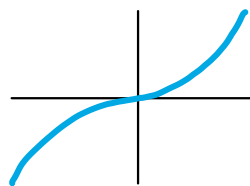


El conjunto $\{(x, y) : y^2 = x\}$ no corresponde a la gráfica de ninguna función, ya que hay valores de x con dos imágenes.

En la gráfica de f , la yectividad se corresponde con que cada recta horizontal que pasa por $(0, y)$, con $y \in f(A)$, corte una única vez a $\text{Gr}(f)$.



x_1 x_2 x_3 $f(x_i) = y \quad i = 1, 2, 3$

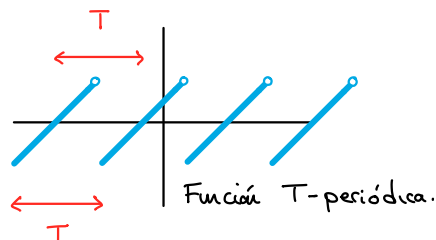
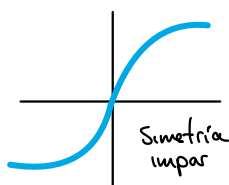
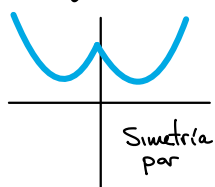


Gráfica de una función yectiva.

Destacamos las siguientes simetrías de f y su traducción como simetrías de $\text{Gr}(f)$:

Definición Sea $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Decimos que f es

- (i) par si $A = -A = \{-x : x \in A\}$ y $f(x) = f(-x) \forall x \in A$, es decir, si su gráfica es simétrica respecto al eje y .
- (ii) impar si $A = -A$ y $f(-x) = -f(x) \forall x \in A$, esto es, si su gráfica es simétrica respecto al origen de coordenadas (al plegar el plano sobre ambos ejes, las dos mitades de la gráfica son coincidentes).
- (iii) periódica de periodo $T > 0$ si: $A = \{x \pm T : x \in A\}$ y $f(x+T) = f(x) \forall x \in A$. En tal caso, la gráfica de f se repite en cada intervalo de longitud T .



Pasamos a recordar algunas operaciones básicas que podemos hacer con funciones.

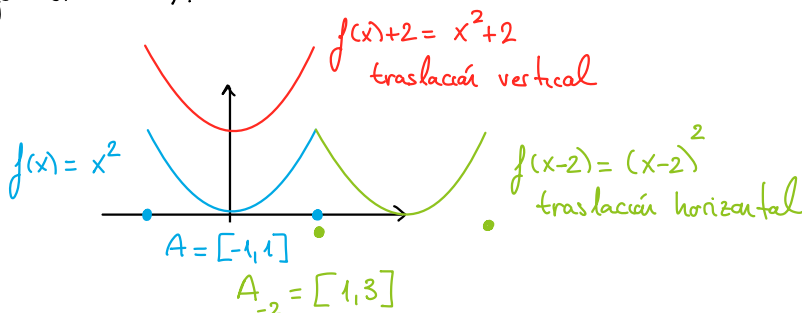
Transformaciones elementales (traslaciones, dilataciones y reflexiones).

Definición Sea $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $c \in \mathbb{R}$. Llamamos

$$A_c = \{z \in \mathbb{R} : z+c \in A\} = \{x-c : x \in A\}$$

- La traslación horizontal de c unidades de f es la función $g: A_c \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $g(x) = f(x+c)$. (Si $c > 0$, es una traslación a izquierda, y si $c < 0$ es a derecha).

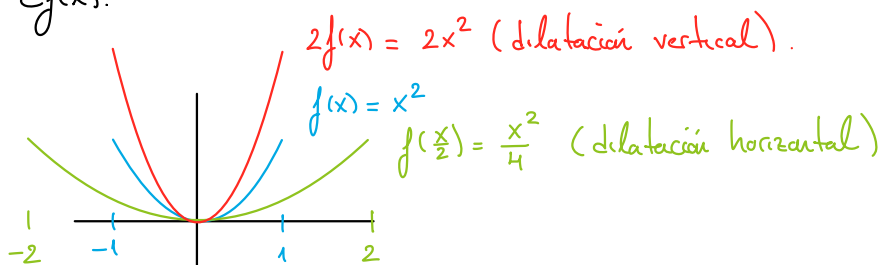
- La traslación vertical de c unidades de f es la función $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $g(x) = f(x) + c$ (si $c > 0$, es una traslación hacia arriba, o hacia abajo si $c < 0$).

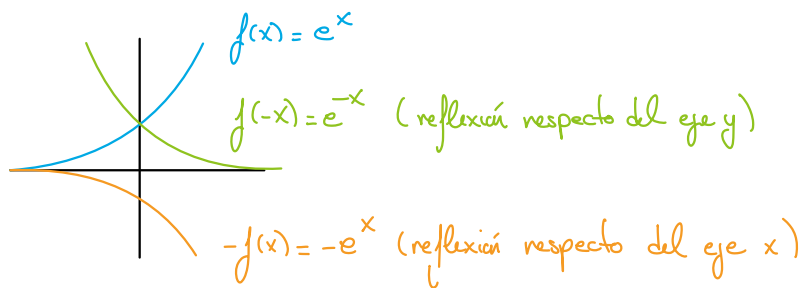


Definición Sea $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Dado un $c \in \mathbb{R}^*$, llamamos

$$cA = \{cx : x \in A\}.$$

- La reflexión respecto al eje x de f es la función $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $g(x) = -f(x)$.
- La reflexión respecto al eje y de f es la función $g: -A \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $g(x) = f(-x)$.
- La reflexión respecto al origen de f es la función $g: -A \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $g(x) = -f(-x)$.
- La dilatación horizontal de factor $1/c$ es la función $g: \frac{1}{c}A \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(cx)$.
- La dilatación vertical de factor c es la función $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = cf(x)$.





Enumeramos a continuación las operaciones algebraicas que podemos hacer con dos funciones. Llamamos $\mathcal{F}(A)$ al conjunto de las funciones de A en $\mathbb{R}$.

Definición Para cualesquiera $f, g \in \mathcal{F}(A)$, se definen

(i) Suma: $f+g \in \mathcal{F}(A)$, $(f+g)(x) = f(x)+g(x) \quad \forall x \in A$.

(ii) Producto: $fg \in \mathcal{F}(A)$, $(fg)(x) = f(x)g(x) \quad \forall x \in A$.

(iii) Cociente: Si $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in A$, entonces $f/g \in \mathcal{F}(A)$, siendo

$$f/g(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Las propiedades de la suma y el producto de números reales se trasladan de forma inmediata a las correspondientes operaciones de funciones.

La suma es asociativa, conmutativa, tiene neutro (la función 0, esto es, $f(x) = 0 \quad \forall x \in A$) y opuesto ($-f$). El producto es asociativo, conmutativo, distributivo, con neutro ($f(x) = 1 \quad \forall x \in A$), pero no toda función $f \neq 0$ tiene inversa respecto del producto, ya que para definir $1/f$ necesitamos $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in A$, mientras que $f \neq 0$ significa que $\exists x \in A: f(x) \neq 0$. A menos que A sea un solo punto, estas condiciones no son equivalentes.

Debemos evitar la notación f^{-1} para referirnos a $1/f$, ya que esta se reserva para la inversa respecto de la composición de funciones:

Definición Sean $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones tales que $f(A) \subseteq B$. Entonces, se define la función "f compuesta con g" como

$$g \circ f: A \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

$$A \xrightarrow{f} f(A) \subseteq B \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$\xrightarrow{g \circ f}$

Ejemplo Consideramos las funciones $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = |x|$, $g(x) = x^3 - x$. Como $f(\mathbb{R}), g(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ trivialmente, podemos considerar las composiciones en ambos sentidos.

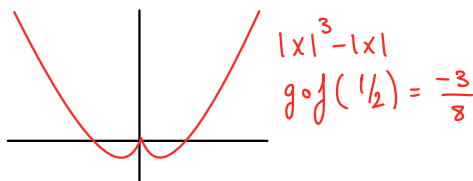
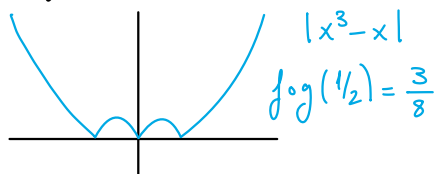
$$f \circ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = |x^3 - x|$$

$$g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = |x|^3 - |x|$$

Las funciones son distintas



Definición Sea $f: A \rightarrow f(A)$ una función inyectiva (y por tanto biyectiva, ya que el conjunto de llegada es $f(A)$, lo que la hace sobreyectiva).

Entonces, a cada $y \in f(A)$ le corresponde un único $x \in A$ tal que $y = f(x)$.

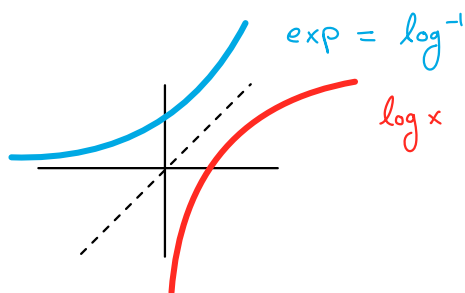
Escribimos entonces $x = f^{-1}(y)$, obteniendo una nueva función

$$f^{-1}: f(A) \rightarrow A$$

$$y \rightarrow f^{-1}(y).$$

llamada función inversa de f , y que verifica $f \circ f^{-1}(y) = y \quad \forall y \in f(A)$ y $f \circ f^{-1}(x) = x \quad \forall x \in A$.

Las gráficas de f y f^{-1} son simétricas respecto a la bisectriz del primer cuadrante



Para comprobar esto, basta observar que, si $(x,y) \in \text{Gr}(f)$ ($x \in A$ e $y = f(x)$), entonces $(x,y) = (f^{-1}(y), y)$, por lo que $(y,x) \in \text{Gr}(f^{-1})$.

Nota: Para funciones injectivas sencillas, calcular la inversa consiste en despejar x de la ecuación $y = f(x)$.

Definición Sea $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Decimos que f es

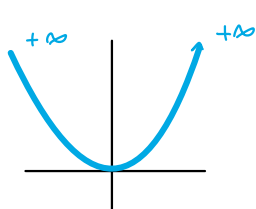
- Creciente si $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
- Estrictamente creciente si $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$
- Decreciente si $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$
- Estrictamente decreciente si $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$
- Monótona si es creciente o decreciente
- Estrictamente monótona si es estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

Proposición Toda función estrictamente monótona es injectiva

Con estas herramientas, estamos preparados para ver ejemplos de funciones y sus inversas.

Funciones elementales

① Consideramos la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.



Notación

$$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty)$$

$$\text{Si } \{x_n\} \rightarrow \pm\infty \Rightarrow \{f(x_n)\} \rightarrow +\infty$$

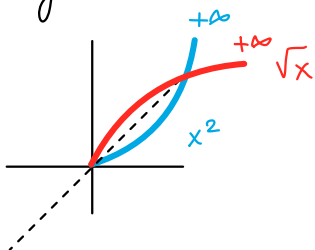
f no es inyectiva en $\mathbb{R}$ ($f(x) = f(-x)$), pero sí lo es en $\mathbb{R}_0^+$.

Sea $g: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, $g(x) = x^2$. Sabemos que, si $0 \leq y < x \Rightarrow y^2 < x^2$, luego g es estrictamente creciente $\Rightarrow$ inyectiva.

$g^{-1}: g(\mathbb{R}_0^+) = \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ Para obtener su fórmula, despejamos

$$g^{-1}(y) = x, \text{ con } y = f(x) = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y} \text{ (porque } x \in \mathbb{R}_0^+).$$

$$\Rightarrow g^{-1}(y) = \sqrt{y}$$



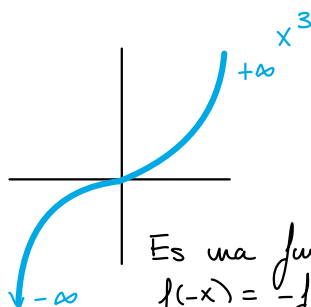
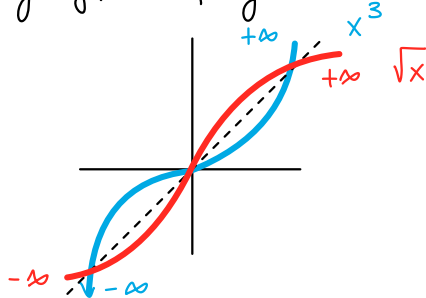
② Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$.

Su imagen es $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

$$\text{Si } \{x_n\} \rightarrow \pm\infty \Rightarrow \{f(x_n)\} \rightarrow \pm\infty.$$

f es estrictamente creciente en $\mathbb{R}_0^+$ ($0 \leq x < y \Rightarrow x^3 < y^3$) e impar, luego estrictamente creciente en $\mathbb{R} \Rightarrow$ inyectiva.

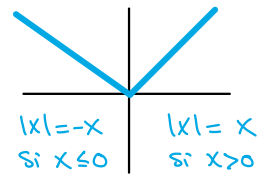
$$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f^{-1}(y) = x, \quad y = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y}.$$



Es una función impar
 $f(-x) = -f(x)$.

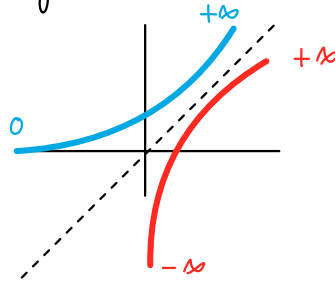
③ Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = |x|$

$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_0^+$. Si $\{x_n\} \rightarrow \pm\infty \Rightarrow \{f(x_n)\} \rightarrow +\infty$

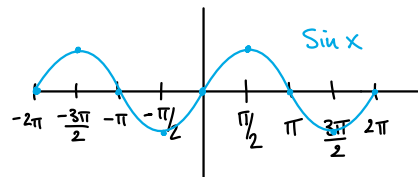
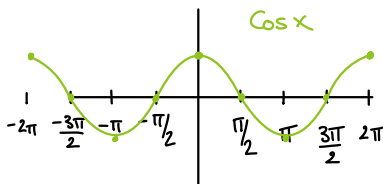
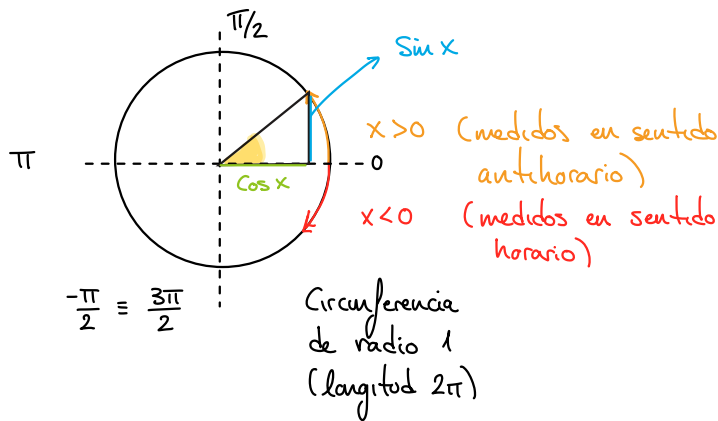


Es una función par, luego no inyectiva.

④ $\log: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ y $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, vistas en la parte de sucesiones.



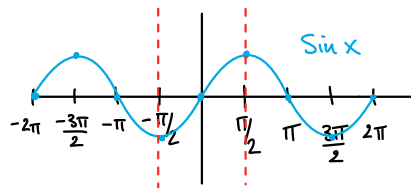
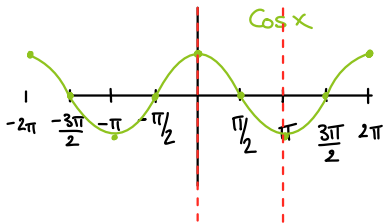
⑤ Funciones seno y coseno.



