

CÁLCULO II - GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA

UAM- CURSO 24/25



Sergio Cruz Blázquez
Universidad Autónoma de Madrid
sergio.cruz@uam.es Despacho 17-309

Bloque I: Introducción al espacio de varias variables

I.1. Norma del espacio Euclídeo

El principal objeto de trabajo de este curso son las funciones de varias variables, es decir, funciones que admiten una cantidad finita cualquiera de valores de "entrada" y de "salida".

Ejemplos:

Daremos las definiciones más adelante →

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= xy - xe^z & f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} & f(1,0,0) &= -1 & (\text{Campo escalar}) \\ g(x,y) &= (x+y, x-y) & g: \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} & g(2,1) &= (3,1) & (\text{Campo vectorial}) \end{aligned}$$

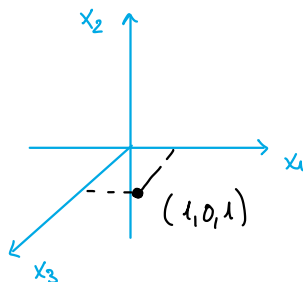
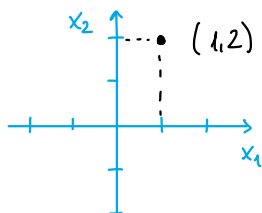
El objetivo es generalizar las nociones de límite funcional, continuidad, derivación e integración de forma natural a esta clase de funciones. Como primer paso, necesitamos un concepto de distancia, y determinar qué conjuntos jugarán el papel de los intervalos en $\mathbb{R}$.

Definición Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^n$ denotará el espacio Euclídeo n-dimensional, formado por las n-tuplas de números reales:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \ \forall i = 1, \dots, n\} = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}^{(n)}$$

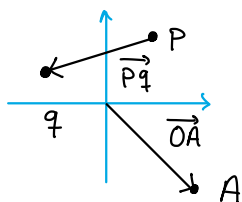
$\mathbb{R}^2 \equiv$ El plano (Euclídeo) , $\mathbb{R}^3 \equiv$ El espacio (Euclídeo)

Si $p = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, llamamos a sus componentes x_i las coordenadas de p . Estas coordenadas nos permiten representar puntos de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ usando las bases usuales



Podemos identificar los puntos de $\mathbb{R}^n$ vectores para motivar algunos conceptos geométricos como los ángulos

Definición Dados $p, q \in \mathbb{R}^n$, definimos el vector $\vec{pq}$ como el segmento orientado con punto inicial p y punto final q : $\vec{pq} = q - p$.



Dado $A \in \mathbb{R}^n$, podemos identificarlo con su vector de posición, esto es, $\vec{OA}$, donde $O = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$

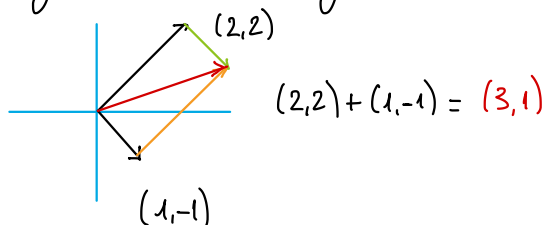
Por tanto, a menudo llamaremos vectores a los elementos de $\mathbb{R}^n$

Operaciones con vectores Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos:

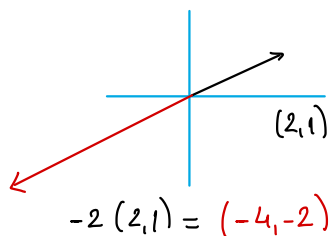
- Suma: $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$
(Asociativa, conmutativa, con neutro y opuesto)
- Producto por escalares: $\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$
(Asociativa, distributiva respecto de la suma y con neutro)

Interpretación geométrica de estas operaciones (en el plano $\mathbb{R}^2$)

La suma de dos vectores de $\mathbb{R}^2$ puede construirse siguiendo la regla del paralelogramo



El producto por escalares se corresponde con dilataciones de razón λ , entendiendo que si $\lambda < 0$, cambiamos el sentido.



Además de estas operaciones, podemos equipar $\mathbb{R}^n$ con un producto escalar, que es la aplicación dada por:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longrightarrow \langle x,y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{aligned}$$

Un producto escalar real satisface las siguientes propiedades básicas:

- Simetría: $\langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n$
- Linealidad: $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$
 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x,y,z \in \mathbb{R}^n$
- Positividad: $\langle x,x \rangle > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0 \quad (0 = (0, \dots, 0))$.

} Se dice que es una forma bilineal y simétrica.

Definición llamamos norma Euclídea a la norma inducida por el producto escalar:

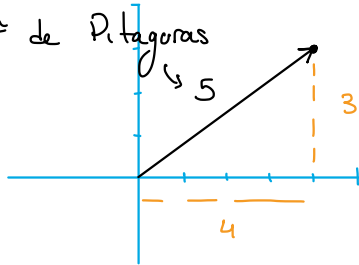
$$\|\cdot\|_2 = \|\cdot\| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Si $n=1$, $\|x\| = |x|$
para $x \in \mathbb{R}$

La norma de un vector se corresponde con su longitud.

Tª de Pitagoras



$$x = (4, 3)$$

$$\|x\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

Decimos que x es unitario si $\|x\| = 1$

Propiedades de la norma

- Positividad: $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ y $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ Muy importante!
- Homogeneidad: $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ $\sqrt{t^2} = |t| \quad \forall t \in \mathbb{R}$
- Desigualdad de Cauchy-Schwarz: $\langle x, y \rangle \leq \|x\| \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$, y se da la igualdad $\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \Leftrightarrow x = \alpha y$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$ (es decir, x e y son linealmente dependientes)

En general, en este curso no trabajaremos con demostraciones, pero dado que el álgebra vectorial sí forma parte de los objetivos, añadimos algunas para ilustrar estos cálculos

Demostración (Cauchy-Schwarz) $(\langle x, y \rangle \leq \|x\| \|y\|)$

Sea $t \in \mathbb{R}$ cualquiera. Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, sabemos que $\|x + ty\|^2 \geq 0$. Los cuadrados nunca son negativos

Desarrollamos la expresión anterior:

$$0 \leq \|x + ty\|^2 = \langle x + ty, x + ty \rangle = \underbrace{\|x\|^2 + 2t\langle x, y \rangle + t^2\|y\|^2}_{\text{bilinealidad}} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

que tiene como mucho una raíz $\longleftarrow$ polinomio de 2º grado en t

Entonces, su discriminante $b^2 - 4ac$ debe ser ≤ 0 :

Si $\langle x, y \rangle < 0$, la desigualdad es automáticamente cierta

$$4\langle x, y \rangle^2 \leq 4\|x\|^2\|y\|^2 \Rightarrow |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \Rightarrow \langle x, y \rangle \leq \|x\| \|y\|.$$

Si tenemos la igualdad, entonces el polinomio tiene una única raíz real, es decir, $\exists t_0 \in \mathbb{R}: \|x + t_0 y\|^2 = 0$. Por la positividad de la norma, esto implica que $x + t_0 y = 0$. $\square$

• Desigualdad triangular: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

Demostración Se sigue inmediatamente de la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

$$\Rightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \square$$

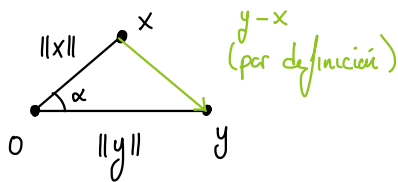
las bases son ≥ 0

Definición (Ángulo mínimo entre dos vectores). Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, se define el ángulo mínimo entre x e y como el único ángulo $\alpha \in [0, \pi]$ tal que

$$\cos \alpha = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}$$

Esta cantidad $\in [-1, 1]$ por Cauchy-Schwarz!

Que α es el ángulo mínimo entre x e y podemos verlo fácilmente a partir del conocido teorema del coseno:



$$\begin{aligned} \|x\|^2 + \|y\|^2 &= \|x-y\|^2 - 2\|x\|\|y\|\cos \alpha \\ \|x-y\|^2 &= \langle x-y, x-y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 0 = -2\langle x, y \rangle - 2\|x\|\|y\|\cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|\|y\|} \quad \square$$

(o perpendiculares)

Decimos que x e y son ortogonales si $\alpha = \pi/2$, es decir, si $\langle x, y \rangle = 0$. A menudo, esto se denota como $x \perp y$.

Si son ortogonales y unitarios, entonces los llamaremos ortonormales.

Ejemplo La base canónica de $\mathbb{R}^n$, $\{\vec{e}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0) : i=1, \dots, n\}$ está formada por vectores ortonormales dos a dos.

Es fácil ver que $x = x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

→ La hoja de ejercicios sigue esta notación.

(A mí no me gusta)

Notación: En $\mathbb{R}^3$, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ suelen denotarse $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Definición: Si $x, y \in \mathbb{R}^3$, definimos su producto vectorial de manera formal como

$$x \wedge y = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

Propiedades Para $x, y, z \in \mathbb{R}^3$, se tiene

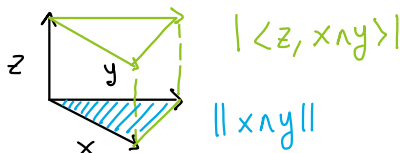
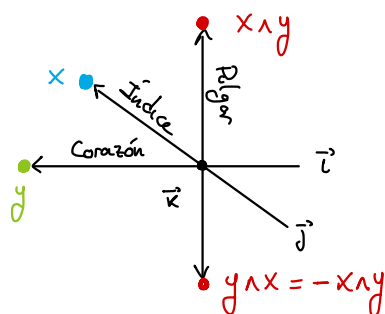
- $x \wedge y \perp x$, $x \wedge y \perp y$, y se cumple la regla de la mano derecha
- (Antisimetría) $x \wedge y = -y \wedge x$

- $\|x \wedge y\| = \|x\| \|y\| \sin \alpha$ (área del paralelogramo formado por x y y)

• $\langle z, x \wedge y \rangle = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$

Producto mixto

$|\langle z, x \wedge y \rangle|$ es el volumen del paralelepípedo que forman x, y, z .



La norma nos permite introducir una distancia entre puntos de $\mathbb{R}^n$

Definición La distancia Euclídea en $\mathbb{R}^n$ es la aplicación

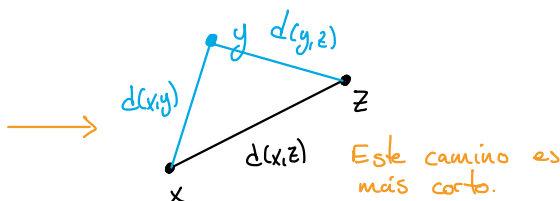
$$d = \text{dist}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Las propiedades de esta distancia pueden deducirse fácilmente de las de la norma: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$ se tiene:

- $d(x, y) \geq 0$ y $d(x, y) = 0 \iff x = y$

- $d(x, y) = d(y, x)$

- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$
(desigualdad triangular)

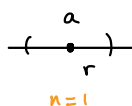


La función distancia nos permite definir los objetos que jugarán el papel de los intervalos:

Definición Sea $a \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. Se definen:

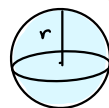
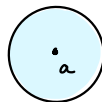
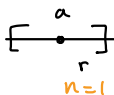
(i) Bola abierta de centro a y radio r :

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, a) < r\}$$



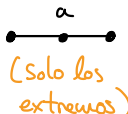
(ii) Bola cerrada de centro a y radio r :

$$\bar{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, a) \leq r\}$$

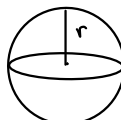


(iii) Esfera de centro a y radio r :

$$S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, a) = r\}$$



(Solo los extremos)



Ejemplo

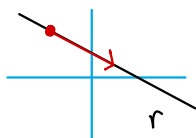
Si $n=2$, $d((x_1, x_2), (a_1, a_2)) = r \iff \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} = r \iff$

$\iff (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 = r^2$. Ecuación de la circunferencia.

Una vez hecha esta batería de definiciones, comenzamos un repaso breve de la geometría elemental de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

I.2. Repaso de geometría en 2D y 3D.

Rectas en $\mathbb{R}^2$



Una recta en $\mathbb{R}^2$ queda determinada por uno de sus puntos P y un vector director v :

$$r = \{P + \lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\} \quad (\text{Ecuación explícita})$$

$$(x_1, x_2) \in r \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : (x_1, x_2) = (p_1, p_2) + \lambda (v_1, v_2)$$

Esa ecuación vectorial nos da un sistema de ecuaciones que describe las coordenadas de los puntos de la recta:

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + \lambda v_1 \\ x_2 = p_2 + \lambda v_2 \end{cases} \quad (\text{Ecuación paramétrica})$$

Podemos eliminar el parámetro λ de este sistema, obteniendo una relación entre x_1 y x_2 : $v_2 x_1 - v_1 x_2 = p_1 v_2 - p_2 v_1$ (Ecuación implícita)

Planos en $\mathbb{R}^3$. Un plano en $\mathbb{R}^3$ queda determinado mediante uno de sus puntos, $P = (p_1, p_2, p_3)$ y dos vectores directores linealmente independientes, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

Por tanto, un plano en $\mathbb{R}^3$ viene definido como el conjunto de puntos

$$\Pi = \{P + \alpha \vec{v} + \beta \vec{w} : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}. \quad (\text{Ecuación explícita})$$

Equivalentemente,

$$(x_1, x_2, x_3) \in \Pi \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3) = (p_1, p_2, p_3) + \alpha (v_1, v_2, v_3) + \beta (w_1, w_2, w_3)$$

para algún $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Esta igualdad vectorial se traduce en un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + \alpha v_1 + \beta w_1 \\ x_2 = p_2 + \alpha v_2 + \beta w_2 \\ x_3 = p_3 + \alpha v_3 + \beta w_3 \end{cases} \quad (\text{Ecuaciones paramétricas})$$

Podemos eliminar α y β de este sistema, obteniendo una ecuación que relaciona x_1 , x_2 y x_3 :

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0$$

para ciertos coeficientes $A, B, C, D \in \mathbb{R}$.

Es fácil ver que dichos coeficientes son las coordenadas del vector producto $\vec{v} \wedge \vec{w}$: sea $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Pi$. Entonces, podemos escribir:

$$x = p + \alpha \vec{v} + \beta \vec{w}$$

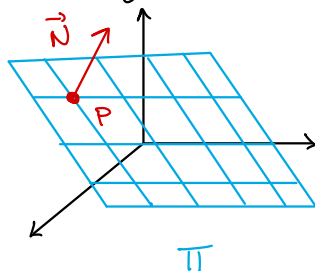
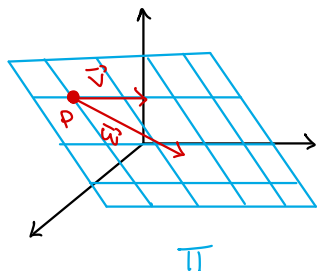
Tomamos ahora producto escalar por $\vec{v} \wedge \vec{w}$ en ambos lados de la ecuación:

$$\langle x, \vec{v} \wedge \vec{w} \rangle = \langle p, \vec{v} \wedge \vec{w} \rangle + \underbrace{\alpha \langle \vec{v}, \vec{v} \wedge \vec{w} \rangle + \beta \langle \vec{w}, \vec{v} \wedge \vec{w} \rangle}_{= 0 \text{ porque } \vec{v} \wedge \vec{w} \perp \vec{v}, \vec{w}}.$$

$$\Leftrightarrow \langle x - p, \vec{v} \wedge \vec{w} \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - p_1)(\vec{v} \wedge \vec{w})_1 + (x_2 - p_2)(\vec{v} \wedge \vec{w})_2 + (x_3 - p_3)(\vec{v} \wedge \vec{w})_3 = 0$$

Esta ecuación tiene el significado geométrico de que un plano en $\mathbb{R}^3$ queda determinado por uno de sus puntos y un vector ortogonal.



De la anterior ecuación sacamos también la información de que los coeficientes que acompañan a x_1, x_2, x_3 son las coordenadas de un vector ortogonal al plano.

TLDR: Si $Ax + By + Cz = D$ es un plano en $\mathbb{R}^3$, (A, B, C) es un vector normal a este.

Rectas en $\mathbb{R}^3$ Una recta en $\mathbb{R}^3$ puede definirse como la intersección de dos planos no paralelos, o como el conjunto de puntos determinado

por un punto $P = (P_1, P_2, P_3)$ y un vector director $v = (v_1, v_2, v_3)$, esto es,

$$r: \{P + \lambda v: \lambda \in \mathbb{R}\} \Rightarrow r: \begin{cases} x_1 = P_1 + \lambda v_1, \\ x_2 = P_2 + \lambda v_2, \\ x_3 = P_3 + \lambda v_3. \end{cases} \quad \text{Tenemos varias formas de eliminar } \lambda \text{ en este sistema.}$$

$$v_2 \cdot (1^a) - v_1 \cdot (2^a)$$

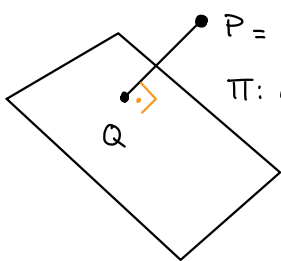
↓

Usando la 1ª y 2ª ecuación: $v_2(x_1 - P_1) - v_1(x_2 - P_2) = 0$ } Ecuaciones de dos planos.

Usando la 2ª y 3ª ecuación: $v_3(x_2 - P_2) - v_2(x_3 - P_3) = 0$

Para concluir la sección, deduciremos las fórmulas para calcular la distancia entre algunos de estos objetos.

① Distancia de un punto a un plano



La distancia mínima entre P y Π se alcanza en la dirección perpendicular a Π . Por tanto, lo que buscamos es la norma del vector $\vec{QP}$, siendo Q el punto en el que cortan Π y la recta perpendicular a Π que pasa por P .

Un vector normal a Π : $\vec{N} = (a, b, c)$

Recta perpendicular a Π que pasa por P : $r: \{P + \lambda \vec{N}: \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Un punto $x \in \mathbb{R}^3$ está en la intersección de r y Π si se cumple

$$\begin{cases} x = P + \lambda \vec{N} \\ \langle x, \vec{N} \rangle + d = 0 \end{cases} \quad \text{ } \Rightarrow \text{ sustituyendo } \Rightarrow \begin{aligned} &\langle P + \lambda \vec{N}, \vec{N} \rangle + d = 0 \\ &\Rightarrow \langle P, \vec{N} \rangle + \lambda \|\vec{N}\|^2 + d = 0 \\ &\Rightarrow \lambda = \frac{-d - \langle P, \vec{N} \rangle}{\|\vec{N}\|^2} \end{aligned}$$

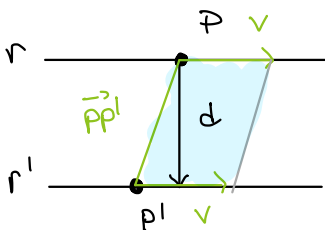
El punto de corte es $Q = P - \frac{d + \langle P, \vec{N} \rangle}{\|\vec{N}\|^2} \vec{N}$, luego la distancia que buscamos es la cantidad

$$\|\vec{QP}\| = \|P - Q\| = \left\| \frac{d + \langle P, \vec{N} \rangle}{\|\vec{N}\|^2} \vec{N} \right\| = \frac{|d + \langle P, \vec{N} \rangle|}{\|\vec{N}\|}$$

② **Distancia entre dos rectas.** Sean r y r' dos rectas en $\mathbb{R}^3$. Distinguimos casos en función de cómo interactúan estas:

2.1. Si r y r' son secantes, entonces su distancia mínima es 0.

2.2. Si r y r' son paralelas (mismo vector director $\vec{v}$) tomamos un punto cualquiera $P \in r$ y calculamos su distancia a r' .

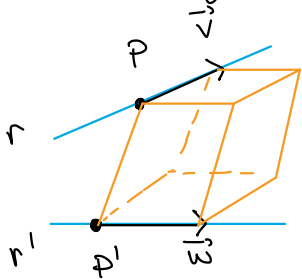


Tomamos un punto cualquiera $P' \in r'$. El área del paralelogramo formado por $\vec{PP'}$ y $\vec{v}$ sabemos que es $\|\vec{PP'} \wedge \vec{v}\|$, y también es base ($\|\vec{v}\|$) por altura (d):

$$\|\vec{v}\| \cdot d = \|\vec{PP'} \wedge \vec{v}\| \Rightarrow d = \frac{\|\vec{PP'} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}$$

Dale cuenta: si tomamos P' como el punto de mínima distancia, esta fórmula dice que $0=0$. En tal caso, la distancia que buscamos es $\|\vec{PP'}\|$

2.3. Supongamos por último que las dos rectas se cruzan.



Tomamos dos puntos $P \in r$ y $P' \in r'$ cualesquiera. La distancia que buscamos es la altura del paralelepípedo que forman $\vec{PP'}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

Usamos el mismo truco de antes:

$$\begin{aligned} \text{volumen} &= |\langle \vec{PP'}, \vec{v} \wedge \vec{w} \rangle| = d \cdot \text{Área (Base)} = d \|\vec{v} \wedge \vec{w}\| \\ \Rightarrow d &= \frac{|\langle \vec{PP'}, \vec{v} \wedge \vec{w} \rangle|}{\|\vec{v} \wedge \vec{w}\|} \end{aligned}$$

I.3. Representación gráfica de campos escalares.

Definición Sea $n \in \mathbb{N}$ y $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Un campo (o función) escalar es una aplicación

$$f: U \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}.$$

Dado $m \in \mathbb{N}$ $m \geq 2$, un campo (o función) vectorial es una aplicación de la forma

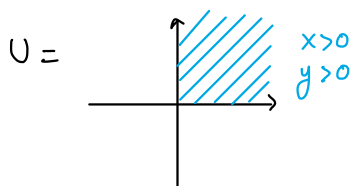
$$F: U \rightarrow \mathbb{R}^m \\ (x_1, \dots, x_n) \rightarrow F(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^m.$$

Para cada $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $F(x_1, \dots, x_n)$ es un vector de $\mathbb{R}^m$, luego tiene m coordenadas a las que denotaremos $F_i(x_1, \dots, x_n)$. Esto nos permite escribir:

$$F(x_1, \dots, x_n) = (F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_m(x_1, \dots, x_n)).$$

Cada función $F_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es un campo escalar que suele llamarse i -ésima función coordenada de F .

Ejemplo: $F: (0, +\infty) \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ $F(x, y, z) = (\log x, y^x \log x, \log(xy))$

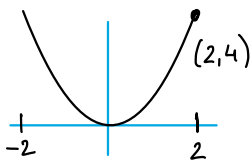


$$\begin{aligned} F_1: U &\rightarrow \mathbb{R} & F_1(x, y) &= \log x \\ F_2: U &\rightarrow \mathbb{R} & F_2(x, y) &= y^x \log x \\ F_3: U &\rightarrow \mathbb{R} & F_3(x, y) &= \log(xy) \end{aligned}$$

Definición Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar. La gráfica de f es el conjunto de $U \times \mathbb{R} (\subseteq \mathbb{R}^{n+1})$

$$\begin{aligned} \text{Graf}(f) &= \{(x, f(x)) : x \in U\} \\ &= \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, \dots, x_n) \in U, x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)\} \end{aligned}$$

Ejemplo $n=1$, $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$

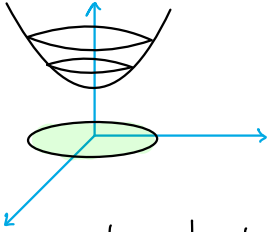


$$\text{Graf}(f) = \{ (x, x^2) : x \in \mathbb{R} \} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 \}$$

Ejemplo

$n=2$

$$f: \overline{B}(\vec{0}, 1) \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$$



$$\text{Graf}(f) = \{ (x, y, x^2 + y^2 + 1) : (x, y) \in \overline{B}(\vec{0}, 1) \}$$

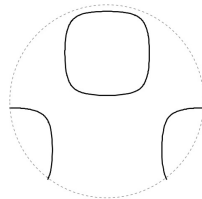
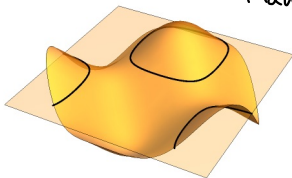
Para concluir este tema, veremos una técnica para representar la gráfica de un campo escalar, consistente en dibujar la intersección de esta con distintos planos.

Curvas y superficies de nivel

Definición Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar y $c \in \mathbb{R}$. El conjunto de nivel c de f es el conjunto de puntos $\{x \in U : f(x) = c\}$

Geométricamente, se corresponde con la intersección de la gráfica de f con $\{x_n = c\}$, y proyectar a $\mathbb{R}^n$. Si $n=2$ las llamaremos curvas de nivel, y si $n=3$ serán superficies de nivel.

$$\text{Plano: } \{z = 1/5\}$$



$$f: \overline{B}(0, 1) \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x, y) = \cos(\pi x) \sin(\pi y)$$

Curva de nivel $c = 1/5$

Date cuenta. los conjuntos de nivel pueden ser vacíos. En el ejemplo anterior, si tomamos $c = 2$, vemos que

$$|f(x,y)| = |\cos \pi x \sin \pi y| = |\cos \pi x| |\sin \pi y| \leq 1 \cdot 1 = 1 \quad \forall x,y \in \overline{B}(0,1)$$

$$\text{luego } \{(x,y) \in \overline{B}(0,1) : f(x,y) = 2\} = \emptyset.$$

Ejemplos

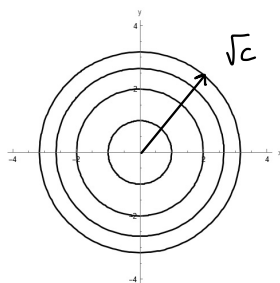
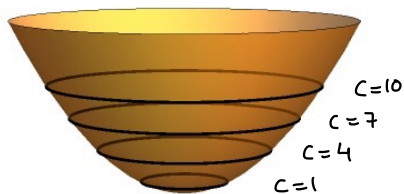
① Sean $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x,y) = x^2 + y^2$ y $c \in \mathbb{R}$. la curva de nivel c es el conjunto

$$\Gamma_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = c\}$$

Si $c < 0$, la ecuación anterior no tiene solución, luego $\Gamma_c = \emptyset$.

Si $c = 0$, el único punto (x,y) que cumple $x^2 + y^2 = 0$ es $(0,0)$.

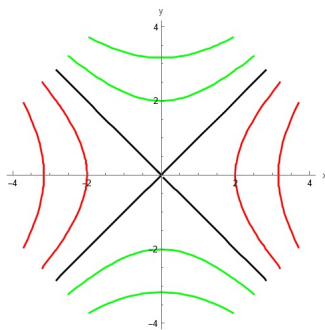
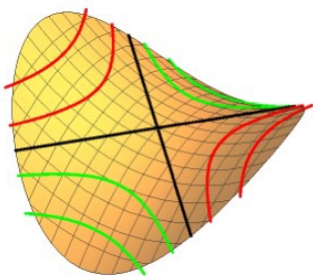
Sea $c > 0$. La ecuación $x^2 + y^2 = c$ se corresponde con una circunferencia de radio $\sqrt{c}$ centrada en $(0,0)$.



Paraboloid

② Sean $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x,y) = x^2 - y^2$ y $c \in \mathbb{R}$. Para estudiar las curvas de nivel, debemos distinguir dos casos:

- Si $c=0$, $x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow |x| = |y|$.
 $\Leftrightarrow y = x \parallel y = -x$. Esto se corresponde con dos rectas
- Si $c > 0$, podemos despejar $x = \pm \sqrt{y^2 + c}$, que es una unión de gráficas sobre el eje x
- Si $c < 0$, entonces despejamos $y = \pm \sqrt{x^2 - c}$



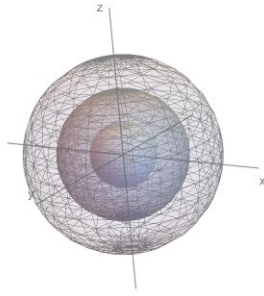
Paraboloides hiperbólico

En general, para una función $f(x,y) = ax^2 + by^2 + c$ con $a, b \neq 0$ se tiene:

- Si $ab > 0$, la gráfica tiene la forma de un paraboloides
- Si $ab < 0$, la gráfica tiene la forma de un hiperboloides.

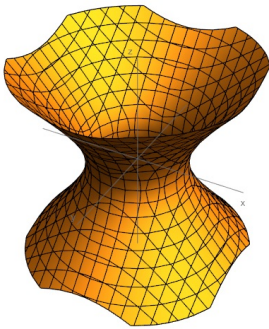
③ Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. Dado $c \in \mathbb{R}$, vemos que su superficie de nivel c es

$$\Sigma_c = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = c \} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } c < 0 \\ (0,0,0) & \text{si } c = 0 \\ S((0,0,0), \sqrt{c}) & \text{si } c > 0 \\ \text{(Esfera de centro } \vec{0} \text{ y radio } \sqrt{c}) \end{cases}$$

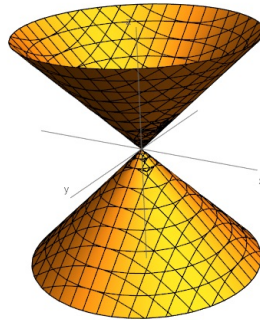


La gráfica de f sería la análoga al paraboloide pero en 4D.

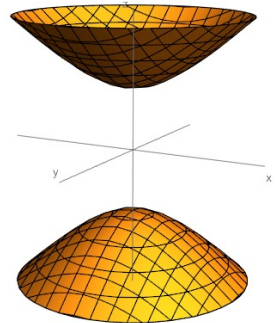
- ④ Sean $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ y $c \in \mathbb{R}$. En este caso, observamos el siguiente fenómeno al variar el signo de c :
- $$\Sigma_c = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = c \}$$



$c > 0$ hiperboloide de una hoja



$c = 0$ Cono
 $\{ z^2 = x^2 + y^2 \}$



$c < 0$ hiperboloide de dos hojas.

- ⑤ Si detectamos simetrías en la gráfica de una función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, estas simplificarán la tarea de representarla.

El ejemplo más típico es la simetría rotacional respecto de $(0,0)$, que es cuando manejamos una ecuación de la forma $z = h(x^2 + y^2)$.

Ejemplo (Ejercicio 11-a) Se nos pide representar la superficie

$$\Sigma = \{(x,y,z) : z = 1 - x^2 - y^2\}$$

o, equivalentemente, la gráfica de la función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$.

Observamos que f depende solo de $x^2 + y^2$, lo que nos motiva a pasar a coordenadas polares:

$$x = r \cos \theta$$

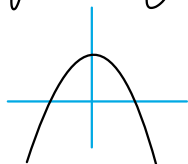
$$y = r \sin \theta$$

$$r > 0, \theta \in [0, 2\pi]$$

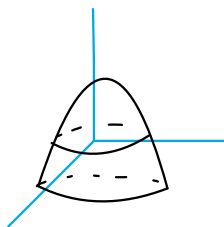
$$\begin{aligned} f(r, \theta) &= 1 - r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta = 1 - r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ &= 1 - r^2. \end{aligned}$$

Observamos que no depende del ángulo θ , luego tenemos simetría rotacional

gráfica de $f(r)$



rotamos
→
alrededor del
eje z



Esta clase de superficies
se llaman de revolución.

Bloque II - Límites y continuidad

II.1. Topología de $\mathbb{R}^n$

Para empezar, discutiremos algunas propiedades de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que nos permitirán hablar de límites, continuidad y diferenciabilidad.

Definición:

① Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $U \neq \emptyset$. Se dice que U es acotado si existe $r > 0$ tal que $U \subseteq B(\vec{0}, r)$ (es decir, si cabe en una bola).

← No necesariamente en U .

② Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $U \neq \emptyset$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$. x_0 es un punto de acumulación de U si para todo $\varepsilon > 0$:

← Bola punteada

$$B(x_0, \varepsilon) \setminus \{x_0\} \cap U \neq \emptyset$$

Intuitivamente, x_0 es un punto de acumulación de U si podemos llegar hasta x_0 por puntos de U que no son x_0 .

Denotamos por U' al conjunto de todos los puntos de acumulación de U .

③ $x \in U$ es un punto interior de U si existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq U$.

U° denotará al conjunto de puntos interiores de U , también llamado interior de U . Todos los puntos interiores son de acumulación.

④ Decimos que U es abierto si $U = U^\circ$ (todos sus puntos son interiores)

⑤ Llamamos cierre de U y lo denotamos con $\bar{U}$ al conjunto

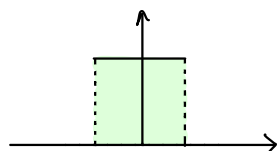
$$\bar{U} = U \cup U'$$



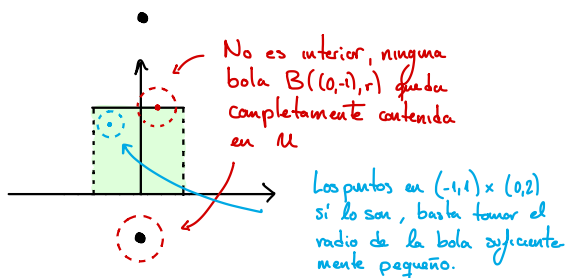
- ⑥ Decimos que U es cerrado si $U = \bar{U}$. Esta condición es equivalente a $U' \subseteq U$, y a que $\mathbb{R}^n \setminus U$ sea abierto.
- ⑦ Se define la frontera de U como $\text{Fr}(U) = \bar{U} \setminus U^\circ$
- ⑧ Decimos que U es compacto si es cerrado y acotado.

Esto solo puede tomarse como definición en espacios de dimensión finita como $\mathbb{R}^n$. La definición real es más complicada.

Ejemplos ① $U = (-1, 1) \times [0, 2] \cup \{(0, -1)\}$

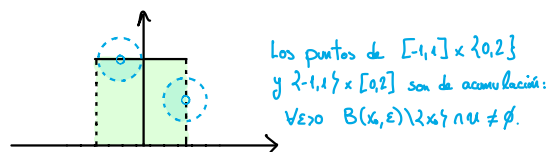


Empezamos estudiando los puntos interiores, ya que son de acumulación y por tanto por k del cierre.



$$U^\circ = (-1, 1) \times (0, 2).$$

A continuación, estudiamos los puntos de acumulación. Sabemos que $U^\circ \subseteq U'$, debemos ver si hay más.



Entonces, $U' = [-1, 1] \times [0, 2]$.
Consecuentemente,

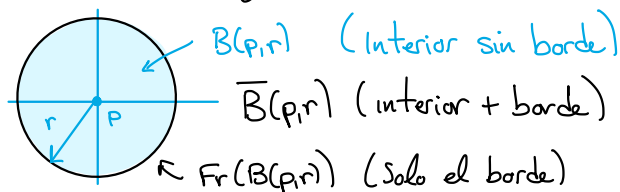
Tomando $r > 0$ suficientemente pequeño, encontramos una bola punteada que no corta a U !

$$\begin{aligned}\bar{U} &= U \cup U' = [-1, 1] \times [0, 2] \cup \{(0, -1)\} \\ \text{Fr}(U) &= \bar{U} \setminus U^\circ = \{-1, 1\} \times [0, 2] \cup \\ &\quad [-1, 1] \times \{0, 2\} \cup \{(0, -1)\}.\end{aligned}$$

U es acotado pero no es compacto porque no es cerrado.

- ② Sea $B(p, r)$ una bola abierta de centro p y radio $r > 0$.

Entonces $B(p, r)$ es abierta, $\overline{B(p, r)} = \overline{B(p, r)}$ (su cierre es la bola cerrada) y $\text{Fr}(B(p, r)) = S(p, r)$



Como motivación para la definición de límite, hablaremos de sucesiones en $\mathbb{R}^n$ y veremos formalmente la relación entre el cierre de un conjunto y las sucesiones convergentes de puntos de este.