$\sin, \cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones 2π -periódicas ($\Rightarrow$ no inyectivas)

$\sin(\mathbb{R}) = \cos(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

$\cos$ es par ($\cos(-x) = \cos x$) y $\sin$ es impar ($\sin(-x) = -\sin x$).



$\sin: [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1]$ y $\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ son inyectivas, por lo que podemos considerar sus inversas

$$\arcsin: [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$$

$\arcsin y \equiv$ único ángulo en $[-\pi/2, \pi/2]$ cuyo $\sin$ es y

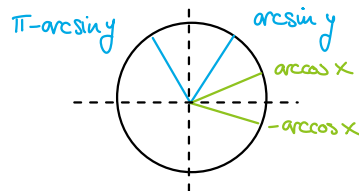
$$\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

$\arccos y \equiv$ único ángulo en $[0, \pi]$ cuyo $\cos$ es y .

Resolución de las ecuaciones trigonométricas fundamentales: sea $y \in [-1, 1]$.

$$\sin x = y \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \{\arcsin y + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \\ x \in \{\pi - \arcsin y + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \end{cases}$$

$$\cos x = y \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \{\arccos y + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \\ x \in \{-\arccos y + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \end{cases}$$

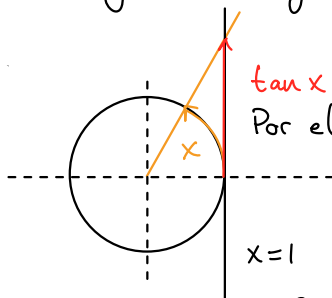


Identidades trigonométricas importantes:

(Tª Pitágoras) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(Suma) $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow \sin 2x = 2 \sin x \cos x$
 $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

⑥ Función tangente.



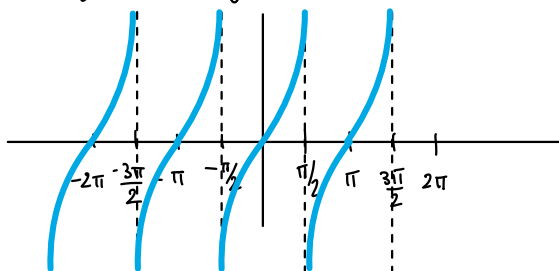
$\tan x$ ($\text{tg } x$)

Por el Tª de Thales: $\text{tg } x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \{\pi/2 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \\ x \in \{-\pi/2 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

$\arccos 0 = \pi/2$

Se define la función $\operatorname{tg}: \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$ $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$



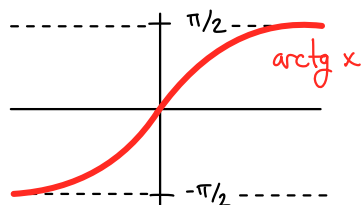
tg es una función impar
y π -periódica

$$\operatorname{tg}((-\pi/2, \pi/2)) = \mathbb{R}$$

Es inyectiva en $(-\pi/2, \pi/2)$, luego podemos considerar su inversa:

$$\operatorname{arctg}: \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$$

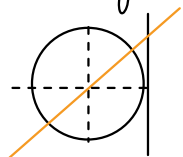
$\operatorname{arctg} y =$ único ángulo en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
cuya tg vale y .



Resolución de la ecuación trigonométrica fundamental: sea $y \in \mathbb{R}$

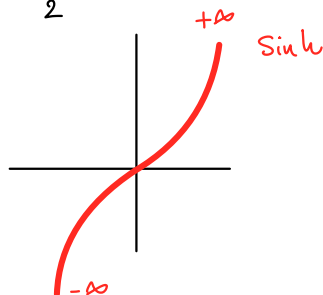
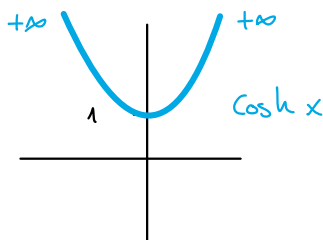
$$y = \operatorname{tg} x \Leftrightarrow x \in \{\operatorname{arctg} y + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

(la otra solución ya está incluida)



7 Funciones hiperbólicas

$$\sinh, \cosh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



$$\text{Si } \{x_n\} \rightarrow \pm \infty \Rightarrow \{\cosh x_n\} \rightarrow +\infty$$

$$\cosh(\mathbb{R}) = [1, +\infty)$$

Función par

$$\text{Si } \{x_n\} \rightarrow \pm \infty \Rightarrow \{\sinh x_n\} \rightarrow \pm \infty$$

$$\sinh(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

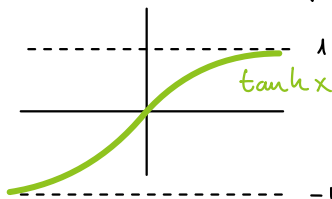
Función impar.

Identidad fundamental: $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

$$\tanh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \tanh(x) = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\tanh(\mathbb{R}) = (-1, 1)$$

$$\begin{aligned} \text{Si } \{x_n\} &\rightarrow \pm \infty \Rightarrow \\ \Rightarrow \{ \tanh(x_n) \} &\rightarrow \pm 1. \end{aligned}$$

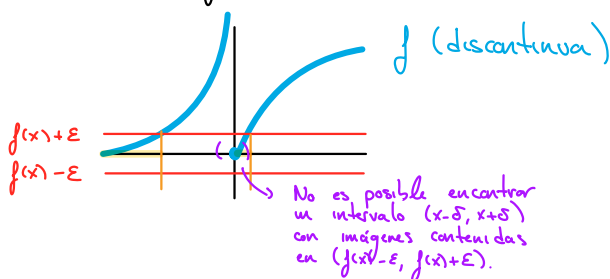
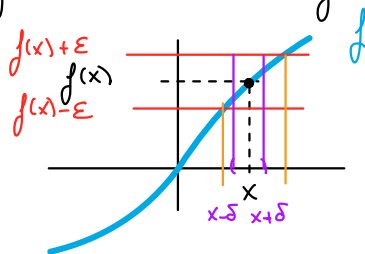


Funciones continuas

Intuitivamente, una función $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ será continua en $x \in A$ cuando al tomar valores de y cercanos a x , los $f(y)$ sean cercanos a $f(x)$.

Definición Sea $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ y $x \in A$. Decimos que f es continua en x si para todo $\varepsilon > 0$ puede encontrarse $\delta > 0$ tal que, si $y \in A$ satisface $|y - x| < \delta$, entonces $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.

Geométricamente; dado ε , para obtener valores $f(y) \in (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$ es suficiente con tomar $y \in (x - \delta, x + \delta)$ si f es continua en x .



Nota: Solo es posible hablar de continuidad en puntos donde f esté definida, ya que necesitamos el valor $f(x)$. No tiene sentido hablar de continuidad en 0 de $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/x \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$.

La forma más sencilla de acercarnos a un $x \in A$ es mediante una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A con $\{x_n\} \rightarrow x$. Esto nos da una útil caracterización de la continuidad mediante sucesiones

Proposición Sean $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ y $x \in A$. Entonces f es continua en x si, y solo si, para toda sucesión monótona $\{x_n\}$ de puntos de A tal que $\{x_n\} \rightarrow x$, se tiene $\{f(x_n)\} \rightarrow f(x)$.

Ejemplos Las siguientes funciones son continuas en su dominio natural de definición:

- Las constantes $f = a$ $a \in \mathbb{R}$
- Las funciones polinómicas $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, con $n \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{R} \forall k$.
- Las funciones racionales $p(x)/q(x)$, con p y q polinómicas.
- Las funciones radicales $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, ...
- Las funciones elementales: $\log$, $\exp$, $\sin$, $\cos$, tg , $\sinh$, $\cosh$

El siguiente resultado nos permite construir muchas otras funciones continuas. Es una consecuencia de las propiedades del límite de sucesiones:

Proposición Sean $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ y $h: C \rightarrow \mathbb{R}$, y $x \in A$.

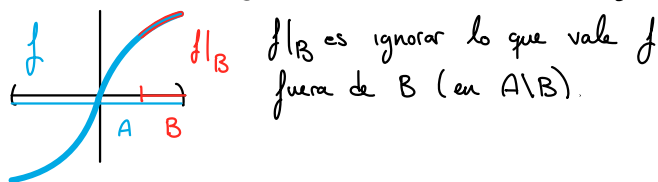
- Si f y g son continuas en $x \Rightarrow f+g$ y fg son continuas en x . Si además $g(x) \neq 0$, entonces f/g es continua en x .
- Si f es continua en x y h es continua en $f(x)$, entonces $h \circ f$ es continua en x .

Ejemplo $\log\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)$ es continua en su dominio natural de definición: $(-1, 1) \setminus \{0\}$, ya que es composición de una función continua ($\log$) con un cociente de funciones continuas.

Carácter local de la continuidad: funciones definidas a trozos

Con este resultado formalizamos la idea intuitiva de que para estudiar la continuidad de una función en un punto $x \in A$, basta con considerar valores cercanos a x .

Definición Sean $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ y $\emptyset \neq B \subseteq A$. Llamamos restricción de f a B a la función $f|_B: B \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f|_B(x) = f(x)$



Proposición Sean $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $\emptyset \neq B \subseteq A$ y $x \in B$. Entonces,

(i) Si f es continua en $x \Rightarrow f|_B$ es continua en x .

(ii) Si $f|_B$ es continua en x y $\exists \delta > 0$ tal que $(x-\delta, x+\delta) \cap A \subseteq B$, entonces f es continua en x .

Ejemplo Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{1+x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.
Veamos la continuidad de f en $a \in \mathbb{R}$.

Si $a < 0$, elegimos $B = \mathbb{R}^-$. Para $0 < \delta < |a|$, $(x-\delta, x+\delta) \cap \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^-$.

$f|_{\mathbb{R}^-}(x) = e^x$, que es continua en a , luego f es continua en a .

Para $a > 0$, tenemos que f es continua en a porque $f|_{\mathbb{R}^+}(x) = \frac{1}{1+x}$ es continua en a .

Queda por ver $a = 0$. Aquí no ayuda el carácter local, ya que cerca de 0 siempre tenemos las dos definiciones. Lo hacemos por sucesiones.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión monótona con $\{x_n\} \rightarrow x$.

Si $\{x_n\}$ es creciente, en particular $x_n \leq 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(x_n) = e^{x_n} \rightarrow e^0 = 1$

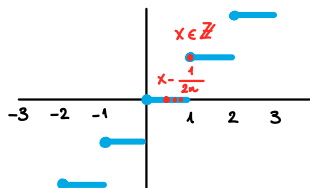
Si $\{x_n\}$ es decreciente, en particular $x_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(x_n) = \frac{1}{1+x_n} \rightarrow 1$.

En ambos casos, $\{f(x_n)\} \rightarrow f(0) = 1$, luego f es continua en 0.

Ejemplo la función parte entera es la función

$$\lfloor \cdot \rfloor: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$\lfloor x \rfloor = \max \{ k \in \mathbb{Z} : k \leq x \}$$



Podemos ver que $\lfloor \cdot \rfloor$ no es continua en $\mathbb{Z}$.

Sea $x \in \mathbb{Z}$. Entonces, $\{x - 1/2n\} \rightarrow x$ y es monótona, pero

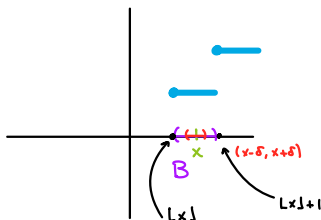
$$\{\lfloor x - 1/2n \rfloor\} = \{\lfloor x - 1 \rfloor\} \rightarrow \lfloor x - 1 \rfloor \neq \lfloor x \rfloor$$

luego $\lfloor \cdot \rfloor$ no es continua en x .

Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, entonces podemos tomar $B = (\lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + 1)$.

$\lfloor \cdot \rfloor|_B$ es continua en x por ser constante (vale $\lfloor x \rfloor$ en todo punto de B), y existe $\delta > 0$ tal que $(x - \delta, x + \delta) \cap \mathbb{R} \subseteq B$, luego

$\lfloor \cdot \rfloor$ es continua en x .



En este caso, hay que tomar

$$0 < \delta < \min \{ x - \lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + 1 - x \}$$

Límite funcional En esta sección estudiaremos el comportamiento de una función al acercarnos a un punto de la recta real, que no necesariamente pertenecerá al conjunto de definición de la función. Solo necesitaremos que, desde el conjunto en que trabajamos podamos acercarnos al punto sin pasar por él.

Definición Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Diremos que α es un punto de acumulación de A si para todo $\delta > 0$,

$$(x - \delta, x + \delta) \cap A \setminus \{\alpha\} \neq \emptyset$$

"Hay puntos de A distintos de α arbitrariamente cerca de α "

Denotamos $A' = \{ \alpha \in \mathbb{R} : \alpha \text{ es punto de acumulación de } A \}$.

Los puntos de acumulación se caracterizan por ser puntos de $\mathbb{R}$ a los que se puede llegar mediante sucesiones de $A \setminus \{ \alpha \}$:

Proposición Sea $\alpha \in A'$. $\alpha \in A' \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subseteq A \setminus \{ \alpha \}$ con $\{x_n\} \rightarrow \alpha$.

Ejemplo Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo. Intervalos triviales:
 $\emptyset = (a, b)$ con $a > b$, $\{a\} = [a, a]$

(i) Si $I = \emptyset$ o $I = \{a\}$ es un punto $\Rightarrow I' = \emptyset$.

(ii) Si I es un intervalo no trivial (contiene al menos dos puntos), entonces:

$$(a, b)' = [a, b)' = (a, b]' = [a, b]' = [a, b]$$

$$(a, +\infty)' = [a, +\infty)' = [a, +\infty)$$

$$(-\infty, b)' = (-\infty, b]' = (-\infty, b]$$

$$\mathbb{R}' = \mathbb{R}$$

Proposición Para $A, B \subseteq \mathbb{R}$ se tiene $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

Con los ejemplos de los intervalos hemos visto que no existe, en general, una relación de inclusión entre A y A' . Puede haber puntos de A que no sean de acumulación y puntos de acumulación que no sean de A .

Definición A los puntos de $A \setminus A'$ se les llama puntos aislados de A .

En dichos puntos no tendrá sentido hablar de límite de f , ya que no podemos acercarnos a ellos a través de puntos de A distintos de ellos mismos.

Definición Sean $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha \in A'$ y $L \in \mathbb{R}$. Decimos que f tiene límite L en α si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, si $y \in A$ con $0 < |y - \alpha| < \delta \Rightarrow |f(y) - L| < \varepsilon$.

↑ esto excluye $y = \alpha$

En tal caso escribimos $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = L$ o $f(x) \rightarrow L$ ($x \rightarrow \alpha$).

Nótese las diferencias con la continuidad:

- En $A \setminus A'$ podemos hablar de continuidad aunque no podamos hacer límites
- En $A' \setminus A$ podemos tomar límites aunque f no esté definida.
- En $A \cap A'$ continuidad y límites estarán muy relacionados.

Al igual que la continuidad, los límites pueden caracterizarse mediante sucesiones monótonas, lo que facilita su cálculo.

Proposición Sea $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una función, $\alpha \in A'$ y $L \in \mathbb{R}$. Entonces $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = L \Leftrightarrow$ Para toda sucesión monótona $\{x_n\} \subseteq A \setminus \{\alpha\}$ con $\{x_n\} \rightarrow \alpha$ se tiene $\{f(x_n)\} \rightarrow L$.

Ejemplo (Hoja 4, ejercicio 8b) Calcular $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$

Sea $\{x_n\}$ una sucesión monótona, $x_n \neq 1 \forall n \in \mathbb{N}$, $\{x_n\} \rightarrow 1$. Entonces;

$$\frac{x_n^2 + x_n - 2}{x_n - 1} = \frac{(x_n - 1)(x_n + 2)}{x_n - 1} = x_n + 2 \rightarrow 3.$$

↑ Como $x_n \neq 1$, puedo dividir por $x_n - 1$.

Entonces, el límite vale 3.