Definición Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Una sucesión en U es una aplicación $S: \mathbb{N} \rightarrow U$ $k \mapsto S(k)$. Usualmente, identificamos una sucesión con su imagen, que es una lista ordenada de puntos de U :

$$S(\mathbb{N}) = \{S(1), S(2), \dots, S(k), \dots\}$$

En lugar de escribir $S(k)$, preferimos la notación x_k , mientras que la sucesión S será denotada con $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ (o simplemente $\{x_k\}$ si no hay confusión).

Para cada $k \in \mathbb{N}$, $x_k \in \mathbb{R}^n$, por lo que admite una expresión en coordenadas. Cuando trabajamos con sucesiones, usaremos una notación que nos permita diferenciar entre la posición en la sucesión y la coordenada:

$$x_k = (x_k(1), x_k(2), \dots, x_k(n)) \quad x_k(i) \equiv i\text{-ésima coordenada del } k\text{-ésimo término de la sucesión.}$$

Usando la norma de $\mathbb{R}^n$, podemos hablar de sucesiones limitadas y sucesiones convergentes.

Definición Decimos que $\{x_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ está acotada si existe $M > 0$ tal que $\|x_k\| \leq M \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Esto es equivalente a decir que el conjunto de todos los puntos de la sucesión $\{x_1, \dots, x_k, \dots\}$ está contenido en $\overline{B}(\vec{0}, M)$.

Definición Decimos que $\{x_k\}$ es convergente cuando existe $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ de modo que

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N}: k > k_0 \Rightarrow \|x_k - \bar{x}\| = \text{dist}(x_k, \bar{x}) < \varepsilon$$

En tal caso, $\bar{x}$ es único y lo llamamos límite de x_k , y lo notamos por:

$$\bar{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \quad \text{o} \quad x_k \rightarrow \bar{x} \quad (k \rightarrow \infty).$$

En vista de la definición anterior:

$$x_k \rightarrow \bar{x} \Leftrightarrow \|x_k - \bar{x}\| \rightarrow 0 \Leftrightarrow (x_k(1) - \bar{x}_1)^2 + \dots + (x_k(n) - \bar{x}_n)^2 \rightarrow 0$$

$$\Leftrightarrow |x_k(i) - \bar{x}_i| \rightarrow 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \Leftrightarrow \{x_k(i)\} \rightarrow \bar{x}_i \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Es decir, la convergencia de x_k equivale a la convergencia de todas las coordenadas de la sucesión.

Ejemplo Consideramos la sucesión en $\mathbb{R}^2$ $x_k = (\sin k, 1 - \cos k)$. Podemos ver que

$$\|x_k\| = \sqrt{\sin^2 k + 1 + \cos^2 k - 2 \cos k} = \sqrt{2(1 - \cos k)} \leq 2$$

$\{x_k\}$ está acotada, pero no converge porque, por ejemplo, su primera coordenada $x_k(1) = \sin k$ no es una sucesión convergente.

Recordamos la noción de sucesión parcial, ya que aparecerá en los resultados que veremos a continuación.

Definición: Sean $\{y_k\}$ y $\{x_k\}$ dos sucesiones en $\mathbb{R}^n$. Decimos que $\{y_k\}$ es una parcial de $\{x_k\}$ si existe una aplicación $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ creciente tal que $y_k = x_{\sigma(k)} \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Las siguientes propiedades de las sucesiones son elementales, pero vale la pena recordarlas:

Propiedades.

- ① Sean $\{x_k\} \rightarrow \bar{x}$, $\{y_k\} \rightarrow \bar{y}$ sucesiones en $\mathbb{R}^n$ y $\{a_k\} \rightarrow a$ y $\{b_k\} \rightarrow b$ sucesiones en $\mathbb{R}$. Entonces;
- $$\{a_k x_k + b_k y_k\} \rightarrow a\bar{x} + b\bar{y} \in \mathbb{R}^n$$
- ② Sea $\{x_k\}$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$ y $\{x_{\sigma(k)}\}$ una sucesión parcial. Si $\{x_k\} \rightarrow \bar{x}$, entonces $\{x_{\sigma(k)}\} \rightarrow \bar{x}$.

En particular, si tenemos dos sucesiones parciales que convergen a límites distintos, $\{x_k\}$ no puede ser convergente.

Teorema: (Bolzano-Weierstrass) Toda sucesión acotada de $\mathbb{R}^n$ admite una parcial convergente.
Este resultado también es exclusivo de espacios de dimensión finita.

Los siguientes resultados nos caracterizan los puntos del cierre de un conjunto mediante sucesiones:

Proposición Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$. $x \in \mathbb{R}^n$ es un punto de acumulación de U $\Leftrightarrow$ existe una sucesión $\{x_k\}$ en $U \setminus \{x\}$ tal que $\{x_k\} \rightarrow x$.

Proposición Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\{x_k\}$ una sucesión en U . Si $\{x_k\} \rightarrow x$, entonces $x \in \bar{U}$.

Una consecuencia de los dos resultados anteriores es que los límites de sucesiones de U , o están en U , o son puntos de acumulación de U .

Otra consecuencia importante es la siguiente:

Corolario Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un compacto. Entonces, toda sucesión en K admite una parcial convergente a un punto de K .

Demostración Sea $\{x_k\}$ una sucesión en K . Como K es acotado, también lo es $\{x_k\}$. Por Bolzano-Weierstrass, $\exists \{x_{k_j}\} \rightarrow \bar{x}$. Sabemos que $\bar{x} \in \bar{K}$ por la proposición anterior, pero K es cerrado luego $\bar{K} = K$. $\square$

II.2. Límite funcional

Podemos tomar límite en puntos que no están en U

Definición Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \in U'$ y $F: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ un campo. Decimos que F tiene límite $L \in \mathbb{R}^m$ en $\bar{x}$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \left[\forall x \in U : \|x - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \|F(x) - L\| < \varepsilon \right]$$

"Dada una bola arbitrariamente pequeña alrededor de L , siempre podemos encontrar una bola lo suficientemente pequeña alrededor de $\bar{x}$ de forma que si x está en esta, entonces $F(x)$ está en la segunda".

En tal caso, $L \in \mathbb{R}^m$ es único y recibe el nombre de límite de F en $\bar{x}$, que denotamos mediante:

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} F(x) = L, \text{ o bien } F(x) \rightarrow L \text{ (} x \rightarrow \bar{x} \text{)}$$

Obsérvese que $\bar{x}$ debe ser punto de acumulación para que siempre haya puntos de U en una bola centrada en $\bar{x}$.

Utilizando el lenguaje de las sucesiones podemos dar una caracterización (definición equivalente) del límite funcional que es más útil para demostrar la no-existencia de este

Proposición: $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} F(x) = L \iff$ para toda sucesión $\{x_k\}$ en $U \setminus \{\bar{x}\}$

tal que $\{x_k\} \rightarrow \bar{x}$, se tiene $\{F(x_k)\} \rightarrow L$.

Por contrarrecíproco, esto quiere decir, entre otras cosas, que si encontramos $\{x_k\}$, $\{y_k\} \rightarrow \bar{x}$, pero $F(x_k) \rightarrow L_1$ y $F(y_k) \rightarrow L_2$ con $L_1 \neq L_2$, entonces F no puede tener límite en $\bar{x}$. (de tener uno, sería único).

Ejemplo Sea $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}.$$

Nos preguntamos si f tiene límite en $(0,0)$. Tomamos dos sucesiones,

$$\{a_k\} = \{(1/k, 0)\}, \quad \{b_k\} = \{(0, 1/k)\}$$

claramente $a_k, b_k \neq (0,0) \quad \forall k \in \mathbb{N}$ y $\{a_k\}, \{b_k\} \rightarrow 0$.

Sin embargo, se tiene:

$$F(a_k) = \frac{1/k^2}{1/k^2} = 1 \rightarrow 1, \quad F(b_k) = \frac{0}{1/k^2} = 0 \rightarrow 0$$

Por tanto, $\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$.

Recordamos algunas propiedades básicas del álgebra de límites

Proposición: Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \in U'$, $F, G: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ dos campos, y $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar tales que:

$$F(x) \rightarrow L, \quad G(x) \rightarrow M, \quad f(x) \rightarrow a \quad (x \rightarrow \bar{x}).$$

Entonces,

$$(i) \quad F+G = (F_1+G_1, \dots, F_m+G_m) \rightarrow L+M \quad (x \rightarrow \bar{x})$$

$$(ii) \quad fF = (fF_1, \dots, fF_m) \rightarrow aL \quad (x \rightarrow \bar{x})$$

$$(iii) \quad \text{Si } a \neq 0, \quad \frac{1}{f} F \rightarrow \frac{L}{a} \quad (x \rightarrow \bar{x}).$$

Proposición: Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \in U'$ y $F: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ un campo. Entonces

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} F(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow \bar{x}} F_i(x) = L_i \quad \forall i=1, \dots, m.$$

La relación entre el límite funcional y la composición de funciones la veremos más adelante, ya que necesitamos el concepto de continuidad para enunciar el resultado que usaremos más frecuentemente.

En lo que sigue, nos limitamos al caso particular de campos escalares de $\mathbb{R}^2$, es decir, $n=2$ y $m=1$. Nuestra intención es dar criterios de existencia y no-existencia y herramientas para calcularlos.

1 Límites iterados

Esto significa que (x_0, y_0) esté rodeado por todas partes por puntos de U .

Ejemplo: $(0,0)$ en $\mathbb{R}^2 \setminus \{ (0,0) \}$.

Sean $U \subseteq \mathbb{R}^2$ y $(x_0, y_0) \in U'$. En toda esta sección, supondremos que existe $\rho > 0$ de forma que $B((x_0, y_0), \rho) \subseteq U \cup \{ (x_0, y_0) \}$.

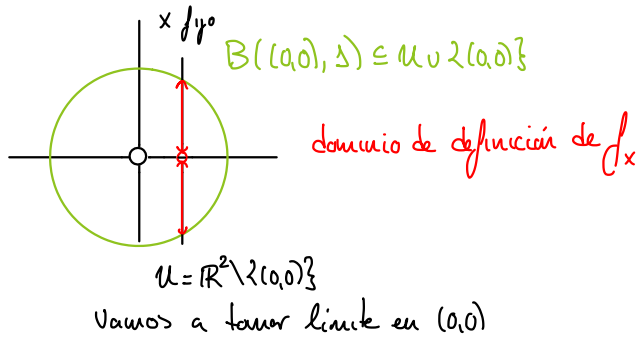
Para aliviar la notación, usaremos la siguiente notación:

- Fijado x , sea f_x la función $f_x(y) = f(x, y)$, definida para

todo $y \in U_x = \{y \in]y_0 - r, y_0 + r[\setminus \{y_0\} : (x, y) \in U\}$

Es decir, f_x es la función f pero que ve x como un parámetro fijo, esto es, solo depende de y .

- Fijado y , f_y se define de forma análoga



Definición. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^2$ y $(x_0, y_0) \in U'$ en las condiciones anteriores, y $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar. Decimos que L es el límite iterado en x e y de f en (x_0, y_0) si $f_y \rightarrow L(y)$ ($x \rightarrow x_0$) y $L(y) \rightarrow L$ ($y \rightarrow y_0$), es decir,

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) \right) = L$$

De la misma forma, decimos que L es el límite iterado de y y x de f en (x_0, y_0) si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \right) = L.$$

Proposición (Criterio de los límites iterados) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^2$ y $(x_0, y_0) \in U'$ en las condiciones anteriores, y $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar tal que $f(x, y) \rightarrow L$ ($(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$). Entonces;

- (i) Si existe $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) \Rightarrow \lim_{y \rightarrow y_0} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) \right) = L.$

(ii) Si existe $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y) \right) = L$.

Observaciones

- 1) La aplicación más frecuente del criterio es la siguiente: si existen los dos límites iterados y no coinciden, entonces no existe el límite en dos variables. Además, si existe la primera iteración y no la segunda en cualquier límite iterado, entonces no puede existir el límite doble.
- 2) Aunque los límites iterados existan y sean iguales, esto no significa necesariamente que el límite doble exista y valga lo mismo.

Ejemplos ① ¿Existe el límite $(x,y) \rightarrow (0,0)$ de $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$?

Vemos que

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x,y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} -1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x,y) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$$

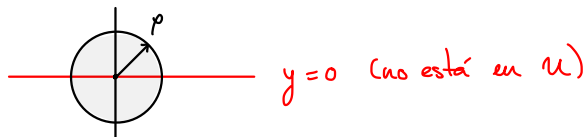
los límites iterados existen y son distintos $\Rightarrow \nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

Ejemplo ② ¿Existe el límite cuando $(x,y) \rightarrow (0,0)$ de $x \sin(1/y)$?

En este caso, no podemos aplicar el criterio de límites iterados tal cual lo hemos enunciado, ya que f está definida en

$$U = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0 \},$$

y aunque $(0,0) \in U^1$, $\nexists$ ningún $\rho > 0$ de forma que $B((0,0), \rho) \subseteq U \cup \{(0,0)\}$.



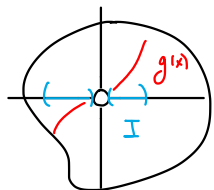
2 límites direccionales.

Definición Sean $U \subseteq \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in U$ y $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar. Para $\gamma > 0$, definimos $I =]x_0 - \gamma, x_0 + \gamma[\setminus \{x_0\}$, y consideramos una función $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(I) \subseteq U$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = y_0$.

Decimos que $L \in \mathbb{R}$ es el límite de f en (x_0, y_0) en la dirección $y = g(x)$ si:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, g(x)) = L \quad (\text{límite en una variable})$$

A menudo, esto se denota por $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ y = g(x)}} f(x,y) = L$.



La idea es aproximarnos a (x_0, y_0) a través de la gráfica de la función g . Para ello, imponemos que dicha gráfica esté en el dominio de definición de la función f .

* De igual manera pueden tomarse límites en una dirección $x = g(y)$.

Proposición (Criterio de los límites direccionales) Si f tiene límite L en (x_0, y_0) y g es una función como hemos descrito antes, entonces el límite en la dirección g existe y vale L .

Como consecuencia, si un límite direccional no existe, o dos existen y son distintos, no puede existir el límite de f en (x_0, y_0) .

Ejemplo Estudiar el límite en $(0,0)$ de $\frac{xy}{x^2+y^4}$.

Dado $m \in \mathbb{R}$, haremos de una vez la familia de límites direccionales $x = my^2$.

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(my^2, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{my^4}{m^2y^4 + y^4} = \frac{m}{1+m^2}$$

El límite depende de m , luego no puede existir.

Los anteriores criterios nos permiten decidir si un límite no existe.
Pasamos ahora a ver resultados de existencia.

3 Límites por acotación

Proposición Sean $U \subseteq \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in U'$ y $f, g, h: U \rightarrow \mathbb{R}$ campos escalares. Suponemos que existe $\rho > 0$ de forma que

$$f(x, y) \leq g(x, y) \leq h(x, y) \quad \forall (x, y) \in B((x_0, y_0), \rho) \cap U.$$

Entonces, si $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = L$ y $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} h(x, y) = L$, se tiene también $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} g(x, y) = L$.

Ejemplo Estudiar la existencia de límite en $(0, 0)$ de $x \sin(1/y)$.

Tomamos valor absoluto y vemos fácilmente que

$$f(x, y) = 0 \rightarrow 0 \leq |x \sin 1/y| \leq |x|. \quad \leftarrow h(x, y) = |x| \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0) \\ \text{constantemente } 0 \quad \quad \quad (\text{solo depende de una variable})$$

Entonces, por acotación, $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} x \sin 1/y = 0$.

Acotación notable: $\frac{xy}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2} \quad \forall (x, y) \neq (0, 0)$

Por último, vemos el único criterio que establece condiciones necesarias y suficientes para que exista un límite en dos variables:

4 Límites en coordenadas polares

En primer lugar, damos la definición rigurosa del cambio a coordenadas polares.

Definición: Sean $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $G: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^q$ dos campos. El campo F compuesto con G se define como la aplicación

$$G \circ F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$$

$$G \circ F(x) = G(F(x))$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{F} & \mathbb{R}^m & \xrightarrow{G} & \mathbb{R}^q \\ x & & F(x) & & G(F(x)) \end{array}$$

$\xrightarrow{G(F)}$

En coordenadas, $G \circ F = (G_1(F), \dots, G_q(F))$.

Definición Por cambio a coordenadas polares entendemos la composición con el campo vectorial

$$\Phi: \mathbb{R}^+ \times]-\pi, \pi[\xrightarrow{(r, \theta)} \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\} \xrightarrow{(x, y)}$$

$$\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

Φ es una biyección y su inversa es

$$\Phi^{-1}(x, y) = (\| (x, y) \|, \arg(x, y))$$

Hay varias fórmulas para $\arg(x, y)$, pero esta es la más fácil de recordar

donde $\arg(x, y) = \operatorname{sgn}(y) \arccos \frac{x}{\| (x, y) \|}$ $\left(\operatorname{sgn}(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \geq 0 \\ -1 & \text{si } y < 0 \end{cases} \right)$

Proposición (Criterio por paso a polares) Sean $L \in \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $B((0, 0), \rho) \subseteq U \cup \{(0, 0)\}$ y $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar. Se tiene:

(1) Si $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = L \Rightarrow \lim_{\rho \rightarrow 0} f(\Phi(r, \theta)) = L \quad \forall \theta \in [-\pi, \pi]$

(por tanto, si el segundo límite depende de θ , el primero no existe).

(2) Supongamos que existe $h:]0, \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\lim_{\rho \rightarrow 0} h(\rho) = 0$ y, para todo $\theta \in [-\pi, \pi]$,

$$|f(\Phi(r, \theta)) - L| \leq |h(r)|$$

Entonces, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = L$.

¿Cómo se usa? Estudiamos $f(\Phi(r, \theta))$. Si el valor de $\lim_{r \rightarrow 0} f(\Phi(r, \theta))$ depende de θ , inclusive si no existe para algún θ , entonces el límite $(x,y) \rightarrow (0,0)$ no existe.

Por otro lado, si podemos mayorar $|f(\Phi(r, \theta)) - L|$ por algo que no depende de θ y tiene límite 0, entonces el límite existe y vale L .

El candidato a límite L podemos encontrarlo, por ejemplo, usando los anteriores criterios de no existencia (iterados, direccionales).

Ejemplos ① límite en $(0,0)$ de $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$.

Pasamos a coordenadas polares y vemos qué pasa cuando $r \rightarrow 0$.

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \cos^2 \theta}{r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = \cos^2 \theta$$

El límite depende claramente de θ , luego $\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$.

② Límite en $(0,0)$ de $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$.

Hacemos el cambio a polares y observamos que:

$$0 \leq |f(r \cos \theta, r \sin \theta)| = \frac{r^3 |\cos \theta \sin^2 \theta|}{r^2} = r |\cos \theta \sin^2 \theta| \leq r \rightarrow 0$$

No depende de θ .

Entonces, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$.

III. Continuidad Por último, vemos la definición de continuidad para campos vectoriales y su estrecha relación con el límite funcional y la topología de $\mathbb{R}^n$.

Definición Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $a \in U$. Decimos que un campo $F: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ es continuo en a si se verifica:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: [\forall x \in U: \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|F(x) - F(a)\| < \varepsilon].$$

Si $a \in U \cap U'$, entonces esta condición es equivalente a $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = F(a)$.

Si $a \in U \setminus U'$, entonces F es continua en a siempre.

↖ Puntos aislados.

Además, decimos que F es continua en $W \subseteq U$ si es continua en $b \in W$ para todo $b \in W$.

Ejemplos elementales de funciones continuas

(i) Las proyecciones $\pi_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\pi_i(x) = x_i$ y las inyecciones $i_j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$
 $i_j(x) = x e_j$ son continuas $\forall i = 1, \dots, n$ $\forall j = 1, \dots, m$.

(ii) Toda función racional $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ es continua en su dominio de definición, esto es,

$$\{x \in \mathbb{R}^n: Q(x) \neq 0\},$$

siendo $P(x)$ y $Q(x)$ funciones polinómicas de n -variables.

(iii) Las funciones elementales de variable real ($\exp$, $\log$, $\sqrt[n]{}$, $\sin$, $\cos \dots$) son continuas en su dominio de definición.

Los siguientes resultados nos permitirán ampliar nuestro catálogo de funciones continuas.

Proposición Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in U$, $F, G: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ campos continuos en a . Entonces $F+G$ y fF son continuos en a . Si además $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in U$, entonces también lo es F/f .

Proposición: Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in U$ y $F: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ un campo continuo en U . Sean además $W \subseteq F(U)$ y $G: W \rightarrow \mathbb{R}^q$ un campo continuo en $F(a)$. Entonces $G \circ F: U \rightarrow \mathbb{R}^q$ es continuo en a .

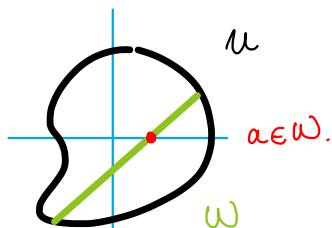
El siguiente resultado evidencia que la continuidad es una propiedad local, es decir, que para estudiar la continuidad en un punto $a \in U$ solo nos debemos preocupar de lo que vale la función cerca de a .

Proposición Sean $W \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in W$ y $F: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ un campo. Entonces

- (i) Si F es continuo en a , $F|_W$ es continuo en a .
- (ii) Si $F|_W$ es continuo en a y existe $\rho > 0$ tal que

$$B(a, \rho) \cap U \subseteq W,$$

entonces F es continuo en a .



Que $F|_W$ sea continua en a no quiere decir que lo sea F , ya que al considerar solo puntos de W no vemos muchas de las direcciones del espacio.

Ejemplo Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ el campo definido como

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x-y)}{x-y} & \text{si } x \neq y, \\ x & \text{si } x = y. \end{cases}$$

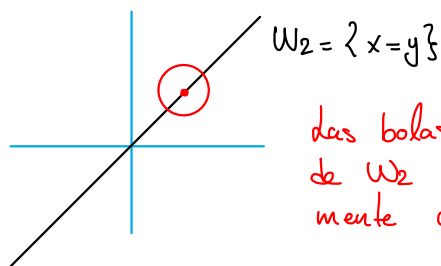
$$W_1 = \{(x, y) : x \neq y\}$$

$$W_2 = \{(x, y) : x = y\}$$

Como W_1 es abierto, la continuidad de f en W_1 equivale a la de $f|_{W_1}$.

$f|_{W_1}(x,y) = \frac{\sin(x-y)}{x-y}$, que es continua por ser cociente de funciones continuas donde el denominador no se anula.

Claramente $f|_{W_2}(x,y) = x$ es continua, pero esto no significa que f sea continua en W_2 , ya que no satisface la condición de antes



las bolas centradas en puntos de W_2 no se quedan completamente contenidas en W_2 .

Sea (c,c) un punto genérico de $W_2 = \{(x,y): x=y\}$. Para estudiar el límite, usamos coordenadas polares centradas en (c,c) :

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(c+r\cos\theta, c+r\sin\theta) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sin(r(\cos\theta - \sin\theta))}{r(\cos\theta - \sin\theta)} = 1,$$

donde hemos usado que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, ya que $r(\cos\theta - \sin\theta) \rightarrow 0$ para todo $\theta \in [-\pi, \pi]$.

Por lo tanto, 1 será nuestro candidato a límite. Para aplicar correctamente el criterio de cambio a polares, hacemos lo siguiente

$$\begin{aligned} & \lim_{\rho \rightarrow 0} \left| \frac{\sin(\rho(\cos\theta - \sin\theta))}{\rho(\cos\theta - \sin\theta)} - 1 \right| = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \left| \frac{\sin(\rho(\cos\theta - \sin\theta)) - \rho(\cos\theta - \sin\theta)}{\rho(\cos\theta - \sin\theta)} \right| \end{aligned}$$

Sabemos que el polinomio de Taylor de $\sin x$ en $x=0$ es $\sin x = x + R(x)$, donde $R(x)$ es un resto que satisface $|R(x)| \leq Cx^3$, con C constante (el segundo término en la expansión es cero).

Entonces, $|\sin x - x| \leq C|x|^3$ para x suficientemente cerca de cero. Tomando $x = \rho(\cos \theta - \sin \theta) \rightarrow 0 \quad \forall \theta \in [-\pi, \pi]$, se tiene:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left| \frac{\sin(\rho(\cos \theta - \sin \theta)) - \rho(\cos \theta - \sin \theta)}{\rho(\cos \theta - \sin \theta)} \right| \leq$$

Acotado por una función que no depende de θ
↓

$$\leq \lim_{\rho \rightarrow 0} C \frac{\rho^3 |\cos \theta - \sin \theta|^3}{\rho |\cos \theta - \sin \theta|} = \lim_{\rho \rightarrow 0} C \rho^2 |\cos \theta - \sin \theta|^2 \leq \lim_{\rho \rightarrow 0} 4C\rho^2$$

$= 0$. Entonces, por el criterio de paso a coordenadas polares,

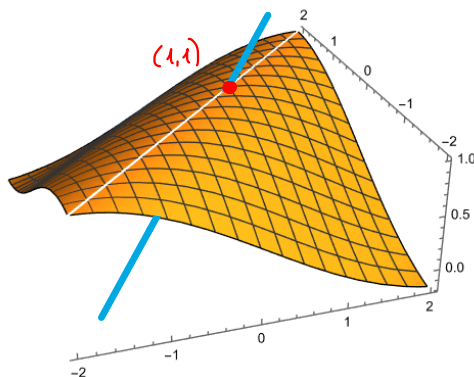
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (c,c)} f(x,y) = 1$$

Entonces, f es continua en $(c,c) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (c,c)} f(x,y) = f(c,c) = c$$

$$\Leftrightarrow c = 1.$$

f es continua en (x,y) si $x \neq y$,
o si $(x,y) = (1,1)$, pero no
en (x,y) si $x=y \neq 1$.



Proposición Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in U$ y $F: U \rightarrow \mathbb{R}^m$. Entonces F es continuo en $a \iff F_i$ es continuo en $a \quad \forall i=1, \dots, m$.

Proposición (regla de la cadena para límites) Sean $U, W \subseteq \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \in U$ y $\varphi: U \rightarrow W$ un campo biyectivo y continuo (por ejemplo, el cambio a polares).

Si: $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \varphi(x) = \bar{y} \in W$ y $F: W \rightarrow \mathbb{R}^m$ tiene límite en $\bar{y}$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} F(\varphi(x)) = \lim_{y \rightarrow \bar{y}} F(y).$$

Por último, vemos la relación existente entre topología y continuidad.

Proposición Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un compacto y $F: K \rightarrow \mathbb{R}^m$ un compacto. Entonces $F(K)$ es un compacto de $\mathbb{R}^m$.

Teorema (de Weierstrass) Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un compacto y $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar continuo. Entonces f alcanza sus máximo y mínimo globales en puntos de K .

Teorema (Caracterización topológica de la continuidad) Sea $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ un campo. Entonces

$$\begin{aligned} F \text{ continua} &\iff F^{-1}(V) \text{ es abierto en } \mathbb{R}^n \quad \forall \text{ abierto } V \text{ de } \mathbb{R}^m \\ &\iff F^{-1}(W) \text{ es cerrado en } \mathbb{R}^n \quad \forall \text{ cerrado } W \text{ de } \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

Ejemplo: Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 2 < x^2 + y^2 < 4\}$. Veamos fácilmente que A es un abierto de $\mathbb{R}^2$ usando funciones continuas.

Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2 + y^2$, que es claramente continua. Vemos que, por definición,

$$\begin{aligned} f^{-1}([2,4]) &= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \in [2,4] \} \\ &= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \} = A. \end{aligned}$$

Como $[2,4]$ es un abierto de $\mathbb{R}$ y f es continua, A es abierto de $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo: Sea $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y \neq 0 \}$. Consideramos el complementario,

$$\mathbb{R}^2 \setminus A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x=0 \text{ o } y=0 \} \text{ (los ejes)}$$

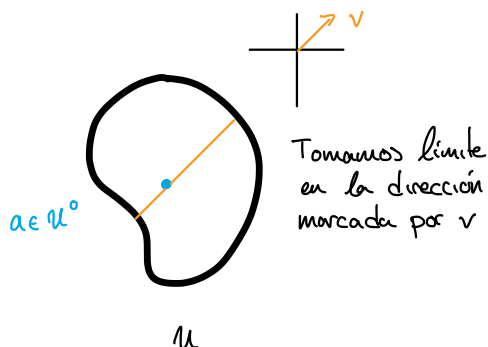
y la función continua $f(x,y) = xy$. Podemos ver sin esfuerzo que

$$\mathbb{R}^2 \setminus A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0 \} = f^{-1}(\{0\})$$

Como $\{0\}$ es un cerrado de $\mathbb{R}$, entonces $\mathbb{R}^2 \setminus A$ es un cerrado de $\mathbb{R}^2$, luego A es un abierto.

Bloque II - Cálculo diferencial en varias variables

II.4. Diferenciabilidad Al igual que sucede en $\mathbb{R}$, la "derivada" de una función definida en $\mathbb{R}^n$ involucra el cálculo de límites, y por tanto tenemos infinitas direcciones que comprobar, no solo izquierda y derecha. La primera definición abarca la idea de derivar en la dirección dada por un vector $v \in \mathbb{R}^n$.



Definición Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in U^\circ$ y $F: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ un campo, y sea $v \in \mathbb{R}^n$ un vector con $\|v\|=1$. Decimos que F admite derivada direccional en a según v si existe el límite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(a+tv) - F(a)}{t}$$

En tal caso, lo denotamos $D_v F(a)$ o $DF(a)[v]$.

Cuando v es una de las direcciones canónicas de $\mathbb{R}^n$, $v = e_i$, llamamos a la correspondiente derivada la i -ésima derivada parcial.

Definición Sean $i \in \{1, \dots, n\}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in U^\circ$ y $F: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ un campo. Se dice que F tiene derivada parcial respecto a la i -ésima variable en el punto a si existe el límite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(a+te_i) - F(a)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i+t, a_{i+1}, \dots, a_n) - F(a)}{t}.$$

Dicho límite se denomina derivada parcial i -ésima de F en a y se suele denotar por $\frac{\partial F}{\partial x_i}(a)$.

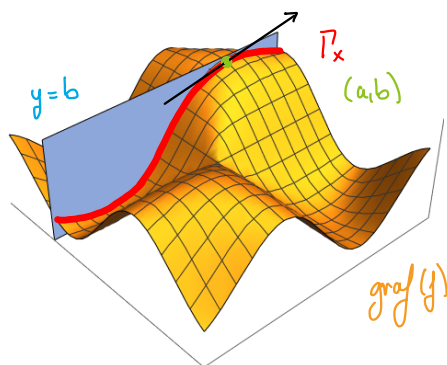


Sergio Cruz Blázquez
Universidad Autónoma de Madrid
sergio.cruz@uam.es Despacho 17-309

Observación Si $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es un campo escalar, el cálculo de la i -ésima derivada parcial consiste en derivar la función real de una variable real que resulta de considerar las variables x_j con $j \neq i$ como constantes

Ejemplo $f(x,y) = x^y + y \sin x$ $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y x^{y-1} + y \cos x \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^y \log x + \sin x \end{cases}$
 $x > 0, y \in \mathbb{R}$

Interpretación geométrica Sean $U \subseteq \mathbb{R}^2$, $(a,b) \in U^0$ y $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar. Consideramos la curva que resulta de intersecar $\text{Graf}(f)$ con el plano $y=b$:

$$\Gamma_x = \{ (x, b, f(x,b)) : (x,b) \in U \}$$


La derivada parcial $\frac{\partial f(a,b)}{\partial x}$ es la pendiente de la recta tangente a Γ_x en (a,b)

Definición Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in U^0$ y $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar. Se dice que f tiene gradiente en a si existen las n derivadas parciales en el punto a . En tal caso, definimos el gradiente de f como el campo vectorial

$$\nabla f: U^0 \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

Si recordamos la relación entre límite de un campo vectorial y los límites de sus funciones coordenadas, fácil darse cuenta de que la existencia de derivadas parciales de un campo vectorial $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ equivale a la misma propiedad para todas sus coordenadas F_i , $i=1, \dots, m$.

Por tanto, F "tiene gradiente" en $a \iff F_i$ tiene gradiente en a para todo $i=1, \dots, m$. El gradiente de un campo vectorial $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una colección de m vectores de $\mathbb{R}^n$ que agruparemos en una matriz $m \times n$.

Definición Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in U^\circ$ y $F: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ un campo vectorial para el que existen todas las derivadas parciales en a . Llamemos matriz Jacobiana de F en a la matriz $m \times n$

$$DF(a) = \begin{pmatrix} \nabla F_1(a) \\ \vdots \\ \nabla F_m(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$$

Si $n=m$, al determinante de $DF(a)$ se le llama Jacobiano de F en a .

Ejemplo Sea $\Phi: \mathbb{R}^+ \times]-\pi, \pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$ el cambio a coordenadas polares, $\Phi(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$. Se tiene

$$D\Phi(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix} \quad |D\Phi(\rho, \theta)| = \rho$$

Ahora, pasamos a hablar de espacios tangentes a lugares geométricos, que nos serán útiles para motivar la definición de función diferenciable como aquella queda bien aproximada por su plano tangente.

Definición Sean $U = U^\circ \subseteq \mathbb{R}^n$ y $G: U \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar continuo. Consideramos el lugar geométrico $S = \{x \in U: G(x) = 0\}$ y un $a \in S$ para el que existe $\nabla G(a)$ y $\nabla G(a) \neq 0$. Definimos el hiperplano tangente a S en a como

$$T_a S = \{x \in \mathbb{R}^n: \langle x-a, \nabla G(a) \rangle = 0\}$$

Si $n=3$, es un plano.

Si $n=2$, es una recta.

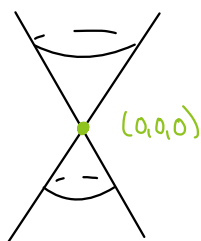
Obsérvese que, por definición, $\nabla G(a)$ es un vector perpendicular a todos los vectores contenidos en $T_a S$, por lo que lo llamaremos vector normal a $T_a S$.

Ejemplo Sea $C = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2 \}$. Queremos ver dónde existe el plano tangente y calcularlo.

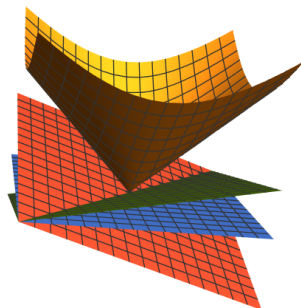
Podemos escribir $C = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : G(x,y,z) = 0 \}$ si tomamos

$$G(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2.$$

Estudiamos el sistema $\nabla G(x,y,z) = (0,0,0) \Leftrightarrow (2x, 2y, -2z) = (0,0,0)$
 $\Leftrightarrow (x,y,z) = (0,0,0)$.



Comprobamos que, efectivamente, $(0,0,0) \in C$ luego en dicho punto de C no existe el plano tangente.



Para $(a,b,c) \in C$, distinto de $(0,0,0)$,

$$T_{(a,b,c)} C = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (x-a, y-b, z-c), (2a, 2b, -2c) \rangle = 0 \}$$

$$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a(x-a) + b(y-b) - c(z-c) = 0 \} =$$

$$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by - cz - \underbrace{a^2 - b^2 + c^2}_{=0 \text{ porque } (a,b,c) \in C} = 0 \} = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by - cz = 0 \}$$

Ejemplo Sean $U = U^0 \subset \mathbb{R}^2$ y $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar tal que $\exists \nabla f(a,b)$ en todo $(a,b) \in U$.

$$G(x,y,z) = \underbrace{f(x,y)}_{= f(a,b)} - z$$

$\text{Graf}(f) = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x,y) \} = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{f(x,y) - z}_{=0} = 0 \}$. Entonces, si $(a,b,c) \in \text{Graf}(f)$, podemos ver que

$$T_{(a,b,c)} \text{Graf}(f) = \{ \langle (x-a, y-b, z-c), \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b), -1 \right) \rangle = 0 \}$$

$$= \{ \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) - z + f(a,b) = 0 \}$$

$$= \left\{ z - f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) \right\}$$

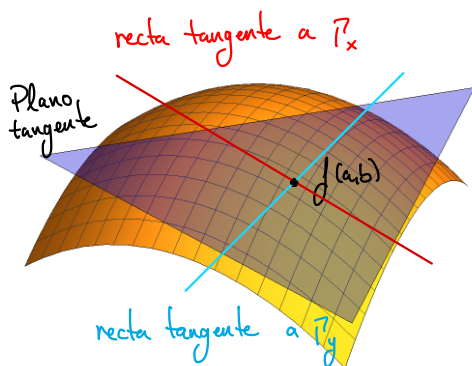
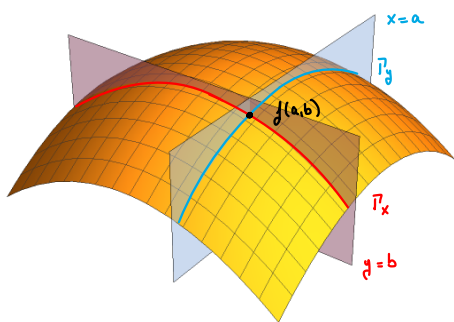
donde hemos usado que $c = f(a,b)$ porque $(a,b,c) \in \text{Gráf}(f)$.