La relación entre límite y continuidad es la siguiente

Proposición Sea $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ e $y \in A \cup A'$ (punto de A o de acumulación de A)

- * Si $y \in A \cap A'$, entonces f es continua en $y \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow y} f(x) = f(y)$.
- * Si $y \in A \setminus A'$, entonces f siempre es continua en y .
- * Si $y \in A' \setminus A$, entonces $\exists \lim_{x \rightarrow y} f(x) \Leftrightarrow f$ puede extenderse de manera continua a y .

$$(x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3$$

Ejemplo Sea $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{(x-1)(x+3)}}. \text{ Determinar si } f \text{ puede extenderse de manera continua a } x=1.$$

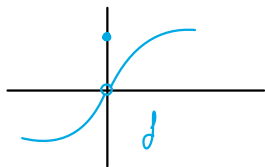
f es continua en $(1, +\infty)$, luego tenemos que ver si existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Sea $\{x_n\} \subseteq (1, +\infty)$, decreciente, con $\{x_n\} \rightarrow 1$. Entonces:

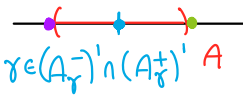
$$\frac{\sqrt{x_n^2 - 1}}{\sqrt{(x_n - 1)(x_n + 3)}} = \frac{\sqrt{x_n - 1} \sqrt{x_n + 1}}{\sqrt{x_n - 1} \sqrt{x_n + 3}} = \sqrt{\frac{x_n + 1}{x_n + 3}} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}$$

f puede hacerse continua en 1 definiendo $f(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Definición Sean $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ y $a \in A \cap A'$. Decimos que f tiene una discontinuidad evitable en a si existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$.



Límites laterales Dado $A \subseteq \mathbb{R}$ y $\alpha \in A'$, definimos $A_\alpha^- = \{x \in A : x < \alpha\}$ y $A_\alpha^+ = \{x \in A : x > \alpha\}$. Si $\alpha \in A'$, entonces $\alpha \in (A_\alpha^-)' \cup (A_\alpha^+)'$, es decir, si α es un punto de acumulación de A , entonces A se acumula a algún lado de α (izquierda, derecha o ambos).

$$\beta \in (A_\beta^+)' \quad \alpha \in (A_\alpha^-)'$$


$$\gamma \in (A_\gamma^-)' \cap (A_\gamma^+)' \quad A$$

Definición Sean $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ y $\alpha \in A'$.

- Si $\alpha \in (A_\alpha^-)'$, decimos que f tiene límite $L \in \mathbb{R}$ por la izquierda en α cuando $f|_{A_\alpha^-}$ tiene límite L en α . En tal caso escribimos

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^-} f(x) = L$$

- Si $\alpha \in (A_\alpha^+)'$, decimos que f tiene límite $L \in \mathbb{R}$ por la derecha en α cuando $f|_{A_\alpha^+}$ tiene límite L en α . En tal caso escribimos

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = L$$

Para calcular los límites laterales, usaremos sucesiones monótonas: crecientes para los límites a la izquierda y decrecientes para los límites a la derecha.

Proposición (Caracterización secuencial de los límites laterales). Sean $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ y $\alpha \in A'$. Entonces

- Si $\alpha \in (A_\alpha^-)'$, $\lim_{x \rightarrow \alpha^-} f(x) = L \Leftrightarrow$ Para toda sucesión creciente $\{x_n\} \subseteq A \setminus \{\alpha\}$ con $\{x_n\} \rightarrow \alpha$, se tiene $\{f(x_n)\} \rightarrow L$.
- Si $\alpha \in (A_\alpha^+)'$, $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = L \Leftrightarrow$ Para toda sucesión decreciente $\{x_n\} \subseteq A \setminus \{\alpha\}$ con $\{x_n\} \rightarrow \alpha$, se tiene $\{f(x_n)\} \rightarrow L$.

La principal utilidad de los límites laterales es su relación con el límite ordinario. Claramente, si A se acumula a un solo lado de α , las nociones de límites laterales y de límite usual coinciden. El caso más interesante es cuando α es punto de acumulación a ambos lados de A .

Proposición Sea $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ y $a \in (A_a^-)' \cap (A_a^+)'$. Entonces,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

Definición Sea $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ y $a \in A \cap A'$ tal que $a \in (A_a^+)' \cap (A_a^-)'$. Si existen los límites laterales en a pero

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^-} f(x),$$

entonces f tiene una discontinuidad de salto finito en a .

Ejemplo (Hoja 4-13a) Determinar, si es posible, el valor $f(1)$ para que f sea continua en $x=1$, siendo $f(x) = \frac{x-1}{|x-1|}$.

$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. $\text{Dom}(f)' = \mathbb{R}$, luego $1 \in \text{Dom}(f)'$. Por tanto, f puede extenderse de forma continua a 1 si existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Como $\text{Dom}(f)$ se acumula a izquierda y a derecha de 1 , el límite existe si existen los límites laterales y concuerdan.

Límite por la izquierda: Sea $\{x_n\} \rightarrow 1$, $x_n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{x_n - 1}{|x_n - 1|} = \frac{x_n - 1}{1 - x_n} \rightarrow -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$$

↖ negativo

Límite por la derecha: Sea $\{x_n\} \rightarrow 1$, $x_n > 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{x_n - 1}{|x_n - 1|} = \frac{x_n - 1}{x_n - 1} = 1 \rightarrow 1. \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$$

↖ positivo

Como los límites no concuerdan, f no puede extenderse de forma continua a 1 , ya que no existe el límite.

Hasta ahora hemos tomado límites cuando x se aproxima a un punto a de $\mathbb{R}$. Nuestro objetivo ahora es extender esta noción en dos direcciones, estudiando cómo se comporta f cuando la variable x

crece o decrece sin cota.

Definición Sea $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ con A no mayorado, y $L \in \mathbb{R}$. Decimos que f tiene límite L en $+\infty$ si, para toda sucesión $\{x_n\} \subseteq A$, creciente y con $\{x_n\} \rightarrow +\infty$ se tiene $\{f(x_n)\} \rightarrow L$.

En tal caso, escribimos $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ o $f(x) \rightarrow L$ ($x \rightarrow +\infty$).

Análogamente, si A es no minorado, decimos que f tiene límite L en $-\infty$ si, para toda sucesión $\{x_n\} \subseteq A$ decreciente con $\{x_n\} \rightarrow -\infty$, se tiene $\{f(x_n)\} \rightarrow L$.

En tal caso, escribimos $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ o $f(x) \rightarrow L$ ($x \rightarrow -\infty$).

Ejemplo $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}$. Sea $\{x_n\} \rightarrow +\infty$ creciente. Si llamamos

$$f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x},$$

entonces:

$$f(x_n) = \sqrt{x_n+\sqrt{x_n}} - \sqrt{x_n} = \frac{\sqrt{x_n}}{\sqrt{x_n+\sqrt{x_n}} + \sqrt{x_n}} = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x_n}}} + 1} \rightarrow \frac{1}{2}$$

luego $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1/2$.

$1/x_n \rightarrow 0$ y $\sqrt{\cdot}$ es continua.

Divergencia de funciones Nos preocupamos ahora de un caso particular de funciones que no tienen límite; aquellas en las que las imágenes $f(x_n)$ se hacen arbitrariamente grandes o pequeñas.

Definición Sean $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ y $\alpha \in A'$. Decimos que f diverge a $+\infty$ en α cuando para toda sucesión monótona $\{x_n\} \subseteq A \setminus \{\alpha\}$ con $\{x_n\} \rightarrow \alpha$ se tiene $\{f(x_n)\} \rightarrow +\infty$. En tal caso escribimos

$$f(x) \rightarrow +\infty \quad (x \rightarrow \alpha)$$

Por supuesto, se puede dar una definición análoga para decir que $f(x) \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow \alpha$). (En color naranja sobre la definición anterior)

Como caso particular de la divergencia de funciones en un punto de acumulación tenemos la divergencia lateral, que se define y denota de la siguiente manera:

Definición Sea $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ y $\alpha \in A'$. Entonces,

- Si $\alpha \in (A_\alpha^+)'$, $f(x) \rightarrow \pm\infty$ ($x \rightarrow \alpha^+$) $\Leftrightarrow f|_{A_\alpha^+}(x) \rightarrow \pm\infty$ ($x \rightarrow \alpha$)
- Si $\alpha \in (A_\alpha^-)'$, $f(x) \rightarrow \pm\infty$ ($x \rightarrow \alpha^-$) $\Leftrightarrow f|_{A_\alpha^-}(x) \rightarrow \pm\infty$ ($x \rightarrow \alpha$).

También tiene sentido hablar de divergencia de funciones en el infinito, siempre que su conjunto de definición permita "acercarnos" a $+\infty$ o $-\infty$.

Definición Sea $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ con A no mayorado. Entonces decimos que f diverge a $+\infty$ en $+\infty$ si para toda sucesión creciente $\{x_n\} \subseteq A$ con $\{x_n\} \rightarrow +\infty$ se tiene $f(x_n) \rightarrow +\infty$.

De manera análoga podríamos dar definiciones para divergencia a $-\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$, pero las omitimos por cuestión de brevedad, y porque a estas alturas no deberían ser difíciles de averiguar.

Como último apunte a esta sección de límites, observamos que un límite en $+\infty$ puede escribirse como uno en $-\infty$ sin más que cambiar x por $-x$, y por uno en 0^+ al sustituir x por $1/x$.

Proposición Sean $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ con A no mayorado y $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. Entonces,

$$f(x) \rightarrow L \text{ (} x \rightarrow +\infty \text{)} \Leftrightarrow f(-x) \rightarrow L \text{ (} x \rightarrow -\infty \text{)} \Leftrightarrow f(1/x) \rightarrow L \text{ (} x \rightarrow 0^+ \text{)}$$

Permitimos que L sea el símbolo $\pm\infty$

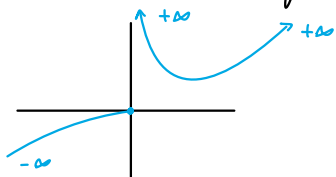
Ejemplo Sea $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x e^{1/x}$. Estudiar si f tiene límite en 0.

0 es punto de acumulación a izquierda y derecha de $\mathbb{R}^+$, luego f tiene límite en 0 si existen los límites laterales y coinciden.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(1/x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = 0$$

En cambio, si $x \rightarrow 0^+ \Rightarrow 1/x \rightarrow +\infty$. Como $\frac{e^x}{x} \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow +\infty$) entonces

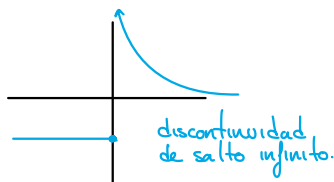
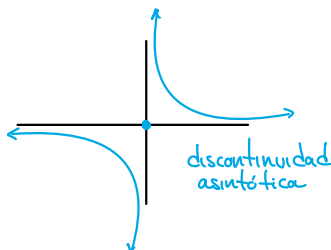
$f(x) \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow 0^+$) $\Rightarrow$ la función no tiene límite en 0.



Este ejemplo ilustra un nuevo tipo de discontinuidad que aparece cuando los límites laterales tienden a $+\infty$ o $-\infty$. Punto de A que sea de acumulación a ambos lados

Definición Sea $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ y $a \in A \cap A' \cap (A_a^+)' \cap (A_a^-)'$. Decimos que f tiene en a :

- Una discontinuidad de salto infinito si uno de los límites laterales existe y el otro va hacia $\pm\infty$.
- Una discontinuidad asintótica si ambos límites laterales son $\pm\infty$.



Para concluir el tema, destacamos dos propiedades notables de las funciones continuas. el teorema del valor intermedio, que nos permite probar la existencia y estimar algunos ceros de funciones continuas que no permiten hacerlo analíticamente, y el teorema de Weierstrass, que supone el primer resultado de optimización del curso, ya que

garantiza que toda función continua en un intervalo cerrado y acotado alcanza su máximo y su mínimo.

Teorema (del valor intermedio) Sea $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ e $I \subseteq A$ un intervalo no trivial. Entonces $f(I)$ es un intervalo. En particular, si $\alpha, \beta \in f(I)$ con $\alpha < \beta$, entonces $d \in f(I) \forall d \in (\alpha, \beta)$.

La versión más popular de este resultado se conoce como teorema de Bolzano, y nos dice que si $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua y $a, b \in A$ son tales que $[a, b] \subseteq A$ y $f(a)f(b) < 0$ (signos distintos) $\Rightarrow \exists c \in (a, b)$ con $f(c) = 0$.

Ejemplo (Hoja 4 - 17 f(x)) Probar que $f(x) = -x^4 + 8x - 6$ tiene un cero en el intervalo $[0, 1]$.

Tenemos que $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$, luego $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$. Además, f es continua en $\mathbb{R}$ por ser polinómica.

Vemos que $f(0) = -6$ y $f(1) = 1$, que tienen distinto signo. Entonces, existe $x_0 \in (0, 1)$ con $f(x_0) = 0$.

Ejemplo Hoja 4 - Ejercicio 18 Demostrar que la ecuación

$\cos x - \frac{10x}{\pi} = -e$ tiene una solución en $(0, \pi/2)$.

Encontrar una solución de la ecuación anterior es equivalente a encontrar un $x_0 \in (0, \pi/2)$ tal que $\cos x - \frac{10x}{\pi} + e = 0$, esto es, un cero de la función

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \cos x - \frac{10x}{\pi} + e$$

que esté en el intervalo $(0, \pi/2)$.

Vemos sin dificultad que $f(0) = 1 + e > 0$, y $f(\pi/2) = -5 + e < 0$, luego f debe tomar el valor en algún punto $x_0 \in (0, \pi/2)$ por el teorema del valor intermedio (o el de Bolzano).

En general, es difícil saber qué tipo de intervalo es $f(I)$ conocido solo I para una f continua en general. La única excepción es cuando I es cerrado y acotado, que entonces $f(I)$ también lo es.

Teorema (de Weierstrass) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Entonces $f([a, b])$ es un intervalo cerrado y acotado. En particular, f alcanza su máximo y su mínimo en $[a, b]$.

Notas de clase de Cálculo I

Sergio Cruz Blázquez sergio.cruz@uam.es

Tema 5: Cálculo diferencial

Iniciamos el estudio del cálculo diferencial introduciendo el concepto de derivada de una función, que se obtiene como un límite muy concreto.

Interpretaremos este concepto desde varios puntos de vista: el analítico, el geométrico y el físico. Nuestros primeros resultados consistirán en la relación entre derivada y continuidad, y la importancia de las derivadas laterales, en analogía con los límites laterales.

Definición Sea $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ y $a \in A \setminus A'$. Consideramos la función $f_a: A \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Como $a \in (A \setminus \{a\})'$, podemos preguntarnos si tiene límite en a . Pues bien, se dice que f es derivable en a si f_a tiene límite en a . En tal caso, dicho límite recibe el nombre de derivada de f en a y se denota por

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Dado $B \subseteq A \setminus A'$, decimos que f es derivable en B si es derivable en todo punto de B .

Sea $A_1 \subseteq A \setminus A'$ el conjunto de puntos donde f es derivable. Si $A_1 \neq \emptyset$, podemos definir la función derivada de f como

$$f': A_1 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f'(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Resaltamos que no tiene sentido discutir la derivabilidad de una función en puntos donde no está definida ni en sus puntos aislados. El caso más interesante es cuando A es un intervalo no trivial de $\mathbb{R}$, ya que $A \subseteq A'$, y por tanto podemos hablar de derivada en todo punto de A .

Como los límites son invariantes por traslaciones, podemos hacer el cambio de variable $x = a + h$, de modo que si $x \rightarrow a$ entonces $h \rightarrow 0$, y obtenemos una definición equivalente de derivada que a veces resulta útil para hacer los cálculos:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Vamos con la primera observación importante sobre el concepto del concepto de derivada:

Proposición Si $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable en $a \in A \cap A' \Rightarrow f$ es continua en a .