De la ecuación anterior es fácil que el plano contiene a las rectas tangentes a Γ_x y Γ_y en $(a,b,f(a,b))$, ya que las ecuaciones de estas son

$$\begin{cases} y=b \\ z-f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=a \\ z-f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) \end{cases}$$

↑
Ecuaciones punto-pendiente



Es fácil ver que una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tiene derivada $f'(a)$ en $a \in \mathbb{R}$ si la recta tangente es una buena aproximación de f en a :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = f'(a) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - (f(a) + f'(a)(x-a))}{x-a} = 0.$$

Cuando $x \rightarrow a$, $f(x)$ se acerca a su recta tangente "más rápido" que $x-a$.

recta tangente a $\text{gr}(f)$ en $(a, f(a))$.

Si $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es un campo escalar en dos variables, podemos definir que sea diferenciable como que su gráfica se parezca lo suficiente

al plano tangente, es decir,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x,y) - (f(a,b) + \langle \nabla f(a,b), (x-a, y-b) \rangle)}{\|x-a\|} = 0$$

Más en general, se tiene la siguiente definición:

Definición Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in U^0$ y $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar para el que existe $\nabla f(a)$. Decimos que f es diferenciable en a si

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - \langle \nabla f(a), x-a \rangle}{\|x-a\|} = 0.$$

$Df(a)[x-a]$

En tal caso, la diferencial de f en a es la aplicación lineal

$$Df(a): \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$Df(a)[v] = \langle \nabla f(a), v \rangle$$

Si $F: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es un campo para el que existe $DF(a)$ en $a \in U^0$, entonces decimos que es diferenciable en a si

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x) - F(a) - DF(a)[x-a]}{\|x-a\|} = 0$$

Aquí, $DF(a)[x-a]$ representa el producto matricial $(x-a) \cdot DF(a)^T$, esto es,

$$DF(a)[x-a] = \underbrace{(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)}_{1 \times n} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(a) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}_{n \times m} \in M_{1 \times m} \equiv \mathbb{R}^m$$

$$= \left(\langle x-a, \nabla F_1 \rangle, \dots, \langle x-a, \nabla F_n \rangle \right)$$

Observa que, para $F: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $a \in U^0$, la diferencial $DF(a)$ es una aplicación lineal $DF(a): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, por tanto,

$$\begin{aligned} dF: U^0 &\longrightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \\ a &\longrightarrow dF(a): \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \text{ lineal} \\ dF(a)[v] &= (dF(a) \cdot v)^T \end{aligned}$$

O, usando la identificación $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \cong \mathcal{M}_{m \times n}$,

$$\begin{aligned} dF: U^0 &\longrightarrow \mathcal{M}_{m \times n} \\ a &\longmapsto dF(a). \end{aligned}$$

Ejemplo Sea $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $F(x,y) = (e^{x-y}, x^2y, \log(1+x^2))$
Nos piden calcular $DF(1,1)[(v_1, v_2)]$

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} \nabla F_1(x,y) \\ \nabla F_2(x,y) \\ \nabla F_3(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x-y} & -e^{x-y} \\ 2xy & x^2 \\ \frac{2x}{1+x^2} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow DF(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$DF(-1,1)[(u,v)] = (u \ v) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (u-v, 2u+v, u)$$

Proposición (Condición necesaria para la diferenciable) Sea $F: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ un campo diferenciable en $a \in U^0$. Entonces F es continuo en a . Dicho de otro modo, F no puede ser diferenciable en un punto donde no sea continua.

Proposición (Condición suficiente para la diferenciable) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in U^0$ y $F: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ un campo. Supongamos que $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}: U^0 \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $a \in U^0 \ \forall i=1, \dots, m \ \forall j=1, \dots, n$. Entonces, F es diferenciable en a .

La existencia de derivadas parciales en un punto a no implica que F sea diferenciable en a .

Ejemplo Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

→ Si no es continua, no será diferenciable.

- ① Estudiamos la continuidad: en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ es continua por ser una función racional con denominador $\neq 0$. En $(0,0)$ debemos comprobar que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} |f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)| = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\overbrace{\rho^3 \cos^2 \theta |\sin \theta|}^{\leq 1}}{\rho^2} \leq \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho = 0$$

Por tanto, f es continua en todo $\mathbb{R}^2$ (aunque esto no significa que sea diferenciable).

- ② Vemos dónde son continuas las derivadas parciales (ahí será diferenciable f)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$$

Claramente, $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, luego f es diferenciable en $(0,0)$.

Calculamos el valor de $\nabla f(0,0)$ usando la definición:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^2 \cdot 0}{t^2} - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{0 \cdot t}{t^2} - 0}{t} = 0.$$

Tenemos entonces que ∇f existe en todo $\mathbb{R}^2$:

$$\nabla f(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}, \frac{x^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ (0,0) & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Si ∇f fuese continuo en $(0,0)$, f sería diferenciable también en $(0,0)$, pero comprobar esto requiere un doble esfuerzo y puede no dejar

resuelta la cuestión (f puede ser diferenciable en $(0,0)$ sin que ∇f sea continuo en $(0,0)$).

Comprobamos la diferenciable en $(0,0)$ usando la definición:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \langle \nabla f(0,0), (x,y) \rangle}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

Vemos el límite en polares:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{\rho^3} = \cos^2 \theta \sin \theta.$$

Como depende de θ , el límite no existe y por tanto f no es diferenciable.

Resumen

$$\Rightarrow \exists \nabla f \quad (??)$$

$$\nabla f \text{ continuo} \Rightarrow f \text{ diferenciable} \Rightarrow f \text{ continua}$$

También se puede ver que la existencia de ∇f no implica que f sea continua.

Ejemplo

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

f no puede ser continua en $(0,0)$ porque no existe su límite:

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=mx}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{m}{1+m^2}, \text{ que depende de } m.$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = 0 \end{aligned} \right\} \nabla f(0,0) = (0,0).$$

Proposición Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in U^0$, $F: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ un campo diferenciable en a y $v \in \mathbb{R}^n$ un vector con $\|v\|=1$. Entonces la derivada direccional según v existe y $\partial_v F(a) = DF(a)[v]$.

Proposición Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in U^0$, $F, G: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f, g: U \rightarrow \mathbb{R}$ campos diferenciables en a , y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces,

(i) $F+G$ es diferenciable en a y $D(F+G)(a) = DF(a) + DG(a)$.

(ii) λF es diferenciable en a y $D(\lambda F)(a) = \lambda DF(a)$

(iii) $f g$ es diferenciable en a y $\nabla(fg)(a) = \nabla f(a)g(a) + f(a)\nabla g(a)$

Teorema (Regla de la cadena) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in U^0$ y $F: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ un campo diferenciable en a . Sean además $W \subseteq \mathbb{R}^m$ tal que $F(a) \in W^0$ y $G: W \rightarrow \mathbb{R}^q$ un campo diferenciable en $F(a)$.

Entonces, $G \circ F: U \rightarrow \mathbb{R}^q$ es diferenciable en a y

$$D(G \circ F)(a) = DG(F(a)) \cdot DF(a) \quad (\text{Producto matricial})$$

A veces es útil escribir esta fórmula en componentes, para los casos en los que estamos interesados en una derivada en particular:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (G \circ F)_i}{\partial x_j}(a) &= \left(D(G \circ F)(a) \right)_{ij} = \left(DG(F(a)) DF(a) \right)_{ij} = \\ &= \sum_{k=1}^m \left(DG(F(a))_{ik} DF(a)_{kj} \right) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial G_i}{\partial x_k}(F(a)) \frac{\partial F_k}{\partial x_j}(a) \quad \begin{matrix} i=1, \dots, q \\ j=1, \dots, n \end{matrix} \end{aligned}$$

Ejemplo Sean $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $F(u,v) = (uv, u+v)$, y $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $f(x,y) = y^2 - 2x$. Vamos a calcular $D(f \circ F)(a,b)$ de tres formas diferentes, para un $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ genérico.

$$\begin{matrix} (u,v) & & (x,y) \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{F} & \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \end{matrix}$$

$f(F): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow D(f \circ F)(a,b)$ es el gradiente de $f \circ F$ en (a,b) .

- ① Componemos y calculamos las derivadas parciales. Este método requiere que tengamos las fórmulas explícitas para f y F

$$f \circ F(u,v) = f(F(u,v)) = f(uv, u+v) = (u+v)^2 - 2uv = u^2 + v^2$$

$$D(f \circ F)(a,b) = (2a, 2b)$$

- ② Usamos la regla de la cadena en su forma matricial. Para esto, necesitamos conocer $Df(F(a,b))$ y $DF(a,b)$

$$Df(x,y) = (-2 \quad 2y) \Rightarrow Df(F(u,v)) = Df(uv, u+v) = (-2, 2u+2v)$$

$$DF(u,v) = \begin{pmatrix} v & u \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Por tanto,}$$

$$D(f \circ F)(u,v) = (-2, 2u+2v) \begin{pmatrix} v & u \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (-2v + 2u + 2v, -2u + 2u + 2v) = (2u, 2v)$$

Entonces, para un $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ dado, $D(f \circ F)(a,b) = (2a, 2b)$

- ③ Lo hacemos en coordenadas. Para cada derivada, solo necesitamos conocer las derivadas parciales apropiadas.

$$\begin{aligned} \frac{\partial (f \circ F)}{\partial u}(a,b) &= \frac{\partial f(\overbrace{F_1(u,v)}^x, \overbrace{F_2(u,v)}^y)}{\partial u}(a,b) = \\ &= \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}(F(a,b)) \frac{\partial x}{\partial u}(a,b) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}(F(a,b)) \frac{\partial y}{\partial u} = \end{aligned}$$

$$= -2 \Big|_{(a,b,a+b)} \cdot v \Big|_{(a,b)} + 2y \Big|_{(a,b,a+b)} \cdot 1 = -2b + 2a + 2b = 2a$$

y, análogamente,

$$\frac{\partial (f \circ F)}{\partial v} (a,b) = \frac{\partial f}{\partial x} (F(a,b)) \frac{\partial F_1}{\partial v} (a,b) + \frac{\partial f}{\partial y} (F(a,b)) \frac{\partial F_2}{\partial v} (a,b) =$$

$$= -2 \Big|_{(a,b,a+b)} \cdot u \Big|_{(a,b)} + 2y \Big|_{(a,b,a+b)} \cdot 1 \Big|_{(a,b)} = -2a + 2a + 2b = 2b.$$

Para concluir con la teoría de diferenciación a primer orden, enunciaremos dos propiedades teóricas: su carácter local y la validez del teorema del medio en segmentos de $\mathbb{R}^n$, lo cual nos permitirá recuperar parcialmente un resultado muy importante de la teoría de una variable real: si $DF = 0 \Rightarrow F$ es constante.

Proposición (Carácter local de la diferenciabilidad) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in U^0$ y $F: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ un campo. Entonces, si $r > 0$ es tal que $B(a,r) \subseteq U$ (existe porque $a \in U^0$), se tiene:

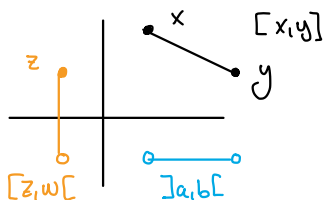
F es diferenciable en $a \Leftrightarrow f \Big|_{B(a,r)}$ es diferenciable en a .

Definición Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, definimos el segmento de extremos x e y como

$$[x,y] = \{ (1-t)x + ty : 0 \leq t \leq 1 \} \quad (\text{segmento cerrado})$$

$$]x,y[= \{ (1-t)x + ty : 0 < t < 1 \} \quad (\text{segmento abierto})$$

* Los segmentos semiabiertos se definen de la forma que es lógica



Como conjuntos, es claro que $[z,w[=]w,z]$ etc.

Definición Decimos que $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo si $[x, y] \subseteq U \quad \forall x, y \in U$.

Ejemplo Las bolas abiertas y cerradas son convexas.

Teorema (del valor medio para campos escalares) Sean $U = U^0 \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar diferenciable. Sean $x, y \in U$ tales que $[x, y] \subseteq U$. Entonces, existe $z \in [x, y]$ de forma que

$$f(x) - f(y) = Df(a)[x - y] = \langle \nabla f(a), x - y \rangle$$

Esta hipótesis se puede relajar a 1-convexo.

Corolario Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y convexo y $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en U con $\nabla f(a) = 0 \quad \forall a \in U$. Entonces, f es constante en U .

II.5 Derivadas de orden superior y polinomio de Taylor

Definimos las derivadas de orden k de forma recursiva, como las derivadas parciales de las derivadas de orden $k-1$. Esta vez, ignoraremos la definición rigurosa de la aplicación diferencial de orden k y nos centraremos en las aplicaciones de las derivadas parciales, con especial atención a las de segundo orden.

Definición Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in U^0$ y $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar tal que existe ∇f en U^0 . Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, consideramos la i -ésima derivada parcial

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : U^0 \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Dado $j \in \{1, \dots, n\}$, si existe $\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (a)$, se llamará derivada parcial

de orden 2 ij -ésima de f en a , y se denotará

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} (a) = \partial_{x_j x_i}^2 f(a) = \partial_{j i}^2 f(a)$$

Usaremos principalmente esta notación.

Por inducción, se definen las derivadas parciales de orden k como las derivadas parciales de orden 1 de las parciales de orden $k-1$.

Definición Sean $U = U^0 \subseteq \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$ y $f: U \rightarrow \mathbb{R}$. Decimos que f es de clase C^k en U , y lo escribimos $f \in C^k(U)$ si todas las derivadas parciales de orden k existen y son continuas en U .

Decimos que f es de clase C^∞ en U si $f \in C^k(U) \forall k \in \mathbb{N}$, y lo denotaremos por $f \in C^\infty(U)$.

Se tiene la siguiente cadena de inclusiones estrictas:

$$C^\infty(U) \subset C^k(U) \subset C^{k-1}(U) \subset C^0(U) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

← Funciones continuas en U

Definición Si $F: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ es un campo vectorial, decimos que $F \in C^k(U)$ $\Leftrightarrow F_i \in C^k(U) \quad \forall i = 1, \dots, m$.

Las derivadas de segundo orden nos permiten construir una matriz cuadrada que, a los efectos que nos interesan, jugará el papel de derivada segunda.

Definición (Matriz Hessiana) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in U^0$ y $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que existen $\partial_{ij}^2 f(a) \quad \forall i, j = 1, \dots, n$. Se define la matriz Hessiana de f en a como

$$\nabla^2 f(a) = \text{Hess}_a(f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right)_{i,j=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} \nabla \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \nabla \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} =$$

Notación

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}_{n \times n}$$

→ El orden de derivación importa!

En general, las derivadas cruzadas $\partial_{ij}^2 f(a)$ y $\partial_{ji}^2 f(a)$ no tienen por qué ser iguales, aunque veremos una condición suficiente para que esto ocurra.

Ejemplo Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \begin{cases} xy \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Haciendo los cálculos pertinentes, vemos que

$$\partial_{xy}^2 f(0,0) = 1, \quad \partial_{yx}^2 f(0,0) = -1.$$

Teorema (de Schwarz) Sean $U = U^0$ y $f \in C^2(U)$. Entonces

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \quad \forall i,j=1,\dots,n \quad \forall a \in U.$$

En particular, $\nabla^2 f(a)$ es una matriz simétrica.

Más en general, si $f \in C^k(U)$, las derivadas de orden $\leq k$ no dependen del orden de derivación.

Definición (Polinomio de Taylor) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in U^0$, $k \in \mathbb{N}$ y $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que existen todas las derivadas de orden k de f en a . Se llama polinomio de Taylor de orden k de f en a al polinomio

$$P_k(f,a)(x) = f(a) + \sum_{|\alpha|=1}^k \left(\frac{1}{|\alpha|!} D_\alpha f(a) (x-a)^\alpha \right) \quad x \in B(a,r) \subseteq U.$$

Aquí, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ es un multiíndice, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ representa el orden de la derivada que hacemos,

$$D_\alpha f(a) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}(a) \quad \text{y} \quad (x-a)^\alpha = \prod_{i=1}^n (x_i - a_i)^{\alpha_i}$$

(es decir, α_i es el número de veces que derivamos respecto a x_i)

Ejemplo: Si $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $D_{(1,2,0)} f = \frac{\partial^{1+2+0}}{\partial x \partial x_2^2}$, y

$$(x-a)^{(1,2,0)} = (x_1 - a_1)(x_2 - a_2)^2.$$

$$\langle \nabla f(a), x-a \rangle = Df(a)[x-a]$$

En particular,

$$\frac{1}{2} \nabla^2 f(a)[x-a, x-a] = \frac{1}{2} (x-a)^T \nabla^2 f(a) (x-a)$$

$$P_2(f, a)(x) = f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) (x_i - a_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) (x_i - a_i) (x_j - a_j)$$

Teorema (Fórmula infinitesimal del resto) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in U^0$ y $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ de clase $C^k(U)$. Entonces,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P_k(f, a)(x)}{\|x-a\|^k} = 0.$$

Dicho de otro modo, si $x \in B(a, \rho) \subseteq U$, con ρ suficientemente pequeño, podemos escribir $f(x) = P_k(f, a)(x) + r(x)$, siendo $r(x)$ una función resto tal que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{\|x-a\|^k} = 0$$

Ejemplo Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = e^{x-y}$. Queremos calcular su polinomio de Taylor de orden 2 en $(0, 0)$.

$$\nabla f(x, y) = (e^{x-y}, -e^{x-y}) \Rightarrow \nabla f(0, 0) = (1, -1)$$

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} e^{x-y} & -e^{x-y} \\ -e^{x-y} & e^{x-y} \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} P_2(f, (0, 0))(x, y) &= f(0, 0) + \langle \nabla f(0, 0), (x, y) \rangle + \frac{1}{2} \nabla^2 f(0, 0)[(x, y), (x, y)] = \\ &= 1 + (x-y) + (x \ y) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 + (x-y) + \frac{1}{2} (x-y, -x+y) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \\ &= 1 + (x-y) + \frac{1}{2} (x^2 - xy - xy + y^2) = 1 + (x-y) + \frac{1}{2} (x-y)^2. \end{aligned}$$

Esto no nos sorprende, ya que $e^z = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \dots + \frac{1}{k!}z^k + \dots$ cuando $z \rightarrow 0$, y basta sustituir $z = x - y$ (ya que $x - y \rightarrow 0$ cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$)

Como consecuencia de la fórmula del resto,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x-y} - 1 - x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

II.6. Extremos relativos, globales y condicionados

En esta sección trabajamos exclusivamente con campos escalares, ya que para hablar de máximos y mínimos necesitamos que las imágenes se puedan ordenar.

Definición: Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in U$ y $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ un campo. Decimos que f alcanza en a un mínimo relativo (resp. máximo relativo) si existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subseteq U$ y $f(a) \leq f(x)$ (resp. $f(a) \geq f(x)$) para todo $x \in B(a, r)$. $\rightarrow$ Entonces, necesariamente, $a \in U^\circ$.

Definición Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in U$ y $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ un campo. Decimos que f alcanza en a un mínimo global (resp. máximo global) si $f(a) \leq f(x)$ (resp. $f(a) \geq f(x)$) $\forall x \in U$.

Decimos que f tiene un extremo (relativo) en a si f tiene un mínimo o un máximo (relativo) en a .

La siguiente es una condición necesaria de extremo relativo para funciones cuyo gradiente existe en un punto interior a:

Proposición Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in U^\circ$ y $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\exists \nabla f(a)$. Entonces, si a es un extremo relativo, se tiene $\nabla f(a) = 0$.

Ejemplo Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = |x| + |y|$. Es fácil comprobar que f alcanza un mínimo relativo y su mínimo absoluto en $(0,0)$, ya que

$$f(x,y) = |x| + |y| \geq 0 = f(0,0) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Sin embargo, no existe $\nabla f(0,0)$:

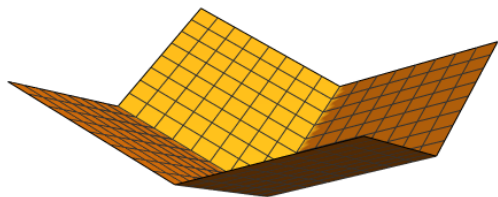
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t|}{t} = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|t|}{t} = 1 \\ \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{|t|}{t} = -1 \end{cases},$$

por tanto $\nexists \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

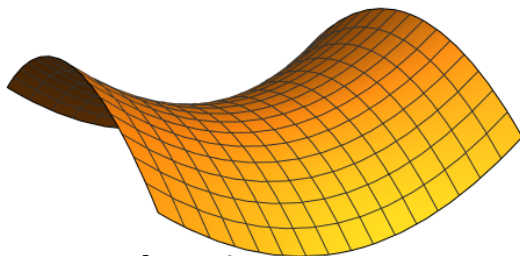
Ejemplo Sea $f(x,y) = x^2 - y^2 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Claramente $\nabla f(0,0) = (0,0)$, pero podemos ver que, para $\varepsilon > 0$ pequeño,

$$f(\varepsilon, 0) = \varepsilon^2 > 0, \quad f(0, \varepsilon) = -\varepsilon^2 < 0,$$

es decir, arbitrariamente cerca de $(0,0)$ hay valores positivos y negativos, pero $f(0,0) = 0$, luego no puede ser máximo ni mínimo.



$$f(x,y) = |x| + |y|$$



$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

Definición: Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in U^\circ$ y $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\exists \nabla f(a)$.
Decimos que a es un punto crítico de f si $\nabla f(a) = 0$.

Si a es un punto crítico que no es de máximo ni mínimo, se dice que es un punto de silla.

Geométricamente, los puntos críticos de f son aquellos donde el plano tangente a su gráfica está bien definido y es horizontal (paralelo a $z=0$). Dicho de otro modo, su vector normal es $(0,0,\pm 1)$.

A continuación presentamos criterios útiles para la clasificación de puntos críticos de un campo escalar. En estos, la forma cuadrática asociada a la matriz Hessiana, $x \mapsto x \nabla^2 f(a)^T x^T$, jugará el papel que jugaba la derivada segunda para funciones definidas en $\mathbb{R}$.

Como sabemos, la naturaleza de dicha forma cuadrática viene determinada por los autovalores de la matriz $\nabla^2 f(a)$.

Definición: Sea I la matriz identidad de orden n , y $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$.
Se definen los valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ como las raíces del polinomio característico
$$\det(M - \lambda I).$$

* Si M es simétrica, puede demostrarse que todos sus autovalores son reales.

Definición Sea $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica con autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Decimos que M es

- (1) definida positiva $\Leftrightarrow \lambda_i > 0 \quad \forall i=1, \dots, n$.
- (2) semi-definida positiva $\Leftrightarrow \lambda_i \geq 0 \quad \forall i=1, \dots, n$
- (3) definida negativa $\Leftrightarrow \lambda_i < 0 \quad \forall i=1, \dots, n$
- (4) semi-definida negativa $\Leftrightarrow \lambda_i \leq 0 \quad \forall i=1, \dots, n$
- (5) indefinida $\Leftrightarrow \exists i, j \in \{1, \dots, n\} : \lambda_i < 0 < \lambda_j$.

Por ejemplo, que M sea definida positiva equivale a que $x^T M x > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, aunque en este curso evitaremos el lenguaje de formas cuadráticas y trabajaremos directamente con las matrices.

Teorema (clasificación de puntos críticos) Sean $U = U^0 \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ de clase $C^2(U)$ y $a \in U$ tal que $\nabla f(a) = 0$. Entonces,

- (i) Si $\nabla^2 f(a)$ es definida positiva $\Rightarrow a$ es un mínimo relativo de f
- (ii) Si $\nabla^2 f(a)$ es definida negativa $\Rightarrow a$ es un máximo relativo de f
- (iii) Si a es un mínimo relativo de $f \Rightarrow \nabla^2 f(a)$ es semidefinida positiva
- (iv) Si a es un máximo relativo de $f \Rightarrow \nabla^2 f(a)$ es semidefinida negativa
- (v) Si $\nabla^2 f(a)$ es indefinida $\Rightarrow a$ es un punto de silla.

Este criterio no decide en todos los casos. Si $\nabla^2 f(a)$ es semidefinida, tenemos que estudiar la función cerca del punto crítico mediante otras herramientas.

Ejemplo: Sea $f(x,y) = x^3 + y^2 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}$. Tenemos que $(0,0)$ es un punto crítico, ya que $\nabla f(0,0) = (0,0)$, y pretendemos clasificarlo:

$$\nabla f(x,y) = (3x^2, 2y)$$

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico es $\det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda-2)$, por lo

que los autovalores de $\nabla^2 f(0,0)$ son 0 y 2, esto es, $\nabla^2 f(0,0)$ es semidefinida positiva. Esto es un caso dudoso del criterio anterior, y tenemos que decidir "a mano".

Para $\varepsilon \in \mathbb{R}$ con $|\varepsilon|$ pequeño, podemos ver que $f(\varepsilon, 0) = \varepsilon^3$.
 Si $\varepsilon < 0$, $f(\varepsilon, 0) < 0$, y si $\varepsilon > 0$, entonces $f(\varepsilon, 0) > 0$. Como $f(0, 0) = 0$, pero tiene a su alrededor tanto valores positivos como negativos, no puede ser un extremo, por lo que es un punto de silla.

Por último, recordemos un criterio que nos permite decidir la naturaleza de una matriz simétrica sin necesidad de calcular sus autovalores:

Proposición (Criterio de Sylvester) Sea $M \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica. Dado $k \in \{1, \dots, n\}$, definimos el menor principal de orden k como

$$M_k = \begin{pmatrix} M_{11} & \dots & M_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{k1} & \dots & M_{kk} \end{pmatrix} \quad \text{Submatriz } k \times k \text{ que empieza en } M_{11}.$$

Entonces;

(i) M es definida positiva $\Leftrightarrow \det M_k > 0 \quad \forall k = 1, \dots, n$.

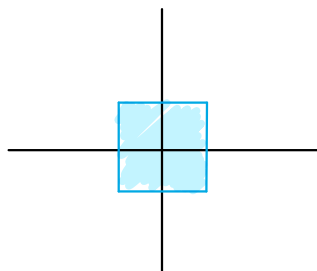
(ii) M es definida negativa $\Leftrightarrow (-1)^k \det M_k > 0 \quad \forall k = 1, \dots, n$.

(iii) Si existen $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tales que $\det(M_i) < 0$ y $(-1)^j \det(M_j) < 0$, entonces M es indefinida.

El teorema de clasificación de extremos solo nos permite estudiar puntos interiores al dominio de definición de un campo, pero puede que sus extremos globales se alcancen en puntos aislados o puntos de la frontera.

Ejemplo Sea $f(x, y) = x^3 + 2y^3$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Se pide encontrar su máximo y su mínimo en $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

Como $K = [-1,1] \times [-1,1]$ es un compacto y f es continua, por el teorema de Weierstrass alcanza su máximo y su mínimo en K .



f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$, por lo que si los extremos están en K° , deben cumplir $\nabla f = 0$:

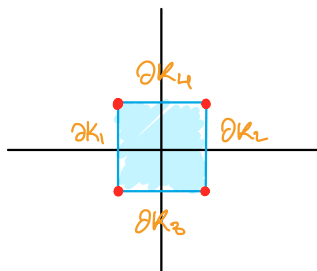
$$\nabla f(x,y) = (3x^2, 6y^2) = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0).$$

$(0,0) \in K^\circ$, por lo que es un candidato a extremo. Sin embargo, vemos que

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 12y \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Es un caso en el que no podemos decidir}$$

Evalando $f(\varepsilon, \varepsilon) > 0$ y $f(-\varepsilon, -\varepsilon) < 0$ para $\varepsilon > 0$ pequeño, vemos que $(0,0)$ es un punto de silla. Por tanto, los extremos globales deben alcanzarse en ∂K .

Podemos escribir $\partial K = \overbrace{\{(-1,y) : y \in [-1,1]\}}^{\partial K_1} \cup \overbrace{\{(1,y) : y \in [-1,1]\}}^{\partial K_2}$
 $\cup \underbrace{\{(x,-1) : x \in [-1,1]\}}_{\partial K_3} \cup \underbrace{\{(x,1) : x \in [-1,1]\}}_{\partial K_4}$



$$f|_{\partial K_1}(x,y) = f(-1,y) = -1 + 2y^3 \quad \forall y \in [-1,1]$$

$$f|_{\partial K_2}(x,y) = 1 + 2y^3 \quad \forall y \in [-1,1]$$

$$f|_{\partial K_3}(x,y) = f(x,-1) = x^3 - 2 \quad \forall x \in [-1,1]$$

$$f|_{\partial K_u}(x,y) = f(x,1) = x^3 + 2. \quad \forall x \in [-1,1].$$

Si hacemos un análisis de estas funciones de una sola variable real, vemos que alcanzan su mínimo cuando su variable vale -1 , y su máximo cuando esta es igual a 1 .

Esto nos da cuatro candidatos a extremos, $(-1,-1)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$ y $(1,1)$. Como son una cantidad finita, simplemente comparamos las imágenes:

$$f(-1,-1) = -3, \quad f(1,-1) = -1, \quad f(-1,1) = 1, \quad f(1,1) = 3.$$

El máximo global está en $(1,1)$ y $f(1,1) = 3$, y el mínimo global se alcanza en $(-1,-1)$ y toma el valor -3 .

En este ejemplo, hemos estudiado los extremos de la función $f|_{\partial K}$, o lo que es lo mismo, los extremos de f condicionados a ∂K . A veces, sin embargo, no será posible dar una fórmula directa para $f|_{\partial K}$.

El siguiente teorema nos permite localizar los posibles extremos de un campo f sujeto a una serie de ligaduras de la forma $\{G(x)=0\}$, con $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable.

Definición Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subseteq U$ y $a \in M$. Decimos que f alcanza en a un mínimo (resp. máximo) condicionado a M si existe $r > 0$ tal que $f(a) \leq f(x)$ (resp. $f(a) \geq f(x)$) $\forall x \in B(a,r) \cap M$, es decir, si $f|_M$ tiene un mínimo relativo (resp. máximo relativo) en a .

Teorema (de los multiplicadores de Lagrange) Sean $U = U^0 \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, y $G: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, con $m < n$, campos de clase $C^1(U)$. Consideramos

$$M = \{x \in U: G(x) = 0 \text{ y } \text{rango } DG(x) = m\},$$

y tomamos $a \in M$. Entonces, si f alcanza en a un extremo condicionado a M , existe un único $\lambda_0 \in \mathbb{R}^m$ tal que (a, λ_0) es un punto crítico de la función

$$F: U \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i G_i(x)$$

Multiplicadores de Lagrange.

Esto es, (a, λ_0) es solución del sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_i}(a, \lambda_0) = 0 & \forall i = 1, \dots, n \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_j}(a, \lambda_0) = 0 & \forall j = 1, \dots, m. \end{cases}$$

Ejemplo: Calcular el máximo y el mínimo de $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + xy$ en $K = \overline{B}((0,0), 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Puesto que K es compacto, f alcanza su máximo y su mínimo en puntos de K , por el teorema de Weierstrass.

① Buscamos candidatos en K° , estudiando la ecuación $\nabla f = 0$

Como paso previo vemos dónde existe ∇f . Recuérdese que $x \mapsto \sqrt{x}$ no es derivable en $x = 0$, por lo que f no es necesariamente diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$.

$$\underbrace{x^2 + xy + y^2}_{\text{polinomio de segundo grado en } x} = 0 \iff x = \frac{-y \pm \sqrt{y^2 - 4y^2}}{2} = \frac{-y \pm \sqrt{-3}y}{2} \rightarrow \text{Solo admite soluciones reales si } y = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\iff (x, y) = (0, 0).$$

Para $(x,y) \neq (0,0)$ tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x+y}{2\sqrt{x^2+y^2+xy}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x+2y}{2\sqrt{x^2+y^2+xy}}$$

Si $(x,y) = (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{t^2}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t|}{t} = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ -1 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Hemos visto que $\nabla f(0,0)$ no existe, por lo que podría haber un extremo en $(0,0)$.
Vemos qué otros puntos satisfacen $\nabla f(x,y) = (0,0)$:

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=0 \\ x+2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=0$$

El punto $(0,0)$ ya lo habíamos tenido en cuenta, por lo que no hay más candidatos en K° .

② Buscamos puntos críticos (condicionados) en ∂K .

Vemos claramente que $\partial K = \partial \overline{B}((0,0),1) = \mathcal{S}((0,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$.
Sea $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $G(x,y) = x^2+y^2-1$.

Tenemos que $\partial K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : G(x,y)=0\}$, y $DG(x,y) = (2x, 2y)$,
que tiene rango 1 excepto en $(x,y) = (0,0)$, que no pertenece a ∂K .

Construimos la función de Lagrange:

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda G(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+xy} + \lambda(x^2+y^2-1)$$

Planteamos el sistema $\nabla F(x,y,\lambda) = (0,0,0)$:

$$\begin{cases} 2x + y + 4x\lambda \sqrt{x^2 + y^2 + xy} = 0 \\ x + 2y + 4y\lambda \sqrt{x^2 + y^2 + xy} = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Usualmente, la mejor estrategia es eliminar λ de las primeras dos ecuaciones. Para esto, multiplicamos por y la primera, y por x la segunda, y restamos.

$$\begin{cases} 2xy + y^2 + 4xy\lambda \sqrt{x^2 + y^2 + xy} = 0 \\ x^2 + 2xy + 4xy\lambda \sqrt{x^2 + y^2 + xy} = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 - x^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2y^2 = 1 \Rightarrow y \in \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\} \Rightarrow x \in \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

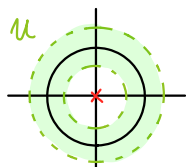
Obtenemos cuatro candidatos a extremos condicionados: $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Razonamos como sigue: K es compacto y f es continua, por lo que f debe alcanzar máximo y mínimo en K .

Existe ∇f en $K^0 \setminus \{(0,0)\}$, por lo que si hubiere un extremo ahí, debería satisfacer $\nabla f = 0$, pero hemos visto que $\nabla f \neq 0 \quad \forall (x,y) \in K^0 \setminus \{(0,0)\}$.

Por tanto, los extremos absolutos están en puntos donde $\nexists \nabla f$ (solo el $(0,0)$ en este caso) o en ∂K . f y G pueden definirse en un abierto U que contiene a ∂K de forma que sean $C^1(U)$, por lo que los extremos en ∂K son soluciones del sistema de Lagrange

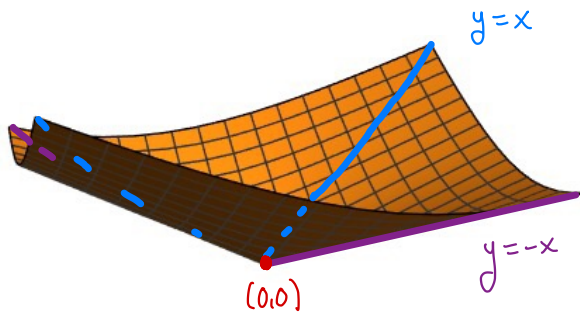
Es decir, los extremos solo pueden estar en $(0,0)$
o en $(\pm\sqrt{2}/2, \pm\sqrt{2}/2)$. Evaluamos f en dichos puntos:



$$f(0,0) = 0, \quad \longleftarrow \text{mínimo absoluto}$$

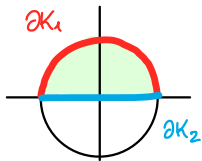
$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{3}/2 \quad \longleftarrow \text{máximos absolutos.}$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{1}/2 \quad \longleftarrow \text{Nada.}$$



Nota: Si ∂K viniese dada como varios trozos, los puntos de unión deben ser considerados candidatos a extremos.