La demonstración es bien sencilla. Como $a \in A \cap A'$, será continua en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, y vemos que

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0.$$

Dicho en modo equivalente, si f no es continua en a , no puede ser derivable en a .

Usando límites laterales llegamos lógicamente a las derivadas laterales. Recordamos que el estudio de estos solo tenía interés cuando A se acumulaba a ambos lados del punto en cuestión. Por tanto, para estudiar las derivadas laterales nos restringimos a ese único caso que interesa.

Definición Sea $a \in A \cap A' \cap (A_a^+)' \cap (A_a^-)'$. Decimos que f es derivable por la izquierda en a si f_a tiene límite en a por la izquierda, y derivable por la derecha en a si f_a tiene límite por la derecha en a . En esos casos, escribimos

$$f'(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{y} \quad f'(a^-) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

La relación entre el límite ordinario y los límites laterales nos da directamente la siguiente relación:

Al escribir esto, entendemos que la derivada en a existe y vale L .

Proposición Para $L \in \mathbb{R}$ se tiene $f'(a) = L \Leftrightarrow f'(a^+) = f'(a^-) = L$

Las derivadas laterales permiten precisar aún más la relación con la continuidad, como muestra el siguiente resultado.

Proposición Si existe $f'(a^+)$, entonces $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$, y si existe $f'(a^-)$, entonces $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$. En particular, si existen ambas derivadas laterales, aunque no concidan, f es continua en a .

Primeros ejemplos

① Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$. Entonces para $y \neq x$:

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{a(y^2 - x^2) + b(y - x)}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x} (a(x+y) + b) = 2ax + b$$

Entonces, f es derivable en $\mathbb{R}$ con $f'(x) = 2ax + b$.

Como caso particular ($a=b=0$) tenemos que, si f es constante, entonces f es derivable y $f' = 0$.

② Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$. Vemos sin dificultad que

- Si $x < 0$, $f'(x) = -1$
- Si $x > 0$, $f'(x) = 1$.

Para $x = 0$ tenemos

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1,$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$$

Las derivadas laterales existen pero no coinciden $\Rightarrow f$ no es derivable en 0 (aunque sí es continua)

En $\mathbb{R}^*$, el valor absoluto sí es derivable y su derivada es la función signo:

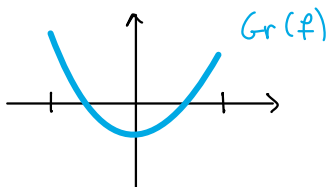
$$\text{sgn}: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$$
$$\text{sgn } x = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & x > 0, \\ -1 & x < 0. \end{cases}$$

Interpretación geométrica y analítica de la derivada

Para hacer esta interpretación nos ponemos en una situación más sencilla que la que veníamos manejando: sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo no trivial y $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Por el teorema del valor intermedio, podemos interpretar

$$\text{Gr}(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in I\}$$

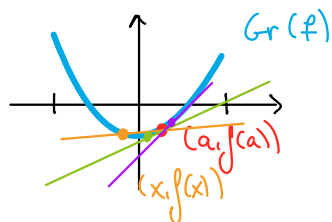
como una curva en el plano



El concepto de derivada surge del problema geométrico de encontrar la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto dado, y que era un paso fundamental en la

resolución de otros problemas como cuadraturas, ya que las rectas tangentes son aquellas que mejor aproximan a una curva cerca de un punto concreto.

(Este concepto aparece paralelamente en la física, asociado a la idea de tasa de variación de determinadas magnitudes)



Para encontrar la ecuación de la recta tangente en $(a, f(a))$, una idea es considerar rectas secantes a $Gr(f)$ en $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ y hacer $b \rightarrow a$

Usando la ecuación punto-pendiente es fácil encontrar la expresión de dichas rectas tangentes: como pasa por $(a, f(a))$, escribimos:

$$y - f(a) = m(x - a)$$

Sabiendo que pasa además por $(b, f(b))$, tenemos $f(b) - f(a) = m(b - a)$, de donde

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

por tanto, la pendiente de la recta tangente será $\lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(a)$

En términos analíticos, este razonamiento nos dice que el polinomio de primer grado cuya gráfica tiene la ecuación $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ (es decir, $P(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$) es la mejor aproximación de f cerca de a entre los de su mismo tipo. De hecho, es claro que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)}{x - a} = 0,$$

pero además si se cumple la condición $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - (cx + d)}{x - a} = 0$, puede comprobarse que $d = f(a) - af'(a)$ y $c = f'(a)$ necesariamente.

Reglas de derivación Pasamos a ver reglas de cálculo de derivadas, que nos permitirán ampliar nuestro catálogo de funciones derivables

Proposición Sean $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ funciones derivables en un punto $a \in A \cap A'$. Entonces:

(i) $f + g$ es derivable en a con $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.

(ii) (Regla de Leibniz) La función fg es derivable en a con

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

(iii) (Consecuencia) Si $\lambda \in \mathbb{R}$, λf es derivable en a con $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$.

(iv) Si $g(a) \neq 0$, f/g es derivable en a con $(\frac{f}{g})'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$

Ejemplo Sea $n \in \mathbb{N}$ y $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = x^n$. Entonces
 $f_n'(x) = n x^{n-1}$.

Lo hacemos por inducción: para $n=1$ ya lo hemos visto antes.

Supuesto para $n \in \mathbb{N}$, para $n+1$ se tiene:

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= x^n \cdot x = f_n(x) \cdot x \Rightarrow f_{n+1}'(x) = f_n'(x) \cdot x + f_n(x) = n x^{n-1} \cdot x + x^n = \\ &= (n+1) x^n, \end{aligned}$$

Como se quería.

Con las reglas anteriores ya sabemos derivar funciones racionales:

Ejemplo Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$. Calcular f'

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1-x^2)'(1+x^2) - (1-x^2)(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \frac{-2x(1+x^2) - 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \\ &= \frac{-4x}{(1+x^2)^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Proposición (Regla de la cadena) Sean $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(A) \subset B$. Sea $a \in A \cap A'$ con $f(a) \in B'$. Si f es derivable en a y g es derivable en $f(a)$, entonces $g \circ f$ es derivable en a y

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Proposición (derivada de la función inversa) Sea I un intervalo no trivial de $\mathbb{R}$ y $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua e inyectiva. Si f es derivable en $a \in I$ con $f'(a) \neq 0$, entonces f^{-1} es derivable en $f(a)$ y se cumple

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

Escribiendo $f(a) = b$, tenemos la formulación equivalente

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

Derivadas de funciones elementales

- $\sin$ es derivable en $\mathbb{R}$ con $\sin'x = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\cos$ es derivable en $\mathbb{R}$ con $\cos'x = -\sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\exp$ es derivable en $\mathbb{R}$ con $(e^x)' = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
- $\log = \exp^{-1}$, que es continua e inyectiva en $\mathbb{R}$, luego $\log$ es derivable en $\mathbb{R}^+$ y

$$\log'(y) = \frac{1}{\exp'(\log y)} = \frac{1}{e^{\log y}} = \frac{1}{y}.$$

Se usan ambas.

- tg es derivable en $\mathbb{R} \setminus \{ \frac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{Z} \}$ con

$$\operatorname{tg}'(x) = \frac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

- Para $a > 0, a \neq 1$, a^x es derivable y

$$(a^x)' = (\exp(x \log a))' = \exp(x \log a) \log a = x^a \log a.$$

- $\arctg: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ es derivable porque $\arctg = tg|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}^{-1}$, y se tiene:

$$\arctg'(y) = \frac{1}{tg'(\arctg y)} = \frac{1}{1 + tg(\arctg y)^2} = \frac{1}{1 + y^2}.$$

- $\arcsin: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ es derivable y como $\arcsin = \sin|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}^{-1}$, se tiene:

$$\begin{aligned} \arcsin'(y) &= \frac{1}{\sin'(\arcsin y)} = \frac{1}{\cos(\arcsin y)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin y)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}. \end{aligned}$$

Ejemplo Hoja 5 - Ejercicios 5a y 5b.

$$a) f(x) = \sin\left(x + \frac{\cos x}{x}\right) \quad \mathbb{R}^* \xrightarrow[g]{x + \frac{\cos x}{x}} \mathbb{R} \xrightarrow[f]{\sin} \mathbb{R} \quad g \circ f' = g'(f) f'$$

$$f'(x) = \cos\left(x + \frac{\cos x}{x}\right) \left(1 + \frac{-\sin x \cdot x + \cos x}{x^2}\right)$$

$$b) f(x) = \log(e^{5x} + 1) \quad \mathbb{R} \xrightarrow[h]{5x} \mathbb{R} \xrightarrow[g]{e^x + 1} \mathbb{R}^+ \xrightarrow[f]{\log x} \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{e^{5x} + 1} (e^{5x}) 5 = \\ &= \frac{5e^{5x}}{e^{5x} + 1} \end{aligned}$$

$$(h \circ g \circ f)' = h'(g \circ f) g'(f) f'$$

Nota: Sin necesidad de usar la regla de l'Hôpital, la definición de derivada nos permite calcular algunos límites nuevos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \sin'(0) = \cos 0 = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x-1} = \log'(1) = 1 \quad (\text{Este límite motiva el criterio de equivalencia logarítmica visto para sucesiones})$$

Extremos absolutos y relativos

Las siguientes definiciones son muy intuitivas y no precisan motivación alguna:

Definición Sea $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una función.

- Decimos que f tiene un máximo absoluto en $a \in A$ si $f(a) \geq f(x)$ para todo $x \in A$. ($f(a) = \max f(A)$)
- Decimos que f tiene un mínimo absoluto en $a \in A$ si $f(a) \leq f(x)$ para todo $x \in A$. ($f(a) = \min f(A)$).
- Decimos que f tiene un extremo absoluto en a si tiene un máximo o un mínimo absoluto en a .

Definición Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y $a \in A$. Decimos que a es interior a A si existe $r > 0$ tal que $(a-r, a+r) \subset A$. Denotamos por A° al conjunto de los puntos interiores de A .

Los puntos interiores están rodeados por todas partes de elementos de A .

Ejemplo Si I es un intervalo, I° es el mayor intervalo abierto que satisface $I^\circ \subseteq I$.

$$[1, 2)^\circ = (1, 2), \quad [0, +\infty)^\circ = (0, +\infty), \dots$$

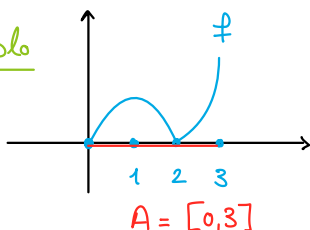
Definición Sea $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Decimos que f tiene en $a \in A$.

- un máximo relativo si $\exists r > 0: (a-r, a+r) \subseteq A$ y $f(a) \geq f(x) \quad \forall x \in (a-r, a+r)$
- un mínimo relativo si $\exists r > 0: (a-r, a+r) \subseteq A$ y $f(a) \leq f(x) \quad \forall x \in (a-r, a+r)$

• un extremo relativo si f tiene en a un máximo o un mínimo relativo

Como puede observarse, solo hablamos de extremos relativos en puntos interiores a A .

Ejemplo



$x = 0$ mínimo absoluto
 $x = 1$ máximo relativo
 $x = 2$ mínimo absoluto y relativo
 $x = 3$ máximo absoluto.

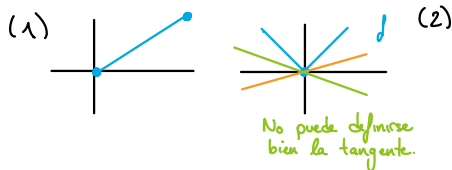
Intuitivamente, vemos claro que si f tiene un extremo relativo en el que puede hablarse de recta tangente, esta será horizontal.

Proposición Si $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ tiene un extremo relativo en $a \in A$ y f es derivable en a , entonces $f'(a) = 0$.

El resultado anterior solo ayuda a localizar extremos relativos, pero proporciona una regla práctica para encontrar los extremos absolutos de una función. Basta pensar en qué debe ocurrir para que dicho resultado no detecte un extremo absoluto.

Regla práctica Si $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ tiene un extremo absoluto en $a \in A$, entonces necesariamente a está en una de estas tres situaciones:

- (1) $a \notin A^\circ$ (es un punto frontera)
- (2) $a \in A^\circ$ pero f no es derivable en a
- (3) $a \in A^\circ$ y $f'(a) = 0$



En la práctica, el conjunto de puntos que satisfacen una de estas tres condiciones es finito, y para encontrar los extremos basta comparar sus imágenes.

Ejemplo (Hoja 5, ejercicio 26) Encontrar el máximo y el mínimo de $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ en $[-2, 6]$.

f es continua, así que el teorema de Weierstrass nos garantiza que f tiene en $[-2, 6]$ máximo y mínimo absolutos. Estos deben cumplir una de las siguientes condiciones:

- $x \notin A^\circ \Rightarrow x = -2, x = 6$.
- f no es derivable en $x \Rightarrow$ No hay puntos de este tipo.
- $f'(x) = 0$. $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = 3, x = -1$

Nuestros candidatos a ser los extremos absolutos son	x	$f(x)$	
	-2	-1	
	-1	6	
	3	-26	$\rightarrow$ mínimo absoluto
-2, -1, 3, 6	6	55	$\rightarrow$ máximo absoluto.

Ejemplo Encontrar el máximo y el mínimo de $f(x) = x^2 - 2|x|$ en el intervalo $[-2, 2]$.

Como f es continua y $[-2, 2]$ es cerrado y acotado, entonces f alcanza su máximo y su mínimo en $[-2, 2]$.

Usando la regla anterior, construimos nuestro conjunto de candidatos a ser los extremos absolutos:

① Puntos no interiores: $x = -2$ y $x = 2$.

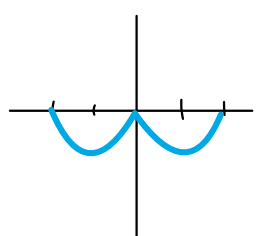
② Puntos donde f no es derivable: Sabemos que, si $x \neq 0$, x^2 y $|x|$ son derivables. Si $x = 0$, vemos que

$$f'(0^+) = 1 \quad \text{y} \quad f'(0^-) = -1 \Rightarrow f \text{ no es derivable en } x = 0$$

③ Puntos interiores con $f'(x)=0$. Para $x \neq 0$, tenemos

$$f'(x) = 2x - 2\frac{|x|}{x}; \quad f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x^2 - 2|x|=0 \Leftrightarrow x^2 = |x|.$$

$$x^2 = |x| \begin{cases} \text{Si } x > 0, & x^2 = x \Rightarrow x = 1 \\ \text{Si } x < 0, & x^2 = -x \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

Candidatos	Imágenes ($f(-x)=f(x)$)	
2, -2	0	
-1, 1	-1	
0	0	

Mínimo absoluto

Máximos absolutos

El signo de la derivada nos permite determinar la monotonía de f en intervalos de $\mathbb{R}$. Estos resultados son consecuencia del teorema del valor medio, que veremos más adelante, pero los adelantamos porque son muy útiles para clasificar los extremos relativos.

Proposición Sea I un intervalo no trivial de $\mathbb{R}$ y $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y derivable en I° . Entonces

(i) f es creciente en $I \Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I^\circ$

(ii) f es decreciente en $I \Leftrightarrow f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I^\circ$.

(iii) Si $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in I^\circ \Rightarrow f$ es estrictamente monótona en I .

Nota: Es importante recordar que el recíproco de (iii) no es cierto: $f(x) = x^3$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$ (creciente + inyectiva) pero $f'(0) = 0$.

Corolario Sea $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ y $a \in I^\circ$. Si existe $\delta > 0$ tal que f es creciente en $(a-\delta, a)$ y decreciente en $(a, a+\delta)$, entonces f tiene un máximo relativo en a . Si ocurre al revés, entonces f tiene

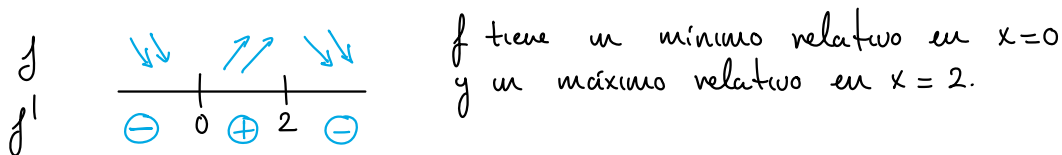
un mínimo relativo en a .