Ejemplo: $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1 \wedge y \geq 0\}$ $\partial K = \partial K_1 \cup \partial K_2$



$\partial K_1 = \{G(x,y) = 0\}$ $G(x,y) = x^2 + y^2 - 1$
para $(x,y) \in \{y \geq 0\}$.

$\partial K_2 = \{H(x,y) = 0\}$ $H(x,y) = y$
para $(x,y) \in \{-1 \leq x \leq 1\}$

Nota 2: No confundir con la situación en la que hay que usar varios multiplicadores de Lagrange, que es cuando ∂K viene dada como intersección de conjuntos de la forma $\{G_i(x) = 0\}$.

II. Apéndice El contenido siguiente no se tratará en clase y por tanto no formará parte de la evaluación. Se añade a estas notas de clase en interés de la integridad, y para que pueda ser usado como referencia en futuras asignaturas

II.7 Teorema de la función inversa

Recordamos el teorema de la función inversa para funciones $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:
Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivable con $f'(x) \neq 0 \forall x \in I$
(en particular es estrictamente monótona e inyectiva). Entonces f^{-1} es derivable en $f(I)$ y $(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \forall x \in I$.

El siguiente ejemplo muestra que la condición de derivada no nula no basta en el caso de campos vectoriales

Ejemplo: Sea $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$.
Esto implica que $DF(x,y) \neq 0 \forall (x,y)$ como una aplicación lineal.

Podemos ver que $\det DF(x,y) = e^{2x} > 0 \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,
pero F no es inyectiva ya que es periódica en y :

$$F(x, y + 2\pi) = F(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Definición Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ abiertos y $F: A \rightarrow B$. Se dice que F es un difeomorfismo si: F es biyectiva, F es diferenciable en A y F^{-1} es diferenciable en B .

Para $k \in \mathbb{N}$, decimos que F es un C^k -difeomorfismo si F y F^{-1} son de clase C^k .



Sergio Cruz Blázquez
Universidad Autónoma de Madrid
sergio.cruz@uam.es Despacho 17-309

Observación Como consecuencia de la regla de la cadena, si $a \in A$ entonces $DF(a): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una biyección lineal y $(DF(a))^{-1} = DF^{-1}(F(a))$. En particular $\det DF(a) \neq 0$.
equivalente a $(DF(a))^{-1} = DF^{-1}(F(a))$ como matrices.

$$F^{-1} \circ F = Id \Rightarrow DF^{-1}(F(a)) \circ DF(a) = Id$$

$$\det(DF(a)) \det(DF^{-1}(F(a))) = 1$$

Definición Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Decimos que F es globalmente invertible o difeomorfismo global si: $F(U)$ es abierto y $F: U \rightarrow F(U)$ es un difeomorfismo.

El ejemplo anterior muestra que $DF(a) \neq 0 \forall a \in U$ no es suficiente para que F sea un difeomorfismo global.

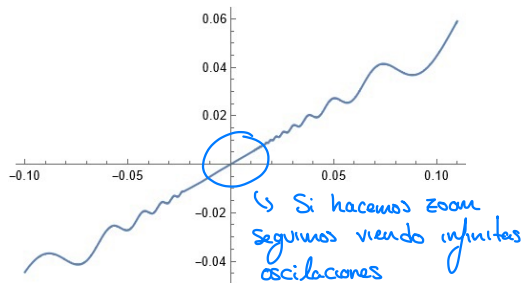
Definición Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $a \in U$ y $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Decimos que F es localmente invertible o un difeomorfismo local en a si: existe $W \subseteq U$ abierto, $a \in W$, tal que $F|_W: W \rightarrow F(W)$ es un difeomorfismo global.

Nota: Si F es un difeomorfismo local en $a \forall a \in U$, entonces $DF(a) \neq 0 \forall a \in U$, pero el recíproco no es cierto.

Ejemplo:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$



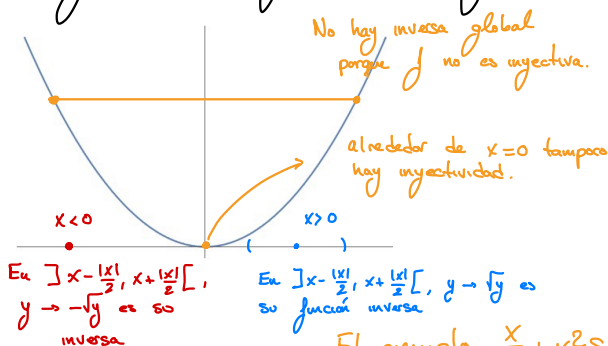
Podemos comprobar que

$$f'(x) = \frac{1}{2} + 2x \sin \frac{1}{x} - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \text{ para } x \neq 0 \text{ y } f'(0) = 1/2 \neq 0,$$

pero f no es inyectiva cerca de cero, por muy cerca que estemos, luego no es un difeomorfismo local.

Tampoco es cierto que un difeomorfismo local en todo punto sea un difeomorfismo global. Un ejemplo sencillo es

Ejemplo: $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Dado $x \neq 0$, $f|_{]x-\frac{|x|}{2}, x+\frac{|x|}{2}[}$ es invertible, pero f no es globalmente inyectiva.



El ejemplo $\frac{x}{2} + x^2 \sin \frac{1}{x}$ nos hace ver que esta hipótesis es obligatoria.

Teorema (de la función inversa) Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $a \in U$ y $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $F \in C^1(U)$ y $\det DF(a) \neq 0$. Entonces F es localmente invertible en a .

Esto es, existe $W \subseteq U$ con $a \in W$ tal que $F: W \rightarrow F(W)$ es un difeomorfismo. Además, $\rightarrow$ inversa para la composición.

$$[DF(x)]^{-1} = DF^{-1}(F(x)) \quad \forall x \in W$$

Además, si $F \in C^k(U) \Rightarrow F^{-1} \in C^k(F(W))$.

Corolario (Versión global del T^a función inversa). Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $F: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ verificando:

- (i) $F \in C^1(A)$ (ii) $\det \text{Jac } F(a) \neq 0 \quad \forall a \in A$ (iii) F inyectiva

Entonces F es un difeomorfismo global. Si además $F \in C^k(A)$, entonces F es un C^k -difeomorfismo.

Ejemplo: Sea $F(x,y) = (x-y, xy)$. Estudiar en qué puntos F es localmente invertible. Calcular $DF^{-1}(0,1)$

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ y & x \end{pmatrix}. \quad \det DF(x,y) = x+y.$$

Entonces, F es localmente invertible en $(x,y) \iff x+y \neq 0$.
En particular, es localmente invertible en $(0,1)$.

Vemos que $(0,1) = F(1,1)$, de modo que la regla de la cadena nos da

$$DF^{-1}(0,1) = DF^{-1}(F(1,1)) = DF(1,1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

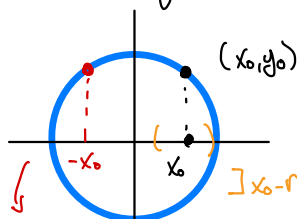
II.8 Teorema de la función implícita

El objetivo de esta sección es determinar cuándo en una ecuación con varias variables, una puede despejarse en función de las otras, y cómo se calcula la derivada de dicha función. Motivamos esto con dos ejemplos:

- ① En el plano $x+y+z=1$, podemos despejar z en función de x e y como $z = f(x,y)$ con $f(x,y) = 1-x-y$.

② En la circunferencia unidad $x^2 + y^2 = 1$, y no puede escribirse globalmente como función de x ; $y = \pm \sqrt{1-x^2}$ no es una función

Podemos tratar el caso localmente; sea $(x_0, y_0) \in S((0,0),1)$, y supongamos por ejemplo $y_0 > 0$.



Tomamos $r > 0$ tal que $]x_0-r, x_0+r[\subseteq]-1, 1[$.
Entonces podemos escribir

$$y = g(x) = \sqrt{1-x^2} \quad x \in]x_0-r, x_0+r[$$

Hemos dejado al punto conflictivo $-x_0$ fuera.

Hemos visto que $\exists g \in C^1(]x_0-r, x_0+r[)$ tal que

$$x^2 + g(x)^2 = 1 \quad \forall x \in]x_0-r, x_0+r[$$

y además $g(x_0) = y_0$.

Teorema (de la función implícita) Sean $G \subseteq \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ un abierto, (la idea es separar $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ con $n_1 + n_2 = n$, donde las últimas n_2 variables son las que queremos escribir en función de las n_1 primeras) $(a,b) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ y $F: \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}^{n_2}$ un campo vectorial verificando F es la ecuación que cumplen las variables

(i) $F \in C^1(G)$

(ii) $F(a,b) = 0$

(iii) definición de $R(a,b)$.

$$\det R(a,b) = \det$$

Es la submatriz de $DF(a,b)$ correspondiente a las variables $(x_{n_1+1}, \dots, x_{n_1+n_2})$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(a,b)}{\partial x_{n_1+1}} & \frac{\partial F_1(a,b)}{\partial x_{n_1+2}} & \dots & \frac{\partial F_1(a,b)}{\partial x_{n_1+n_2}} \\ \frac{\partial F_2(a,b)}{\partial x_{n_1+1}} & \frac{\partial F_2(a,b)}{\partial x_{n_1+2}} & \dots & \frac{\partial F_2(a,b)}{\partial x_{n_1+n_2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_{n_2}(a,b)}{\partial x_{n_1+1}} & \frac{\partial F_{n_2}(a,b)}{\partial x_{n_1+2}} & \dots & \frac{\partial F_{n_2}(a,b)}{\partial x_{n_1+n_2}} \end{pmatrix} \neq 0$$

Entonces existen $U \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$ abierto con $a \in U$ y $g: U \rightarrow \mathbb{R}^{n_2}$ verificando

1. $g \in C^1(U)$ 2. $g(a) = b$.

3. Para todo $x \in U$, se tiene $(x, g(x)) \in G$ y $F(x, g(x)) = 0$.

4. Para cada $x \in U$, $\det R(x, g(x)) \neq 0$. Si además definimos

$$S(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(u, v)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1(u, v)}{\partial x_{n_1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_{n_2}(u, v)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_{n_2}(u, v)}{\partial x_{n_1}} \end{pmatrix} \quad n_2 \times n_1$$

$$\text{Entonces } Dg(x) = - R(x, g(x))^{-1} \cdot S(x, g(x))$$

$n_2 \times n_1 \quad n_2 \times n_2 \quad n_2 \times n_1$

5. Si $F \in C^k(G)$, entonces $g \in C^k(U)$.

Además, decimos que el sistema de ecuaciones $F(x, y) = 0$ define a y como función implícita de x en un entorno abierto de (a, b) .

Ejemplos: ① Queremos demostrar que en la ecuación

$$x^3 + y^3 - 3xy - 1 = 0,$$

y puede despejarse en función de x cerca de 0, es decir, que existe un abierto $U \subseteq \mathbb{R}$, $0 \in U$,

y $g: U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$x^3 + g(x)^3 - 3xg(x) - 1 = 0$$

La idea es aplicar el teorema de la función inversa al campo escalar

$$F(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy - 1$$

en un punto adecuado de la forma $(0,b)$. Observamos que $F(0,b) = b^3 - 1$, por lo que podemos tomar $b=1$.

Comprobamos las hipótesis del teorema:

$F \in C^\infty$ porque es polinómica, $F(0,1)=0$ y

$$\det R(0,1) = \det \frac{\partial F(0,1)}{\partial y} = 3y^2 - 3x \Big|_{\substack{x=0 \\ y=1}} = 3 \neq 0.$$

El teorema nos da la existencia de un abierto $0 \in U \subseteq \mathbb{R}$ y $g: U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(0)=1$ y $F(x, g(x))=0$.

Además, podemos calcular su derivada en 0:

$$g'(x) = - \frac{1}{3y^2 - 3x} (3x^2 - 3y) = \frac{y - x^2}{y^2 - x} = \frac{g(x) - x^2}{g(x)^2 - x}$$
$$\Rightarrow g'(0) = \frac{g(0)}{g(0)^2} = 1.$$

También podemos calcular la derivada derivando implícitamente la ecuación:

$$x^3 + g(x)^3 - 3xg(x) - 1 = 0 \Rightarrow 3x^2 + 3g(x)^2 g'(x) - 3g(x) - 3xg'(x) = 0$$
$$\Rightarrow 3x^2 - 3g(x) + g'(x)(3g(x)^2 - 3x) = 0 \Rightarrow g'(x) = \frac{g(x) - x^2}{g(x)^2 - x}.$$

② Probar que el sistema de ecuaciones $\begin{cases} ax^2 + y = b^3 \\ 2bx - ay^3 = 4a \end{cases}$ define a (x,y) como función implícita de (a,b) en un abierto que contiene al $(0,1,0,1)$.

Buscamos aplicar el teorema de la función implícita a

$$F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$F(a,b,x,y) = (ax^2 + y - b^3, 2bx - ay^3 - 4a).$$

$$R(a,b,x,y) = \begin{pmatrix} 2ax & 1 \\ 2b & -3ay^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det R(0,1,0,1) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Entonces existe $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $G(0,1) = (0,1)$ y $F(a,b,G(a,b)) = 0$, es decir,

$$\begin{cases} a G_1(a,b)^2 + G_2(a,b) = b^3 \\ 2b G_1(a,b) - a G_2(a,b)^3 = 4a \end{cases} \quad (*)$$

Finalmente, se puede ver que

$$\text{Jac } G(0,1) = - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

También podemos calcular las parciales derivando implícitamente y resolviendo un sistema, aunque el cálculo se vuelve pesado:

Derivando respecto de a el sistema $(*)$

$$\begin{cases} G_1(a,b)^2 + 2 G_1(a,b) \frac{\partial G_1(a,b)}{\partial a} + \frac{\partial G_2(a,b)}{\partial a} = 0 \\ 2b \frac{\partial G_1(a,b)}{\partial a} - G_2(a,b)^3 - 3a G_2(a,b)^2 \frac{\partial G_2(a,b)}{\partial a} = 4 \end{cases}$$

Es un sistema
lineal en
 $\frac{\partial G_1}{\partial a}$ y $\frac{\partial G_2}{\partial a}$

Resolvemos y obtenemos $\frac{\partial G_1(0,1)}{\partial a} = \frac{5}{2}$ y $\frac{\partial G_2(0,1)}{\partial a} = 0$.

Análogamente, derivando respecto a b, se obtiene

$$\begin{cases} 2a G_1(a,b) \frac{\partial G_1(a,b)}{\partial b} + \frac{\partial G_2(a,b)}{\partial b} = 3b^2 \\ 2 G_1(a,b) + 2b \frac{\partial G_1(a,b)}{\partial b} - 3a G_2(a,b)^2 \frac{\partial G_2(a,b)}{\partial b} = 0 \end{cases}$$

Evaluando en (0,1) y despejando, queda finalmente

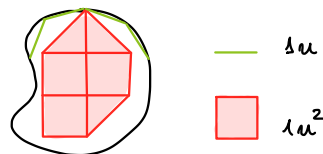
$$\frac{\partial G_1(0,1)}{\partial b} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial G_2(0,1)}{\partial b} = 3.$$

Bloque III - Cálculo integral en varias variables

III.1 Integral de Riemann en $\mathbb{R}^n$

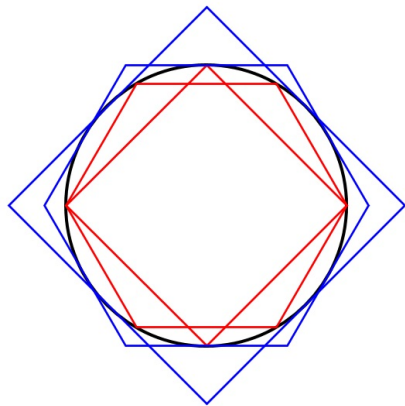
El cálculo integral nace con un problema elemental de la geometría clásica: calcular el área y el perímetro de una figura con borde curvilíneo.

La idea intuitiva de área se corresponde con fijar un cuadrado como unidad de medida y contar cuántas veces puede ser introducido en una figura dada, y análogamente mediríamos longitudes fijando un segmento unidad.



Sin embargo, esta noción solo nos permite medir con exactitud áreas y perímetros de figuras poligonales, y no sirve para dar sentido a las medidas de un círculo, por ejemplo, ya que no se puede descomponer como suma finita de triángulos y cuadrados.

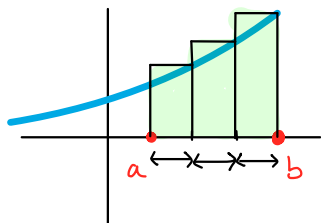
Arquímedes introdujo un acercamiento novedoso al problema, que usaba la idea de aproximaciones sucesivas cada vez más precisas: se calculan las medidas de polígonos regulares inscritos y circunscritos y se estudia qué sucede cuando el número de lados tiende a $+\infty$.



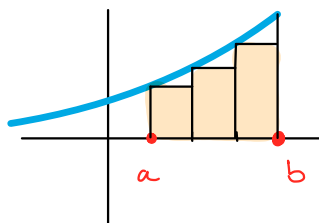
Esta idea fue usada por matemáticos como Fermat y Mercator para calcular la longitud de segmentos



de la gráfica de funciones simples, así como el área bajo estos:



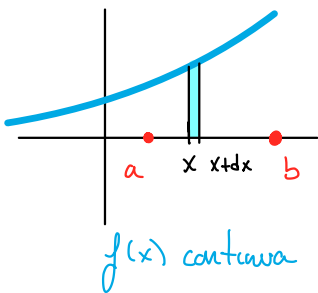
Aproximación por exceso



Aproximación por defecto

Hacemos particiones de $[a, b]$ cada vez con más puntos, de forma que su anchura máxima tienda a cero.