Ejemplo (5-33) $f(x) = x^2 e^{-x}$. Vamos a clasificar sus extremos relativos.

f es derivable en $\mathbb{R}$, luego los extremos relativos verifican $f'(x) = 0$.

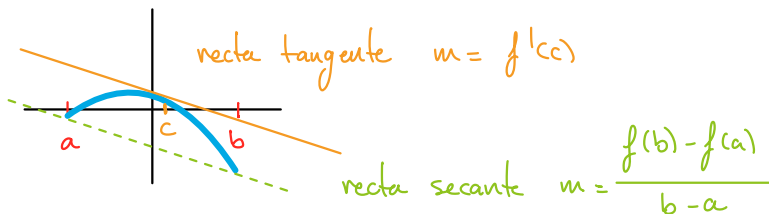
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{-x}(2x - x^2) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = 0 \text{ o } x = 2.$$

Estudiamos el signo de f' y su relación con la monotonía de f .



El anterior criterio para clasificar los extremos relativos, conocido a veces como el criterio de la primera derivada, nace como consecuencia de uno de los teoremas principales del cálculo diferencial: el teorema del valor medio.

Geométricamente, este teorema afirma que para una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , puede un punto $c \in (a, b)$ de forma que la recta tangente en c a la gráfica de f es paralela a la recta secante que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.



Teorema (del valor medio) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) . Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Un importante caso particular es el teorema de Rolle, que nos asegura que, si $f(a) = f(b)$, podemos encontrar un punto intermedio donde la derivada se anula.

Teorema (de Rolle) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) con $f(a) = f(b)$. Entonces existe un $c \in (a, b)$ con $f'(c) = 0$.

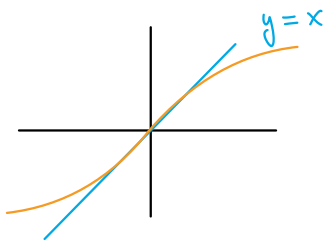
Además de relacionar f' con la monotonía y los extremos de f , estos resultados pueden usarse para encontrar soluciones de ecuaciones y probar su unicidad, así como probar desigualdades no triviales.

Ejemplo (Hoja 5 - 20) Probar que $|\cos a - \cos b| \leq |a - b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$.

Para todo $a < b$, $\cos$ es una función derivable en $[a, b]$, luego podemos aplicar el TVM para encontrar un $c \in (a, b)$ tal que

$$\cos b - \cos a = \sin c (b - a) \Rightarrow |\cos b - \cos a| = |\sin c| |b - a| \leq |b - a|$$

Ejemplo (Hoja 5 - 22 b) Calcular el número de soluciones de la ecuación $x = \arctg x \quad x \in \mathbb{R}$.



Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x - \arctg x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. g es derivable y tenemos

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

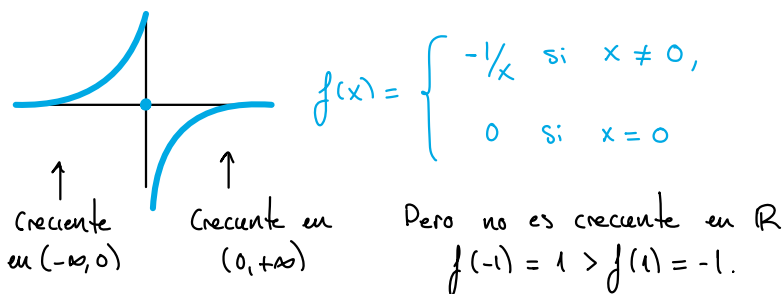
Por tanto, g se comporta de la siguiente manera:

En vista de la gráfica, sospechamos que será una única solución.

$$\begin{array}{c} g \quad \nearrow \quad \nearrow \\ \hline g' \quad (+) \quad 0 \quad (+) \end{array}$$

Hemos visto entonces que g es estrictamente creciente en $(-\infty, 0)$ y estrictamente creciente en $(0, +\infty)$, pero ¿significa eso que es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$?

En general, esto no pasa:



Pero al ser nuestra función continua en 0, veamos que sí podemos afirmar que es estrictamente creciente en todo $\mathbb{R}$:

Sean $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < 0 < y$ (es el único caso que queda por ver). Usando el TVM en $[x, 0]$ y en $[0, y]$ encontramos

$$c_1 \in (x, 0): g(0) - g(x) = g'(c_1)(0 - x) \Rightarrow -g(x) = -g'(c_1)x$$

$$c_2 \in (0, y): g(y) - g(0) = g'(c_2)(y - 0) \Rightarrow g(y) = g'(c_2)y$$

$$\Rightarrow g(y) - g(x) = \underbrace{g'(c_2)y}_{>0} - \underbrace{g'(c_1)x}_{>0} > 0 \Rightarrow g(y) > g(x)$$

Entonces, g es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$, y por tanto inyectiva, luego la ecuación $g(x) = 0$ tiene a lo sumo una solución.

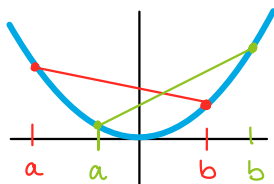
Para probar que dicha solución existe, podemos darnos cuenta de que $g(0) = 0 - \arctg(0) = 0$, por lo tanto $x=0$ es la única solución.

Si no, el teorema de Bolzano también nos la da, ya que sabemos que

$$-\frac{\pi}{2} < \arctg x < \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

luego $g(\pi/2) > 0$ y $g(-\pi/2) < 0$, lo cual implica que g tiene un cero en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$.

Convexidad y concavidad La noción de función convexa es muy fácil de entender geométricamente. Si $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo no trivial, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ será convexa cuando al restringirla a cualquier intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, la gráfica de $f|_{[a, b]}$ queda siempre por debajo de la recta que une $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.



Gráfica de una función convexa.

La forma más cómoda de definir la convexidad es parametrizando el intervalo $[a, b]$ como $(1-t)a + tb$, con $t \in [0, 1]$.

Definición Sea I un intervalo no trivial y $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Decimos que f es convexa si, para cualesquiera $x, y \in I$ se tiene

$$\underbrace{f((1-t)x + ty)}_{\text{Imágenes de } f \text{ en } [x, y]} \leq \underbrace{(1-t)f(x) + tf(y)}_{\text{Imágenes en el segmento } [f(x), f(y)]} \quad \forall t \in [0, 1]$$

Por ejemplo, $f(x) = |x|$ es convexa, ya que $|(1-t)x + ty| \leq (1-t)|x| + t|y|$ por la desigualdad triangular. Sin embargo, rara vez usamos la definición para comprobar que una función es convexa, sino que recurrimos a alguna de las caracterizaciones equivalentes.

Al cambiar de signo una función convexa se obtiene una función cóncava.

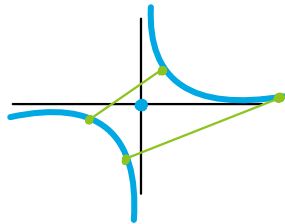
Definición Sea I un intervalo no trivial y $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Decimos que f es cóncava si, para cualesquiera $x, y \in I$ se tiene

$$f((1-t)x + ty) \geq (1-t)f(x) + tf(y) \quad \forall t \in [0, 1].$$

En primer lugar resaltamos un resultado que nos garantiza que las funciones convexas (o cóncavas) son continuas en I° , dándonos un criterio simple para descartar estos comportamientos:

Teorema Sea I un intervalo no trivial y $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa. Entonces, para todo $a \in I^\circ$, existen $f'(a^+)$ y $f'(a^-)$, y por tanto f es continua en a .

Es decir, si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ no es continua en algún punto $a \in I^\circ$, no podrá ser cóncava ni convexa.



Más interesante es el camino recíproco, que nos permite pasar de la derivabilidad a la convexidad

Teorema: Sea I un intervalo no trivial y $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable. Entonces f es convexa $\Leftrightarrow f'$ es creciente.

Por supuesto, si f' es derivable, podemos caracterizar su monotonía a partir del signo de su derivada, lo que nos da el siguiente resultado:

Teorema: Sea I un intervalo no trivial y $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces derivable. Entonces

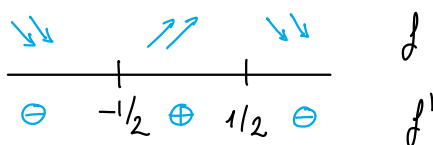
$$\begin{aligned} f \text{ es convexa} &\Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \text{ para todo } x \in I^\circ. \\ f \text{ es cóncava} &\Leftrightarrow f''(x) \leq 0 \text{ para todo } x \in I^\circ. \end{aligned}$$

Ya tenemos herramientas suficientes para esbozar con detalle la gráfica de funciones sencillas:

Ejemplo (Hoja 5-32a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \arctg(2x) - x$.

Como f es derivable en $\mathbb{R}$, podemos empezar estudiando el signo de su derivada:

$$f'(x) = \frac{2}{1+4x^2} - 1 = \frac{1-4x^2}{1+4x^2}$$



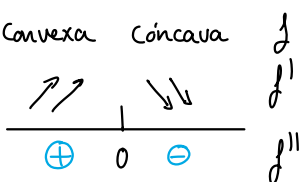
f es estrictamente decreciente en $(-\infty, -1/2)$
 f es estrictamente creciente en $(-1/2, 1/2)$
 f es estrictamente decreciente en $(1/2, +\infty)$

$\left. \begin{array}{l} \text{mínimo relativo en } -1/2 \\ \text{máximo relativo en } 1/2 \end{array} \right\}$

Estudiamos la curvatura a través de la segunda derivada

$$f''(x) = \frac{-8x(1+4x^2) - (1-4x^2)(8x)}{(1+4x^2)^2} = \frac{-16x}{(1+4x^2)^2}$$

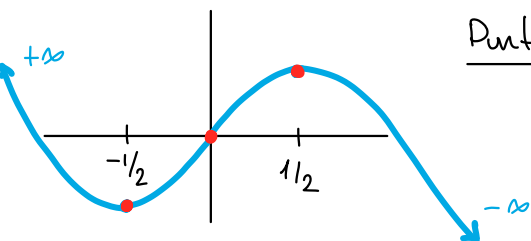
convexa cóncava



Ahora, estudiamos las asíntotas de f .

Como f es continua en $\mathbb{R}$, que es un intervalo, no tendrá saltos finitos ni infinitos. Vemos su comportamiento en $\pm \infty$:

Si $x \rightarrow +\infty$, $\arctg x - x \rightarrow -\infty$
 Si $x \rightarrow -\infty$, $\arctg x - x \rightarrow +\infty$



Puntos notables:

x	$f(x)$	
$-1/2$	$-\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$	(<0)
$1/2$	$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$	(>0)
0	0	

Como última aplicación del teorema del valor medio, pasamos a ver un conjunto de reglas para resolver indeterminaciones del tipo $[0/0]$ e $[\infty/\infty]$, conocidas como las reglas de l'Hôpital, aunque su descubrimiento se debe seguramente a quien fuera su maestro, J. Bernoulli.

Teorema (Primera regla de l'Hôpital) Sea I un intervalo no trivial, $a \in I$ y $f, g: I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ verificando

- (i) f, g son derivables en $I \setminus \{a\}$
- (ii) $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in I \setminus \{a\}$
- (iii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

Entonces, si $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$,

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \rightarrow L \quad (x \rightarrow a) \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow L \quad (x \rightarrow a)$$

Si I no está mayorado, permitimos además $a = +\infty$, y si no está menorado, también $a = -\infty$.

Ejemplo (Hoja 5 - 24) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos(\pi x)}{x^2 - 2x + 1}$

Sea $f(x) = 1 + \cos(\pi x)$. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 + \cos \pi = 0$.

f es derivable con $f'(x) = -\pi \sin(\pi x)$.

Sea $g(x) = x^2 - 2x + 1$. $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0$.

g es derivable con $g'(x) = 2x - 2 = 2(x-1)$, que verifica

$g'(x) \neq 0$ para $x \rightarrow 1$ y $x \neq 1$ Entonces

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos(\pi x)}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\pi \sin(\pi x)}{2(x-1)}$$

Observamos que el último límite vuelve a estar en las condiciones de la regla de l'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\pi \sin(\pi x)}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\pi^2 \cos(\pi x)}{2} = \frac{\pi^2}{2}.$$

La regla de l'Hôpital nos permite resolver indeterminaciones del tipo $[1^\infty]$ y $[\infty^0]$ tomando previamente logaritmos.

Ejemplo (Hoja 5-25) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{1/x}$. $[1^\infty]$.

Tomamos logaritmo:

$$\log((1 + \sin x)^{1/x}) = \frac{1}{x} \log(1 + \sin x) = \frac{\log(1 + \sin x)}{x} \quad \left[\frac{0}{0} \right].$$

El límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin x)}{x}$$

está en las condiciones de la regla de l'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1 + \sin x} = 1.$$

Por tanto, $(1 + \sin x)^{1/x} \rightarrow e \quad (x \rightarrow 0)$

Esta regla de l'Hôpital aplicada al cociente incremental $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ nos da una valiosa regla de cálculo de derivadas en un punto a cuando sabemos que f es derivable cerca de a , ya que nos dice que

$$f'(x) \rightarrow L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\} \Rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \rightarrow L$$

Proposición Sea I un intervalo no trivial y $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Dado $a \in I$, supongamos que f es derivable en $I \setminus \{a\}$.

(i) Si $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = L \Rightarrow f$ es derivable en a y $f'(a) = L$.

(ii) Si $f'(x) \rightarrow \pm\infty \quad (x \rightarrow a) \Rightarrow f$ no es derivable en a

(iii) Si $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = L \Rightarrow f'(a^+) = L$.
 Si $\lim_{x \rightarrow a^-} f'(x) = L \Rightarrow f'(a^-) = L$.
 Si f' tiene límites laterales en a pero no coinciden, f no es derivable en a .

Ejemplo Decidir si $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad \text{es derivable en } x = 0.$$

Es fácil comprobar que f es continua en 0, así que no podemos descartar que f sea derivable.

Tenemos dos alternativas para calcular $f'(0)$

① Por la definición.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+1} + 1)} = \frac{1}{2}.$$

② Calculando $f'(x)$ para $x \neq 0$ y viendo si tiene límite en 0.
(Podemos hacer esto porque ya hemos visto que f es continua en 0)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot x - (\sqrt{x^2+1} - 1)}{x^2} = \frac{x^2 - \sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1} - 1)}{x^2 \sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x^2 \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1} + 1)} \end{aligned}$$

$f'(x) \rightarrow 1/2$ ($x \rightarrow 0$), luego f es derivable en $x=0$
con $f'(0) = 1/2$.

Nota importante: Para los límites en varias variables que se verán en cálculo II, el segundo método no puede usarse.

Pasamos a enunciar la segunda regla de l'Hôpital, que nos permite resolver indeterminaciones del tipo $[\infty/\infty]$.

Teorema Sea I un intervalo no trivial, $a \in I$ y $f, g : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones verificando:

(a) f y g son derivables en $I \setminus \{a\}$

(b) $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in I \setminus \{a\}$

(c) $|g|$ diverge a $+\infty$ en a .

Entonces, para $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$, se tiene

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \rightarrow L \quad (x \rightarrow a) \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow L \quad (x \rightarrow a)$$

Además, si I no está mayorado, permitimos $a = +\infty$, y si no está menorado, también $a = -\infty$.

Ejemplo Calcular $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{e^{1/x}}$.

Tenemos una indeterminación del tipo $\left[\frac{-\infty}{\infty} \right]$, con $(e^{1/x})' = \frac{-1}{x^2} e^{1/x} \neq 0$ para todo $x > 0$, luego podemos usar la segunda regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{e^{1/x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2 e^{1/x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{-e^{1/x}} = 0$$

Aprovechamos para resaltar que la regla solo permite decidir en los casos en que f'/g' tiene límite o diverge a $\pm\infty$. En cualquier otro caso, no puede aplicarse.

Ejemplo: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x}$. Claramente,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Sin embargo, al aplicar la regla la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x + \sin x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x, \text{ que no existe.}$$

Derivadas sucesivas y teorema de Taylor.

Como ya habíamos anticipado cuando caracterizamos la convexidad mediante el signo de la segunda derivada, cuando f sea una función derivable, tiene sentido preguntarse por la derivabilidad de f' .

Nos damos cuenta enseguida que este proceso puede iterarse, dando lugar a la noción de derivadas sucesivas y a nuevos espacios de funciones que describen el número de veces que esto puede hacerse.

Como es natural, la definición de la n -ésima derivada viene dada mediante una fórmula recursiva.

Definición Para una función $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, escribimos:

$(n=1)$ $A_1 = \{x \in A \mid f \text{ es derivable en } x\}$

$$f^{(1)} = f' : A_1 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f^{(1)}(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

$(n \rightarrow n+1)$ Supuesto que tenemos la n -ésima derivada $f^{(n)}: A_n \rightarrow \mathbb{R}$, decimos que f es $n+1$ -veces derivable en $x \in A_n$ si $f^{(n)}$ es derivable en x , y definimos

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x).$$

La función $(n+1)$ -ésima derivada es la función $f^{(n+1)}: A_{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, donde

$$A_{n+1} = \{x \in A_n \mid f^{(n)} \text{ es derivable en } x\}$$

$$f^{(n+1)}(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f^{(n)}(y) - f^{(n)}(x)}{y - x}.$$

Como los conjuntos A_n pueden hacerse cada vez más pequeños, pues perdemos en cada paso los puntos aislados del anterior y los puntos de acumulación donde la anterior derivada no vuelve a ser derivable, en esta parte preferimos trabajar con dominios sin puntos aislados, como los intervalos o las uniones de intervalos.

Definición Dado $A \subseteq \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, llamamos

$$D^n(A) = \{ f: A \rightarrow \mathbb{R} \text{ } n \text{ veces derivables en } A \}$$

$C^n(A) = \{ f: A \rightarrow \mathbb{R} \text{ } n \text{ veces derivables en } A \text{ con } f^{(n)} \text{ continua en } A \}$, llamadas funciones de clase C^n en A .

$C^\infty(A) = \{ f: A \rightarrow \mathbb{R} : f \in C^n(A) \forall n \in \mathbb{N} \}$, llamadas funciones indefinidamente derivables o de clase C^∞ en A .

Por convención, $f^{(0)} = f$, de modo que $C^0(A)$ denota al conjunto de las funciones continuas en A .

Se tiene la cadena de inclusiones

$$\mathcal{F}(A) \supset C^0(A) \supset D^1(A) \supset C^1(A) \supset D^2(A) \supset C^2(A) \supset \dots \supset C^\infty(A)$$

y todas estas inclusiones son estrictas, es decir, nunca se da la igualdad.

Ejemplos

① $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x|x| \quad f \in C^1(\mathbb{R}) \setminus D^2(\mathbb{R})$.

$$f'(x) = |x| + x \frac{|x|}{x} = 2|x| \quad \forall x \in \mathbb{R}, \text{ que es una función continua.}$$

Sin embargo, $|x|$ no es derivable en 0, luego f' no vuelve a ser derivable.

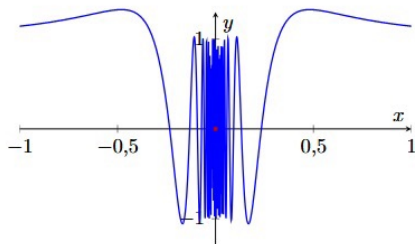
② $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \sin 1/x & x \neq 0, \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad f \in D^1(\mathbb{R}) \setminus C^1(\mathbb{R})$

Para $x \neq 0$, f es derivable de forma clara con

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

en $x=0$ tenemos $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin 1/x = 0$,

luego f es derivable en $\mathbb{R}$. Sin embargo, f' no tiene límite en 0, luego no puede ser continua. Por tanto, $f \notin C^1(\mathbb{R})$.



Gráfica de f' , que presenta una discontinuidad de segunda especie en $x=0$, el único tipo de discontinuidades que pueden tener las derivadas de funciones derivables.

Polinomio de Taylor

Es ya conocido el hecho de que si una función $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable en $a \in A \cap A'$, entonces la recta tangente en a es una buena aproximación de f cerca de a :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - (f(a) + f'(a)(x-a))}{x - a} = 0$$

Ecuación de la tang.

Si leemos el numerador de la expresión anterior como el error cometido al aproximar $f(x)$ por $f(a) + f'(a)(x-a)$, obtenemos la información de que debe ser menor a $(x-a)$.

Si f tiene derivadas hasta orden n en a , podemos mejorar esta aproximación mediante un polinomio de grado $n \in \mathbb{N}$, el polinomio de Taylor. El error cometido por dicha aproximación, el llamado resto de Taylor, será menor que $(x-a)^n$ cerca de a .

Para averiguar cómo es dicha aproximación, consideramos un polinomio de grado n , que escribimos agrupado en potencias de $(x-a)$

Ejemplo Si queremos escribir $1+x+x^2$ como suma de potencias de $(x-1)$, usamos el binomio de Newton

$$1+(x-1)+1+(x-1)^2 = 1+(x-1)+1+(x-1)^2+2(x-1)+1 = (x-1)^2+3(x-1)+3(x-1)^0.$$

$$P(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \dots + \alpha_n(x-a)^n = \alpha_0 + \sum_{k=1}^n \alpha_k (x-a)^k$$

Veamos cómo deben ser esos coeficientes α_k . Claramente, $P(a) = \alpha_0$. Si derivamos un par de veces:

$$P'(x) = \alpha_1 + \sum_{k=2}^n \alpha_k \cdot k(x-a)^{k-1} \Rightarrow P'(a) = \alpha_1.$$

$$P''(x) = 2 \cdot \alpha_2 + \sum_{k=3}^n \alpha_k k(k-1)(x-a)^{k-2} \Rightarrow P''(a) = 2 \cdot \alpha_2$$

de la misma manera, $P'''(a) = 3 \cdot 2 \cdot \alpha_3$, y podemos probar por inducción que

$$P^{(k)}(a) = k! \alpha_k \Rightarrow \alpha_k = \frac{P^{(k)}(a)}{k!}$$

Por lo tanto,

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

Si ahora f es una función derivable n veces en a , nada nos impide considerar el polinomio con las derivadas de f . Este polinomio no tiene por qué coincidir con f , pero podría ser una buena aproximación cerca de a .

Definición Sea $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Si f es al menos n veces derivable en $a \in A$, podemos considerar la función polinómica

$$T_n[f, a](x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k =$$

$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n.$$

Teorema (fórmula infinitesimal del resto) Sea I un intervalo no trivial, $n \in \mathbb{N}$ y $f \in \mathcal{D}^{n-1}(I)$. Si f es n veces derivable en $a \in I$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_n[f, a](x)}{(x-a)^n} = 0. \quad (*)$$

Además, $T_n[f, a]$ es el único polinomio de grado n que cumple (*).

A la diferencia $R_n[f, a] = f(x) - T_n[f, a](x)$ se le llama resto de Taylor de orden n , y verifica

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n[f, a](x)}{x^k} = 0 \quad \forall 0 \leq k \leq n.$$

Ejemplo Calcular el polinomio de Taylor de grado 3 en $x=0$ de $f(x) = \log(1+\sin x)$. Usar esto para calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+\sin x) - x + \frac{x^2}{2}}{x^3}$$

Si usáramos la regla de l'Hôpital para calcular este límite, tendríamos que aplicarla 3 veces. Veamos cómo el polinomio de Taylor ayuda a simplificar este cálculo.

$$f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x} \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \frac{-\sin x (1 + \sin x) - \cos^2 x}{(1 + \sin x)^2} = \frac{-\sin x - 1}{(1 + \sin x)^2} \Rightarrow f''(0) = -1$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{-\cos x (1+\sin x)^2 + 2(1+\sin x) \cos x (\sin x + 1)}{(1+\sin x)^4} \Rightarrow f^{(3)}(0) = 1$$

Entonces; $T_3[f, 0](x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$.

La fórmula infinitesimal del resto nos permite escribir

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + R_3(x), \text{ con } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_3(x)}{x^3} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+\sin x) - x + \frac{x^2}{2}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{6} + R_3(x)}{x^3} = 1/6.$$

Usando el polinomio de Taylor, podemos mejorar la condición necesaria de extremo relativo a una que es necesaria y suficiente:

Proposición Sea I un intervalo, $a \in I^\circ$, $n \in \mathbb{N}$ y $f \in D^{n-1}(I)$. Supongamos que

$$f^{(k)}(a) = 0 \text{ para } 1 \leq k < n \text{ y } f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Entonces;

- Si n es par y $f^{(n)}(a) > 0$, f tiene un mínimo relativo en a .
- Si n es par y $f^{(n)}(a) < 0$, f tiene un máximo relativo en a .
- Si n es impar, f no tiene un extremo relativo en a .

Aunque este resultado nos proporciona una condición suficiente y necesaria, no es una caracterización de los extremos relativos. Una función puede tener un extremo relativo sin ser derivable, o puede darse $f'(a) = 0$ y no ser f derivable una segunda vez en a .

Ejemplo: Sea $f(x) = 6x^6 - 19x^5 + 28x^4 - 30x^3 + 24x^2 - 11x + 2$. Probar que f tiene un punto crítico en $x=1$ y clasificarlo.

Vemos fácilmente que $f'(x) = 36x^5 - 95x^4 + 112x^3 - 90x^2 + 48x - 11$, y por tanto $f'(1) = 0$, luego 1 es un punto crítico de f .

Sin embargo, estudiar el comportamiento de f' alrededor de 1 es difícil, porque habría que factorizar un polinomio de grado 5. En cambio, derivar polinomios es fácil:

$$f''(x) = 180x^4 - 380x^3 + 336x^2 - 180x + 48 \quad f''(1) = 4 > 0,$$

luego f tiene un mínimo relativo en $x=1$.

Vemos ahora un ejemplo en el que este método es mucho menos eficaz que estudiar los intervalos de monotonía de la derivada.

Ejemplo Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \log(1+x^8)$. Probar que f tiene un punto crítico en $x=0$ y clasificarlo.

Sabemos que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ con $f'(x) = \frac{8x^7}{1+x^8}$.

Se ve muy claramente que $f'(0) = 0$, $f'(x) > 0$ para $x > 0$ y $f'(x) < 0$ para $x < 0$, luego f tiene un mínimo en $x=0$.

Si derivamos, nos encontramos que $f^{(k)}(0) = 0$ para $k=1, \dots, 7$ y $f^{(8)}(0) = 40320 > 0$, luego f tiene un mínimo relativo en 0.

Antes, hemos visto que la fórmula infinitesimal del resto nos cuantifica cómo de rápido $R_n[f, a]$ va a cero cuando $x \rightarrow a$, pero no nos dice cómo es este resto en puntos distintos, algo que sí hacen las llamadas fórmulas de Taylor. A continuación presentamos una de ellas, conocida como fórmula de Taylor con resto de Lagrange:

Teorema (fórmula de Taylor) Sea I un intervalo no trivial y $f \in C^n(I) \cap D^{n+1}(I^o)$, con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces, para cualesquiera $a, x \in I$ con $a \neq x$, podemos escribir

$$R_n[f, a](x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1},$$

para algún c estrictamente entre x y a .

Ejemplo Dar una aproximación de $\sqrt[6]{e}$ con error inferior a 10^{-4} .

Buscamos aproximar la cantidad $e^{1/6}$, para lo cual nos serviremos del polinomio de Taylor de la función e^x centrado en 0.

Como $(e^x)' = e^x$, tenemos que $(e^x)^{(k)} = e^x \quad \forall k \in \mathbb{N}$, luego el polinomio de Taylor centrado en 0 es fácil de calcular:

$$T_n(e^x, 0) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k$$

Ahora, buscamos $n \in \mathbb{N}$ para que el error cometido, $R_n(e^x, 0)(1/6)$, sea menor que 10^{-4} . Usando la fórmula de Taylor para $a=0$ y $x=1/6$, tenemos

$$R_n[e^x, 0](1/6) = \frac{e^c}{(n+1)!} \frac{1}{6^{n+1}} \quad \text{para } c \in (0, 1/6).$$

Como $c \in (0, 1/6) \Rightarrow e^c < e = 3$, luego $R_n[e^x, 0](1/6) < \frac{3}{(n+1)! 6^{n+1}}$. Para hacer dicho error $< 10^{-4}$, basta con tomar $n=3$.

Entonces, $T_3[e^x, 0](1/6) = \sum_{k=0}^3 \frac{1}{k! 6^k} = \frac{1531}{1296}$ es una aproximación de $\sqrt[6]{e}$ con error menor a 10^{-4} .

En lo que sigue, fijamos un intervalo no trivial I , una función $f \in C^\infty(I)$ y un punto $a \in I^o$. Nos preguntamos si lo que hemos hecho para la exponencial y el punto $x=1/6$ puede hacerse para otros valores de x , es decir, si

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n[f, a](x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

Nótese la diferencia: sabíamos cómo se comportaba $T_n[f, a](x)$ para n fijo cuando $x \rightarrow a$, ahora fijamos $x \neq a$ y hacemos $n \rightarrow +\infty$.

Necesitaremos que esta serie sea convergente.

Definición Sea $x \in I$. Llamamos serie de Taylor de f en el punto a evaluada en x a la serie numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, la suma parcial hasta n de la serie de Taylor coincide con su polinomio de Taylor de orden n .

Series de Taylor de funciones elementales

• Para cualesquiera $a, x \in \mathbb{R}$, se tiene $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^a}{n!} (x-a)^n$

• Para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Series centradas en 0.

• Dado $a > 0$, $\log x = \log a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n a^n} (x-a)^n$ para $x \in (0, 2a]$

Por ejemplo, el desarrollo en serie de $\log$ en 1 solo es válido para $x \in (0, 2]$.

• Para todo $x \in [-1, 1]$, $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ Desarrollo en serie centrado en 0.

No todas las funciones C^∞ pueden expresarse como suma de una serie convergente. Vemos un ejemplo:

Ejemplo Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Es fácil demostrar por inducción que $f^{(n)}(x) = P_n(1/x) e^{-1/x^2}$ para $x \neq 0$, donde P_n es un polinomio:

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2} \Rightarrow P_1(y) = 2y^3$$

Si es cierto para $n \in \mathbb{N}$, entonces

$P_{n+1}(1/x)$

$$f^{(n+1)}(x) = P_n'(1/x) \frac{1}{x^2} e^{-1/x^2} + P_n(1/x) \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2} = \left(P_n'(1/x) \frac{1}{x^2} + P_n(1/x) \frac{2}{x^3} \right) e^{-1/x^2}$$

Por tanto $\lim_{x \rightarrow 0} f^{(n)}(x) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{P_n(x)}{e^{x^2}} = 0,$

↳ para indicar $x \rightarrow +\infty$ o $x \rightarrow -\infty$

Luego f es $C^\infty(\mathbb{R})$ y $f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Por tanto, su serie de Taylor centrada en 0 es

$$\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0.$$

Esta serie converge para todo $x \in \mathbb{R}$, pero solo coincide con $f(x)$ en $x = 0$.

Ejemplo Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(1 - \cos x) - x^2}{x^4}$

Por un lado; $\sin x = x + 0 \cdot x^2 + R_2(x)$, luego

$$\sin(1 - \cos x) = 1 - \cos x + R_2(1 - \cos x)$$

Por otro lado, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \tilde{R}_4(x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \tilde{R}_4(x).$$

Por tanto, $2 \sin(1 - \cos x) = x^2 - \frac{x^4}{12} - 2 \tilde{R}_4(x) + 2 R_2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \tilde{R}_4(x)\right)$

$R_2(x) = C \cdot x^3 \Rightarrow R_2(x^2) = C \cdot x^6 \simeq R_5(x)$

Me quedo en orden 2 porque ya sé que $1 - \cos x$ empieza en orden 2, luego esto ya será de grado 4.

Se comporta como un resto de orden 5.

Entonces $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(1 - \cos x) - x^2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^4/12 - 2\tilde{R}_4(x) + 2R_5(x)}{x^4} \rightarrow 0.$
 $= -1/12$

Anexo: El método de Newton

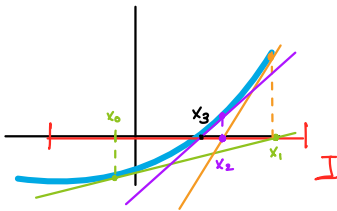
El método de Newton es un algoritmo para encontrar ceros aproximados de una función derivable. Es un método abierto; solo funcionará si escogemos un valor inicial suficientemente cercano a la raíz que busquemos.

Proposición Sea I un intervalo y $f \in \mathcal{D}(I)$ con $f'(x) \neq 0 \ \forall x \in I$.
 Dado $x_0 \in I$, consideramos la sucesión

lo elegimos nosotros $\rightarrow$

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad n \geq 1.$$

Si esta sucesión converge a algún x , entonces $f(x) = 0$.



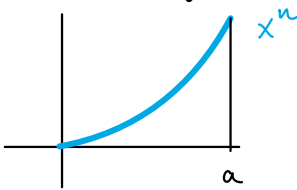
La convergencia o no dependerá de la buena elección que sea x_0 .

Notas de clase de cálculo I

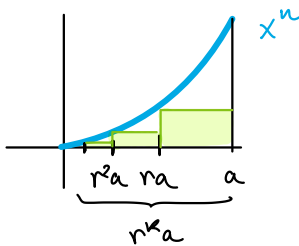
Sergio Cruz Blázquez sergio.cruz@uam.es

La noción de integral está ligada desde sus orígenes al cálculo de áreas y volúmenes, más concretamente a los métodos de cuadratura, que son técnicas para encontrar figuras regulares cuya área sea igual que la de otra figura curva dada.

Fermat, en el s. XVI, abordó el problema de calcular el área bajo la gráfica del monomio x^n limitada entre $x=0$ y $x=a>0$



El método que Fermat empleó consistía en subdividir el intervalo $[0, a]$ usando una progresión geométrica: para $r \in (0, 1)$, se construía la partición $a, ra, r^2a, \dots$



En cada intervalo, se construye el rectángulo circunscrito, que tiene como área

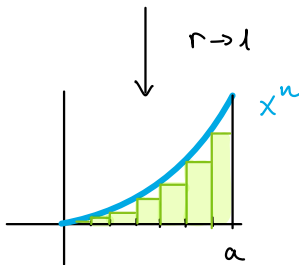
$$\begin{aligned} (r^{k+1}a)^n (r^k a - r^{k+1}a) &= a^{n+1} r^k r^{n(k+1)} (1-r) \\ &\text{altura} \quad \text{base} \\ &= a^{n+1} r^n (1-r) r^{k(n+1)} \end{aligned}$$

Por tanto, el área total es

$$a^{n+1} r^n (1-r) \sum_{k=0}^{\infty} (r^{n+1})^k = a^{n+1} \frac{r^n (1-r)}{1 - r^{n+1}}$$

Finalmente, se hace $r \rightarrow 1$ para hacer las particiones cada vez más finas

$$\xrightarrow{r \rightarrow 1} \frac{a^{n+1}}{n+1}$$



Sin embargo, hay que esperar hasta el siglo XIX para obtener una definición precisa de integral, debida a Cauchy, y su interpretación como proceso inverso a la derivación.

La necesidad de elaborar una teoría de integración surge con la introducción de funciones cada vez más generales, que a su vez hacen necesario concretar la definición de área bajo una curva.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

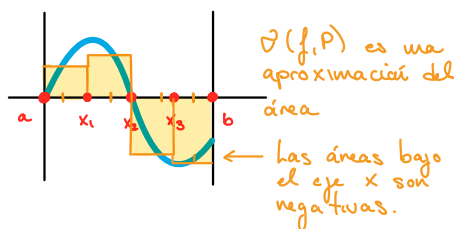
¿ f define un rectángulo con área?
¿Es su área 1? ¿2?

Definición de integral Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Una partición de $[a, b]$ es un conjunto finito de puntos ordenados

$$P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$$

que divide al intervalo $[a, b]$ en subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ $k=1, \dots, n$. En cada intervalo, tomamos un punto cualquiera $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Llamamos suma de Riemann de f asociada a P a la cantidad

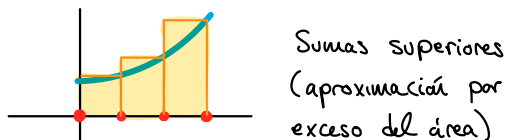
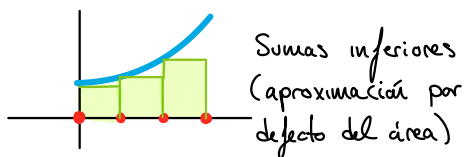
$$\mathcal{R}(f, P) = \sum_{k=1}^n f(t_k)(x_k - x_{k-1})$$



Hay dos sumas de Riemann notables: cuando los t_k se eligen, respectivamente como los máximos y mínimos de f en $[x_{k-1}, x_k]$.

$$\text{Suma superior asociada a } P \equiv \sum_{k=1}^n \max \{f(t) : t \in [x_{k-1}, x_k]\} (x_k - x_{k-1})$$

$$\text{Suma inferior asociada a } P \equiv \sum_{k=1}^n \min \{f(t) : t \in [x_{k-1}, x_k]\} (x_k - x_{k-1}).$$



Decimos que f es integrable en $[a,b]$ cuando

$$\inf \{ S(f,P) : P \text{ partici3n} \} = \sup \{ I(f,P) : P \text{ partici3n} \}$$

en cuyo caso denotamos a dicho n3mero real

L3mites de integraci3n $\int_a^b f(x) dx$ — Variable respecto a la cual se integra (Notaci3n de Leibniz).
Integrando

→ MUY IMPORTANTE QUE SEA CERRADO Y ACOTADO.

Teorema Sea $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funci3n. Las siguientes condiciones son suficientes para que f sea integrable en $[a,b]$:

(i) f est3 acotada en $[a,b]$ y tiene un n3mero finito de discontinuidades. En particular, si f es continua en $[a,b]$ entonces es integrable.

(ii) f es mon3tona en $[a,b]$.

Proposici3n Sean f y g funciones integrables en $[a,b]$. Entonces

(i) (Linealidad) $\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx$

(ii) (Monot3n3a) Si $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

(iii) (Aditividad) Si $c \in (a,b)$, entonces

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

(iv) (Continuidad) $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

(*) Convenciones: $\int_a^a f(x) dx = 0$, $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$.

Con estas convenciones, (iii) se cumple sin importar el orden de a, b, c .

Teorema fundamental del cálculo Sea f una función continua. Entonces la función $F: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

es derivable con $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Definición Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto sin puntos aislados (p.e. uniones finitas de intervalos), y $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Decimos que F es una primitiva de f si F es derivable en A y $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in A$.

Al conjunto de todas las primitivas de f se le denota mediante el símbolo de integral indefinida.

$$\int f(x) dx = \{ \text{primitivas de } f \text{ en } A \}.$$

El siguiente teorema reduce el cálculo de integrales al cálculo de primitivas, siempre que esto sea posible.

Teorema (Regla de Barrow) Sea $f \in C[a,b]$ y $F \in D[a,b]$ una primitiva de f ($F' = f$). Entonces

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = \left[F(x) \right]_a^b \quad (\text{Notación})$$

Conjuntos de primitivas de funciones elementales

$$\int 0 dx = C, \quad \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad \text{si } \alpha \neq -1, \quad \int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C, \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\frac{1}{\tan x} + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

siendo C una constante arbitraria.

Presentamos ahora distintos métodos para calcular primitivas, que nos darán a su vez formas de calcular integrales definidas.

④ Integrales por sustitución o cambio de variables

Sea $\varphi: [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow [a, b]$ una función derivable, y $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una primitiva de f . Entonces, por la regla de la cadena,

$$(F \circ \varphi)'(x) = F'(\varphi(x)) \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \varphi'(x) \quad \forall x \in [\tilde{a}, \tilde{b}].$$

Es decir, $F \circ \varphi$ es una primitiva de $f \circ \varphi \cdot \varphi'$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx &= F \circ \varphi(\tilde{a}) - F \circ \varphi(\tilde{b}) = \\ &= F(\varphi(\tilde{a})) - F(\varphi(\tilde{b})) = \int_{\varphi(\tilde{b})}^{\varphi(\tilde{a})} f(t) dt \end{aligned}$$

En términos de la integral indefinida, se tiene

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int f(t) dt \quad t = \varphi(x).$$

Ejemplo $\int_0^{\pi/2} \underbrace{(\sin x)^3}_{\text{función de } \sin x} \underbrace{\cos x}_{\sin' x} dx$ Elegimos $t = \sin x$.

Normalmente, para hacer el cambio de variable, se efectúa el siguiente cambio formal: $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$. Además,

$$\text{Si } x = \pi/2 \Rightarrow t = \sin \frac{\pi}{2} = 1, \text{ y si } x = 0 \Rightarrow t = \sin 0 = 0$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos x \, dx = \int_0^1 t^3 \, dt = \left[\frac{t^4}{4} \right]_0^1 = 1/4.$$

Ejemplo $\int \tan x \, dx = -\int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx$. Hacemos la sustitución $\cos x = t \Rightarrow -\sin x \, dx = dt$

← derivada de $\cos x$

$= -\int \frac{dt}{t} = -\log |t| + C = -\log |\cos x| + C$

↑ función de $\cos x$

↖ Buscábamos primitivas de $\tan x$, por lo que tenemos que deshacer el cambio.

② Integración por partes

Sean $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones derivables. Entonces $(fg)' = f'g + fg'$.
Integrando entre a y b :

$$\int_a^b f'(x)g(x) \, dx + \int_a^b f(x)g'(x) \, dx = \int_a^b (fg)'(x) \, dx = [f(x)g(x)]_a^b$$

Es decir,

$$\int_a^b \underbrace{f(x)}_u \underbrace{g'(x)}_{dv} \, dx = \left[\underbrace{f(x)}_u \underbrace{g(x)}_v \right]_a^b - \int_a^b \underbrace{g(x)}_v \underbrace{f'(x)}_{du} \, dx$$

Esta técnica es de especial utilidad cuando queremos integrar un producto con un factor fácil de derivar y otro fácil de integrar.

Ejemplo $\int x \log x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \log x - \int \frac{1}{2} x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \log x - \frac{1}{4} x^2 + C$

↖ dv No conocemos la primitiva de $\log x$,
↓ así que la elegimos como $u \Rightarrow du = 1/x$
 $v = \frac{1}{2} x^2$

Ejemplo $\int_1^2 \log x \, dx = \int_1^2 \underbrace{1}_{du} \cdot \underbrace{\log x}_{u \Rightarrow du = 1/x} \, dx = \left[x \log x \right]_1^2 - \int_1^2 1 \, dx =$

$\Rightarrow v = x$ $= 2 \log 2 - 1$

③ Integración de funciones racionales

Afrontamos ahora el cálculo de primitivas de funciones racionales, esto es, funciones del tipo $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, con P, Q polinomios.

Nos limitaremos primero al caso en que $\text{grado}(P) < \text{grado}(Q) \leq 2$. Si el grado de P es $\geq$ que el de Q , hacemos la división de polinomios.

3.i grado $Q = 1$. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$.

$$\begin{aligned} \int \frac{a}{bx+c} dx &= \frac{a}{b} \int \frac{1}{bx+c} dx = \frac{a}{b} \int \frac{dt}{t} = \frac{a}{b} \log|t| + K \\ &= \frac{a}{b} \log|bx+c| + K. \end{aligned}$$

$t = bx+c$
 $dt = b dx$

3.ii grado $Q = 2$ y Q tiene dos raíces simples

En este caso, descomponemos $\frac{P(x)}{Q(x)}$ como suma de dos fracciones del tipo anterior. Si r_1 y r_2 son las raíces de $Q(x)$, buscamos coeficientes $A, B \in \mathbb{R}$ que hagan cierta la identidad

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-r_1} + \frac{B}{x-r_2}$$

Ejemplo $\int \frac{x-1}{4x^2-1} dx$. Las raíces de $4x^2-1$ son $1/2$ y $-1/2$.

Buscamos A y B que hagan

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{4x^2-1} &= \frac{A}{x-1/2} + \frac{B}{x+1/2} \Rightarrow \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} = Ax + \frac{A}{2} + Bx - \frac{B}{2} \\ \Rightarrow \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} &= (A+B)x + \frac{A}{2} - \frac{B}{2} \Rightarrow \begin{cases} A+B = \frac{1}{4} \\ \frac{A}{2} - \frac{B}{2} = -\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1/8 \\ B = 3/8 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\int \frac{x-1}{4x^2-1} dx = \frac{-1}{8} \int \frac{1}{x-1/2} dx + \frac{3}{8} \int \frac{1}{x+1/2} dx$$

$$= -1/8 \log |x-1/2| + 3/8 \log |x+1/2| + C$$

3.iii Q tiene una raíz doble - Integrales del tipo log-potencia

Si $Q(x)$ tiene una raíz doble r , el camino más rápido es hacer la sustitución $t = x-r$.

Ejemplo

$$\int \frac{x}{x^2+2x+1} dx = \int \frac{x dx}{(x+1)^2} \underset{\substack{t=x+1 \\ dt=dx}}{=} \int \frac{t-1}{t^2} dt$$

$$= \int \frac{1}{t} dt - \int \frac{1}{t^2} dt = \log |t| + \frac{1}{t} + C = \log(1+x) + \frac{1}{x+1} + C.$$

Alternativamente, buscamos una descomposición en fracciones simples de la forma

$$\frac{A}{x-r} + \frac{B}{(x-r)^2}$$

Ejemplo

$$\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^2} dx.$$

Buscamos $A, B \in \mathbb{R}$ tales que $\frac{x}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2}$

$\Rightarrow x = A(x+1) + B$ Evaluamos en $x=0$ y $x=-1$ y obtenemos:

$$\left. \begin{array}{l} 0 = A + B \\ -1 = B \end{array} \right\} \begin{array}{l} A = 1 \\ B = -1 \end{array} \text{ Entonces;}$$

$$\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx - \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2} dx = [\log(x+1)]_0^1 + \left[\frac{1}{x+1} \right]_0^1$$

$$= \log 2 + 1/2 - 1 = \log 2 - 1/2.$$

3. IV Q no tiene raíces reales - integrales del tipo log-arctg

Si $Q(x)$ no tiene raíces reales y $\text{grado}(P(x))=1$, debemos ajustar el numerador para que aparezca la derivada del denominador. El resto lo tratamos como una integral inmediata de la arctangente.

Ejemplo $\int \frac{x}{x^2+x+1} dx$

x → grado 1
 x^2+x+1 → No tiene raíces reales $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \notin \mathbb{R}$.

Ajustamos el numerador para que sea la derivada del denominador:

$$\int \frac{x}{x^2+x+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+1-1}{x^2+x+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx - \int \frac{1}{x^2+x+1} dx$$

$$= \frac{1}{2} \log(x^2+x+1) - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+x+1} dx$$

Queremos escribir $x^2+x+1 = c^2 + (ax+b)^2 = c^2 + b^2 + 2abx + a^2x^2$

(*) Estudiamos esta.

Iguando coeficientes tenemos:

$$\begin{cases} a^2 = 1 & \Rightarrow a = 1 \\ 2ab = 1 & b = 1/2 \\ 1 = c^2 + b^2 & c^2 = 3/4 \end{cases}$$

(*) $\int \frac{1}{x^2+x+1} dx = \int \frac{1}{x^2+x+1} dx = \int \frac{dx}{3/4 + (x+1/2)^2} =$

$= \frac{4}{3} \int \frac{dx}{1 + \frac{4}{3}(x+1/2)^2} = \frac{4}{3} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{4}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{2/\sqrt{3} dx}{1 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$

Sacamos factor común $3/4$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

Finalmente, $\int \frac{x}{x^2+x+1} dx = \frac{1}{2} \log(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C.$

Caso "más general" (no cubrimos todos los casos posibles, pero sí los más factibles de hacer a mano)

Supongamos que Q y P son polinomios y que Q factoriza de la forma

$$Q(x) = a(x-r_1)^{k_1} \cdots (x-r_n)^{k_n} q_1(x) \cdots q_m(x),$$

↑ *coeficiente líder*

donde $r_1, \dots, r_n$ son raíces distintas con multiplicidad $k_1, \dots, k_n$, y $q_1, \dots, q_m$ son polinomios irreducibles de grado 2. Entonces, si $\text{grado}(P) < \text{grado}(Q)$, podemos escribir

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_{11}}{x-r_1} + \frac{a_{12}}{(x-r_1)^2} + \cdots + \frac{a_{1k_1}}{(x-r_1)^{k_1}} + \cdots + \frac{a_{n1}}{x-r_n} + \cdots + \frac{a_{nk_n}}{(x-r_n)^{k_n}} + \frac{\alpha_1 x + \beta_1}{q_1(x)} + \cdots + \frac{\alpha_m x + \beta_m}{q_m(x)}$$

para coeficientes a, α, β que pueden determinarse mediante un sistema de ecuaciones.

④ Potencias de senos y cosenos.

Afrontamos ahora el cálculo de integrales del tipo $\int \sin^n x \cos^m x \, dx$. Distinguimos dos casos según haya un exponente impar o no.

4.i Si uno de los exponentes es impar, separamos una potencia 1 de dicho exponente y escribimos el resto como función de una sola razón trigonométrica.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^3 x \, dx &= \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x \, dx = \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx \\ &= \int t^2 (1 - t^2) \, dt = \int (t^2 - t^4) \, dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \\ t = \sin x \quad dt = \cos x \, dx &= \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C \end{aligned}$$

Ejemplo: $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$. El truco de antes no funciona si ambos exponentes son pares.

En este caso, usamos las siguientes relaciones trigonométricas para reducir los exponentes:

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\ \cos^2 x - \sin^2 x &= \cos 2x \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \cos^2 x &= \frac{1}{2} (1 + \cos 2x) \\ \sin^2 x &= \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) \end{aligned}$$

Integral del mismo tipo
↓

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^2 x \, dx &= \int \frac{1}{4} (1 + \cos 2x)(1 - \cos 2x) \, dx = \frac{1}{4} \int (1 - \cos^2(2x)) \, dx \\ &= \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{2} (1 + \cos 4x) \right) dx = \frac{x}{4} - \frac{1}{8} \int (1 + \cos 4x) \, dx \\ &= \frac{x}{4} - \frac{x}{8} - \frac{1}{8} \int \cos 4x \, dx = \frac{x}{8} - \frac{1}{32} \sin(4x) + C \end{aligned}$$

⑤ Integrales a trozos. Simetrías.

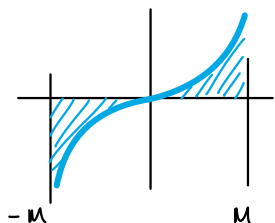
Cuando integramos funciones definidas a trozos conviene dividir el intervalo de integración donde cambia la definición de la función, usando la aditividad de la integral.

Ejemplo: $\int_0^2 |x^2 - 1| \, dx$ Escribimos el integrando como una función a trozos: $|x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \parallel x \leq -1 \\ 1 - x^2 & \text{si } x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 1). \end{cases}$

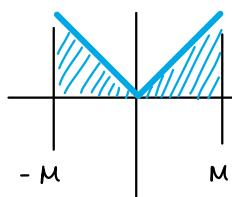
$$\begin{aligned} \int_0^2 (x^2 - 1) \, dx &= \int_0^1 (1 - x^2) \, dx + \int_1^2 (x^2 - 1) \, dx = \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \\ &+ \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_1^2 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + 1 = 2 \end{aligned}$$

Supongamos que tenemos un intervalo simétrico respecto de cero, esto es, $[-M, M]$ para algún $M > 0$.

- Si f es impar ($f(-x) = -f(x)$), entonces $\int_{-M}^M f(t) dt = 0$.
- Si f es par ($f(x) = f(-x)$), entonces $\int_{-M}^M f(t) dt = 2 \int_0^M f(t) dt$



Si f es impar, las áreas a ambos lados de 0 son iguales pero de signos opuestos



Si f es par, las áreas a ambos lados de 0 son iguales

Ejemplo: $\int_{-2}^2 x^5 \sin x^2 dx$. Tenemos un intervalo simétrico respecto de 0, así que vale la pena ver si el integrando tiene alguna simetría.

Sea $f(x) = x^5 \sin x^2$. $f(-x) = (-x)^5 \sin (-x)^2 = -x^5 \sin x^2 = -f(x)$, luego f es impar. Entonces;

$$\int_{-2}^2 x^5 \sin x^2 dx = 0 \quad \text{por simetría.}$$

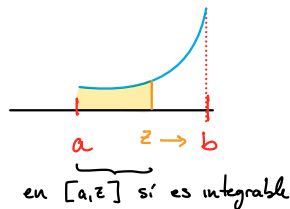
INTEGRALES IMPROPIAS

En esta sección extendaremos el cálculo de integrales a funciones no necesariamente acotadas, además de en intervalos cualesquiera

Definición Sea $a \in \mathbb{R}$ y $b > a$ que admitimos que pueda ser $b = +\infty$, y sea $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Definimos su integral

en $[a, b)$ como $\int_a^b f(x) dx = \lim_{z \rightarrow b^-} \int_a^z f(x) dx$.

Decimos que f es impropriamente integrable en $[a, b)$, o que la integral de f converge en $[a, b)$, si existe el límite anterior. Si no, decimos que la integral diverge.



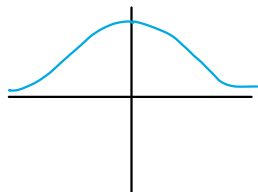
De forma completamente análoga, si $b \in \mathbb{R}$ y $-\infty \leq a < b$, la integral de una función continua f en $(a, b]$ como

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{z \rightarrow a^+} \int_z^b f(x) dx,$$

y decimos que f es integrable en $(a, b]$ cuando dicho límite sea finito.

Finalmente, si tenemos $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ y una función continua $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, decimos que es integrable en (a, b) cuando, para cualquier $c \in (a, b)$, f es integrable en $(a, c]$ y en $[c, b)$, y en tal caso ponemos

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \\ &= \lim_{z \rightarrow a^+} \int_z^c f(x) dx + \lim_{w \rightarrow b^-} \int_c^w f(x) dx \end{aligned}$$



Ejemplo:

Normalmente no se escriben

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{z \rightarrow 0} \int_z^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{z \rightarrow 0} \left[2\sqrt{x} \right]_z^1 = \lim_{z \rightarrow 0} (2 - \sqrt{z}) = 2.$$

Ponemos simplemente $z=0$ y lo entendemos como límite.

$$\int_0^{+\infty} t e^{-t} dt = \left[-t e^{-t} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \left[-e^{-t} \right]_0^{+\infty} = 1.$$

$u=t \Rightarrow du=1$
 $dv=e^{-t} \Rightarrow v=-e^{-t}$
 $\downarrow 0-0=0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x dx = \int_0^{+\infty} x dx + \int_{-\infty}^0 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{+\infty} + \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-\infty}^0,$$

¡Ojo! Esta integral es impropia en ambos extremos: debemos separarla

que no converge, ya que $x^2 \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow \pm\infty$).

Proposición (Criterios de integrabilidad) Sean $a < b \leq +\infty$, y $f, g: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a, b)$. Entonces;

(i) Si g es integrable en $[a, b) \Rightarrow f$ es integrable en $[a, b)$

(ii) Si $\int_a^b f(x) dx = +\infty \Rightarrow \int_a^b g(x) dx = +\infty$.

(iii) Supongamos además que $g(x) \neq 0 \forall x \in [a, b)$. Si

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L > 0,$$

entonces f es integrable en $[a, b) \Leftrightarrow g$ es integrable en $[a, b)$

Ejemplo Probar que e^{-x^2} es integrable en $[0, +\infty)$.

En primer lugar, descomponemos la integral para hacer estimas más fácilmente:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

e^{-x^2} es continua en $[0, 1]$,
por lo tanto es integrable

No es posible escribir la primitiva de esta función usando funciones elementales, debemos usar los criterios.

Si $x \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq x \Rightarrow -x^2 \leq -x \Rightarrow e^{-x^2} \leq e^{-x}$. Vemos que

$$\int_1^{+\infty} e^{-t} dt = \left[-e^{-t} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{e}, \text{ luego } e^{-x^2} \text{ es integrable en } [1, +\infty).$$

Ejemplo $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$. En cada intervalo $[0, M]$ la función es continua, luego integrable.

Tomamos M suficientemente grande.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int_0^M \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} + \int_M^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/\sqrt{x^2+1}}{1/x} = 1, \quad \text{y} \quad \int_M^{+\infty} \frac{1}{x} dx = [\log x]_M^{+\infty} = +\infty,$$

luego $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ no es integrable.

Teorema (Criterio de la integral para las series) Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ y f una función positiva y decreciente. Entonces

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n) \text{ converge} \Leftrightarrow \int_{n_0}^{+\infty} f(x) dx \text{ converge}$$

Ejemplo 16-a $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\log n)^2}$

Sea $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{x(\log x)^2}$.

$$f \in D(\mathbb{R}^+) \quad \text{y} \quad f'(x) = \frac{-(\log x)^2 + 2 \log x}{x^2 (\log x)^4} = \frac{-\log x (\log x + 2)}{x^2 (\log x)^4}$$

$f'(x) \leq 0$ para $x \geq 2 \Rightarrow f$ es decreciente en $[2, +\infty)$.

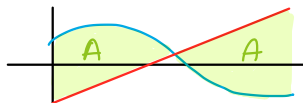
$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^2} dx = \int_2^{+\infty} \frac{1/x}{(\log x)^2} dx = \left[\frac{-1}{\log x} \right]_2^{+\infty} = \frac{1}{\log 2}$$

Por lo tanto, la serie converge

Cálculo de áreas y volúmenes

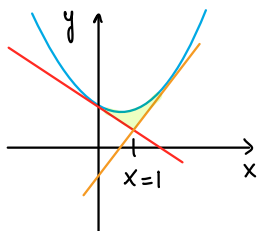
① **Cómo calcular el área entre dos gráficas.** Sean $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones integrables. El área (sin signo) encerrada entre las gráficas de f y g entre a y b viene dada por:

$$\text{Área} = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx,$$



es decir, es la integral de $f(x) - g(x)$ donde $f(x) \geq g(x)$ y la integral

Ejemplo Ej 12 Sea $f(x) = x^2 - 2x + 7$ y T el triángulo limitado por la gráfica de f y las tangentes en $x=0$ y $x=2$. Calcular el área de T .



$$\text{tangente en } x=0: T_1(x) = f(0) + f'(0)x = 7 - 2x$$

$$\text{tangente en } x=2: T_2(x) = f(2) + f'(2)(x-2) = 7 + 2(x-2)$$

$$\text{Punto de corte: } 7 - 2x = 7 + 2x - 4 \Rightarrow x = 1$$

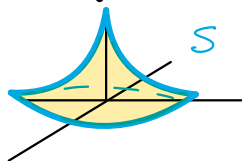
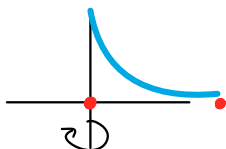
En $[0, 1]$ debemos integrar $f(x) - T_1(x)$

en $[1, 2]$ debemos integrar $f(x) - T_2(x)$

$$\text{área} = \int_0^1 (x^2 - 2x + 7 - 7 + 2x) dx + \int_1^2 (x^2 - 2x + 7 - 7 - 2(x-2)) dx$$

$$= \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (x^2 - 4x + 4) dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

② **Área y volumen de cuerpos de revolución** Sean $0 \leq a < b$ y $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable. Consideramos la superficie de $\mathbb{R}^3$ generada al rotar la gráfica de f alrededor del eje y :



Entonces, el área de la superficie S viene dada por

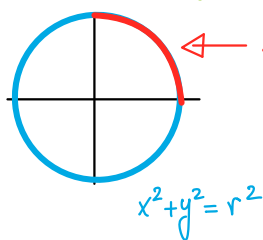
$$\text{Área}(S) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

y el volumen encerrado por esta es

$$\text{Volumen}(Q) = \int_a^b \pi f(x)^2 dx$$

Ambas fórmulas surgirán de manera natural en cálculo II.

Ejemplo Ej 18 a) Área y volumen de la esfera.



← Vamos escribir esta parte como gráfica.

Sea $f: [0, r] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \text{ para } x \in [0, r]$$

Al rotar la gráfica de f alrededor del eje y , obtenemos media esfera.

$$V(\text{Esfera}) = 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx = 2\pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

$$\begin{aligned} \text{Área}(\text{Esfera}) &= 2\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = 2\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} dx \\ &= 2\pi \int_0^r r dx = 2\pi r^2. \end{aligned}$$

A continuación presentamos un método para calcular límites a partir de integrales y viceversa (aunque suele ser más habitual usarlo en la primera dirección. Este resultado se basa en una observación fundamental que hicimos cuando definimos la integral:

Si $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ es una partición de $[a, b]$ y

$\varphi(f, P) = \sum_{k=1}^n f(t_k)(x_k - x_{k-1})$ es cualquier suma de Riemann de f asociada a P , entonces $I(f, P) \leq \varphi(f, P) \leq S(f, P)$.

Cuando f sea una función integrable, sabemos que las sumas inferiores y superiores pueden hacerse arbitrariamente próximas tomando particiones cada vez más finas, lo que hará que todas las sumas de Riemann converjan al valor de la integral.

Definición Sea $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ una partición de $[a, b]$. Llamamos anchura de P (o paso) al valor $\Delta P = \max \{x_k - x_{k-1} : k = 1, \dots, n\}$.

Teorema Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable y sea $\{P_n\}$ una sucesión de particiones tal que $\{\Delta P_n\} \rightarrow 0$. Sea $\varphi(f, P_n)$ cualquier suma de Riemann asociada a P_n . Entonces

$$\varphi(f, P_n) \rightarrow \int_a^b f(x) dx$$

Un caso particular importante: Dado $n \in \mathbb{N}$, consideramos la partición de $[a, b]$ que consiste en dividir $[a, b]$ en n partes iguales:

$$x_k = a + \frac{b-a}{n} \cdot k \quad k = 0, 1, \dots, n$$

La anchura de esta partición es fija y tiende a 0 cuando $n \rightarrow +\infty$:

$$x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n} \quad \forall k = 1, \dots, n \Rightarrow \Delta P_n = \frac{b-a}{n} \rightarrow 0.$$

Entonces, para cualesquiera $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ se tiene

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(t_k) \rightarrow \int_a^b f(x) dx$$

Esto puede leerse como que la integral es un límite de promedios de f en $[a, b]$.

En el caso específico de $[a, b] = [0, 1]$ y $t_k = x_k$ tenemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx.$$

Ejemplo (20 a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n(n+k)}}$

Buscamos que aparezca $1/n$ y $f(k/n)$ para alguna f .

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n(n+k)}} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{n(1+\frac{k}{n})}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{1+k/n}} = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}. \end{aligned}$$

Entonces el límite es

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx = \left[2\sqrt{1+x} \right]_0^1 = 2\sqrt{2} - 2.$$