No es hasta el siglo XVI con el nacimiento del cálculo infinitesimal con Newton y Leibniz que se dan definiciones rigurosas de área y perímetro de una figura plana cualquiera, entendida como oportuno límite de sumas.



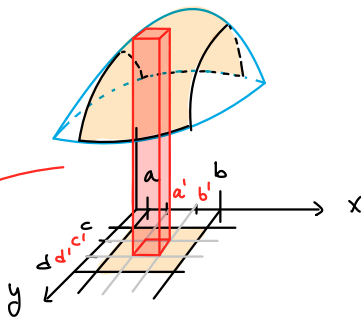
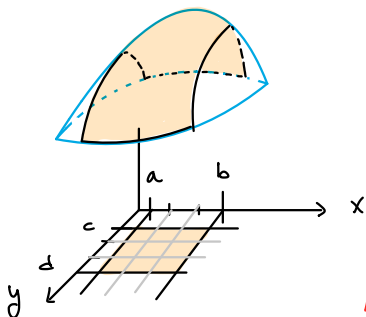
Notación de Leibniz: dx se asume que es suficientemente pequeño para que f se pueda considerar constante en $[x, x+dx]$

$$\text{Área} = \sum_{x=a}^b f(x) dx \equiv \int_a^b f(x) dx$$

↑ Altura ↑ base: $x - (x+dx)$

Notación para suma especial

En $\mathbb{R}^2$, definiremos la integral usando esta idea geométrica de aproximar por exceso y por defecto el volumen bajo una gráfica.



Volumen (en rojo): $(b'-a')(d'-c') \min \{ f(x, y) : a' \leq x \leq b' \wedge c' \leq y \leq d' \}$

área base altura.

Definición Un intervalo compacto en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto de la forma

$$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

Definimos su volumen n -dimensional como

$$|I| = \text{vol}^n(I) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

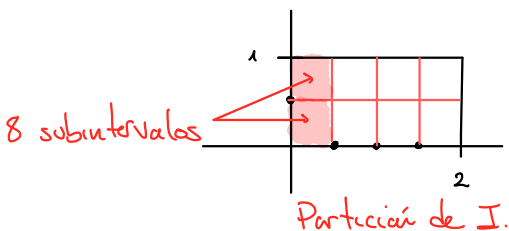
$n=1 \rightarrow$ longitud de un segmento
 $n=2 \rightarrow$ área de un cuadrado
 $n=3 \rightarrow$ volumen de un prisma rectangular ...

Definición Dado $i \in \{1, \dots, n\}$, una partición de $[a_i, b_i]$ es una colección de N_i puntos $P_i = \{C_{ij}\}$, $j=0, \dots, N_i$, tal que

$$C_{i0} = a_i < C_{i1} < C_{i2} < \dots < C_{iN_i-1} < C_{iN_i} = b_i.$$

Dicha partición se denota mediante $P_i = \{a_i < C_{i1} < \dots < C_{iN_i-1} < b_i\}$.

Si $I = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ es un intervalo compacto de $\mathbb{R}^n$ y P_i es una partición de $[a_i, b_i]$ $\forall i=1, \dots, n$, entonces la malla de puntos de I , $P_1 \times \dots \times P_n$, se dice que es una partición de I .



Ejemplo $I = [0, 2] \times [0, 1]$

$$P_1 = \{0 < 1/2 < 1 < 3/2 < 2\}$$

$$P_2 = \{0 < 1/2 < 1\}$$

Definición Sea $I \subseteq \mathbb{R}^n$ un intervalo compacto de $\mathbb{R}^n$ y P una partición de I , que divide a I en m subintervalos compactos J_i . Definimos las sumas inferior y superior de f asociadas a P como

$$I(f, P) = \sum_{i=1}^m \min \{f(x) : x \in J_i\} \cdot |J_i|, \quad S(f, P) = \sum_{i=1}^m \max \{f(x) : x \in J_i\} \cdot |J_i|$$

Observamos que si P' es una partición "más refinada" que P , esto es, si $P \subseteq P'$, entonces se tiene

$$I(f, P) \leq I(f, P') \leq S(f, P') \leq S(f, P).$$

Es decir, el conjunto de las sumas inferiores está mayorado y el de las sumas superiores, minorado, y tiene sentido considerar su supremo e ínfimo, respectivamente.

Definición (Integrabilidad en el sentido de Riemann) Sean I un intervalo compacto de $\mathbb{R}^n$ y $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Diremos que f es integrable (en el sentido de Riemann) si

$$\sup \{ I(f, P) : P \text{ es partición de } I \} = \inf \{ S(f, P) : P \text{ es partición de } I \}.$$

En tal caso, tomamos ese valor como la definición de la integral de f en I , que denotaremos por

$$\int_I f = \int_I f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n).$$

Las funciones continuas son el ejemplo más sencillo de funciones integrables, pero podemos integrar funciones mucho más generales.

Definición Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Decimos que U es de medida cero si para cada $\varepsilon > 0$ existe una sucesión de intervalos compactos $\{I_k\}$ tal que

$$U \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} |I_k| < \varepsilon.$$

Ejemplos ← Esto es lo que hay que recordar sobre conjuntos de medida cero.

- ① $\emptyset$ es de medida cero.
- ② Todo hiperplano es de medida cero (los planos en $\mathbb{R}^3$, las rectas en $\mathbb{R}^2, \dots$).
- ③ Si $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es de medida cero y $W \subseteq U \Rightarrow W$ es de medida cero.

→ Importante que sea una familia numerable

④ Si $\{U_k : k \in \mathbb{N}\}$ es una familia de conjuntos de medida cero, entonces $\bigcup_{k=1}^{+\infty} U_k$

es de medida cero. En particular, también las uniones finitas.

⑤ Si $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, entonces su gráfica es de medida cero en $\mathbb{R}^{n+1}$.

La idea intuitiva para identificar los conjuntos de medida cero en $\mathbb{R}^n$ es que tengan volumen n -dimensional igual a cero, aunque esto no es un si y solo si. Si U es de medida cero y se puede definir su volumen (esto lo veremos más adelante), entonces su volumen n -dim. será cero.

Teorema (de Lebesgue) Sea I un intervalo compacto de $\mathbb{R}^n$ y $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Entonces, f es integrable en I si y solo si el conjunto de sus discontinuidades,

$$\{x \in I : x \text{ no es continua en } I\}$$

es de medida cero.

En particular, las funciones continuas y las funciones cuyas gráficas son uniones finitas de gráficas de funciones continuas, son integrables.

Proposición Sean $I \subseteq \mathbb{R}^n$ un intervalo compacto, $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Entonces

(Linealidad) $\lambda f + \mu g$ es integrable y $\int_I (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_I f + \mu \int_I g$.

(Monotonía) si $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in I \Rightarrow \int_I f \leq \int_I g$

(Continuidad) $\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|$

(Aditividad) Si $J = \bigcup_{i=1}^m I_i$ es una unión de intervalos acotados I_i de forma que $I_i \cap I_j = \emptyset$ para $i \neq j$, entonces

$$\int_J f = \sum_{i=1}^m \int_{I_i} f$$

La pregunta natural que nos hacemos a continuación es: ¿Cómo calculamos una de estas integrales?

Teorema (de Fubini) Sea $I = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable. Entonces

$$\int_I f = \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \right) dx_2 \dots dx_n$$

y en la expresión anterior pueden permutarse libremente las variables de integración. En el caso particular de una función $f: I \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, tenemos

$$\int_I f = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x, y) dx \right) dy = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy \right) dx$$

Ejemplo Sean $Q = [-1, 1] \times [0, \log 2]$ y $f(x, y) = x^2 e^y \quad \forall (x, y) \in Q$.

$$\int_Q f = \int_{-1}^1 \left(\int_0^{\log 2} x^2 e^y dy \right) dx = \int_0^{\log 2} \left(\int_{-1}^1 x^2 e^y dx \right) dy$$

Hacemos la que nos resulte más cómoda

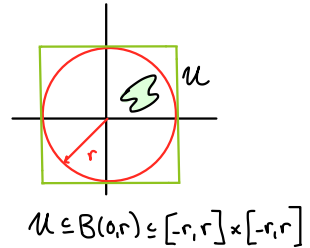
$$\begin{aligned} \int_0^{\log 2} \int_{-1}^1 x^2 e^y dx dy &= \int_0^{\log 2} e^y \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 dy = \frac{2}{3} \int_0^{\log 2} e^y dy = \\ &= \frac{2}{3} [e^y]_0^{\log 2} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

A continuación, extendemos la noción de integral a conjuntos más generales, no necesariamente rectangulares.

Definición Un conjunto acotado $U \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice medible si ∂U es de medida cero.

Sea U un conjunto medible. Por ser acotado, existe un intervalo acotado $I \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $U \subseteq I$. Dada una función acotada $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, definimos su extensión a I como

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in U \\ 0 & \text{si } x \in I \setminus U \end{cases}$$



→ Al hacer esto introducimos una posible discontinuidad en ∂U , pero es de medida cero!

Definición Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ medible y $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Decimos que f es integrable en U si $\bar{f}$ es integrable en I . En tal caso, se define la integral de f en U como

$$\int_U f = \int_I \bar{f}.$$

La integral sobre conjuntos medibles tiene las mismas propiedades que la integral sobre intervalos compactos: linealidad, monotonía, y continuidad.

Proposición Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ medible y $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada cuyo conjunto de discontinuidades es de medida cero. Entonces f es integrable en U .

Definición Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ medible. Se define el volumen n -dimensional de U como

$$|U| = \text{Vol}_n(U) = \int_U 1$$

Enumeramos ahora las propiedades que usaremos de los conjuntos medibles.

① Si $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es medible, entonces U° y $\bar{U}$ son medibles y $|U| = |U^\circ| = |\bar{U}|$

② Si $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ son medibles, entonces $U \cup V$ es medible. Si además $U^\circ \cap V^\circ = \emptyset$, $|U \cup V| = |U| + |V|$

Con respecto al segundo punto, se tiene además el siguiente resultado, equivalente a la aditividad de la integral sobre conjuntos medibles

Proposición: Sean U, V, W conjuntos medibles tales que $U = V \cup W$ y $V^\circ \cap W^\circ = \emptyset$, y $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Entonces f es integrable en U si y solo si es integrable en V y W , y en tal caso

$$\int_U f = \int_V f + \int_W f$$

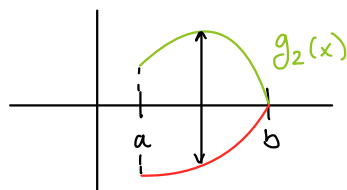
La principal aplicación de esta teoría será integrar sobre conjuntos de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ cuya frontera pueda describirse usando funciones continuas:

Teorema (para $\mathbb{R}^2$) Sean $g_1, g_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuas con $g_1(x) \leq g_2(x)$ $\forall x \in [a, b]$. Se considera el conjunto medible

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: a \leq x \leq b \text{ y } g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}.$$

Sea $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces

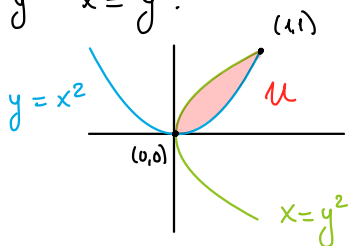
$$\int_U f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$



Fijado $x \in [a, b]$, y se mueve entre $g_1(x)$ y $g_2(x)$.

El resultado análogo para $x \in [f_1(y), f_2(y)]$ también se tiene

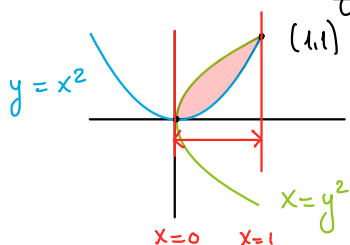
Ejemplo Se pide calcular el área encerrada entre las curvas $y = x^2$ y $x = y^2$.



Sea U el recinto encerrado entre dichas curvas. Queremos expresar U como un conjunto de la forma anterior. Para ello, escogemos una variable que será la que se mueva en un intervalo fijo, y estudiamos cómo varía la otra para cada valor fijo de la primera.

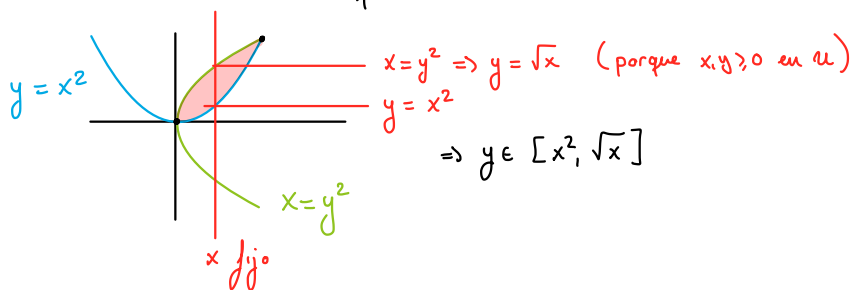
Calculamos los puntos de intersección de las gráficas: $\begin{cases} x = y^2 \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow x = x^4$
 $\Rightarrow x(x^3 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 1$, esto es, $(0,0)$ y $(1,1)$.

Decidimos escribir y en función de x : vemos qué valores puede tomar x , o lo que es igual, proyectamos U sobre el eje x .



Se tiene $x \in [0,1]$.

Ahora, fijado un $x \in [0,1]$ cualquiera, estudiamos los valores admisibles para y .



Por tanto, $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1] \wedge x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$. Por definición,

$$\text{área}(U) = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} 1 \, dy \, dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) \, dx = 1/3.$$

Teorema (versión para $\mathbb{R}^3$) Sean $g_1, g_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $g_1(x) \leq g_2(x)$, y $h_1, h_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $h_1(x, y) \leq h_2(x, y)$ para todo $x \in [a, b]$ e $y \in [g_1(x), g_2(x)]$.

Entonces, el conjunto

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b \wedge g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \wedge h_1(x, y) \leq z \leq h_2(x, y)\}$$

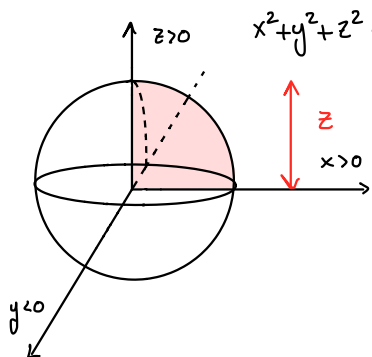
es medible. Si $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, se tiene

$$\int_U f = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left(\int_{h_1(x, y)}^{h_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

Ejemplo. Calcular el volumen de

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0\}.$$

Empezamos dibujando la región sobre la que queremos integrar, para visualizar mejor los límites de integración

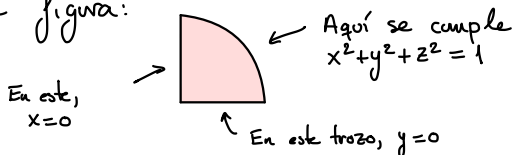


$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \rightarrow \text{Bola cerrada de radio 1}$$

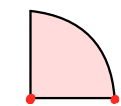
Ω es una octava parte de una bola de radio 1.

Elegimos una variable que fijar primero. En este caso, podemos empezar con z , que entre 0 y 1.

Para cada $z \in [0, 1]$ fijo, buscamos cómo varían x e y . Vemos que, al fijar z , lo que hacemos es cortar con un plano horizontal de altura z , obteniendo la siguiente figura:

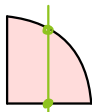


Ahora calculamos los límites de integración en la nueva región:



$x=0$ $x = \sqrt{1-z^2}$
(Valor máximo que puede tomar x , fijo z)

$$\Rightarrow x \in [0, \sqrt{1-z^2}]$$



Fijados z y x , y puede tomar valores entre 0 y $\sqrt{1-x^2-z^2}$

$$\Rightarrow y \in [0, \sqrt{1-x^2-z^2}]$$

Entonces, $\text{Vol}(\Omega) = \int_{\Omega} 1 = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-z^2}} \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2-z^2}} 1 \, dy \right) dx \right) dz$

Primero hemos fijado z $\leftarrow$ luego x $\leftarrow$ luego y

$$= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \left[y \right]_0^{\sqrt{1-x^2-z^2}} dx dz = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \sqrt{1-x^2-z^2} dx dz$$

Recordamos cómo calcular una primitiva de $\sqrt{a^2-x^2}$, para $0 < x < a$:

$$\int_0^x \sqrt{a^2-t^2} dt = \int_0^{\arcsin(\frac{x}{a})} \sqrt{a^2(1-\sin^2 s)} a \cos s ds$$

$$\begin{aligned} t &= a \sin s & t=x &\Rightarrow s = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \\ dt &= a \cos s & t=0 &\Rightarrow s = 0 \end{aligned}$$

$$x/a < 1 \Rightarrow \arcsin(x/a) \in [0, \pi/2] \Rightarrow \cos s > 0$$

$$= \int_0^{\arcsin(\frac{x}{a})} a^2 |\cos s| \cos s ds = \int_0^{\arcsin(\frac{x}{a})} a^2 \cos^2 s ds = (*)$$

Usamos las siguientes identidades trigonométricas: $\begin{cases} \sin^2 s + \cos^2 s = 1 \\ \cos^2 s - \sin^2 s = \cos(2s) \end{cases}$

$$\Rightarrow \cos^2 s = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2s)$$

$$(*) = \frac{a^2}{2} \int_0^{\arcsin(\frac{x}{a})} (1 + \cos(2s)) ds = \frac{a^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{a^2}{4} \sin(2 \arcsin(\frac{x}{a}))$$

$$\sin\left(2\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right) = 2\sin\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\cos\left(\arcsin\frac{x}{a}\right) = 2\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

$$\text{Finalmente, } (*) = \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \sqrt{(1-z^2)-x^2} \, dx \, dz &= \int_0^1 \left(\frac{1-z^2}{2} \arcsin(1) + \frac{\sqrt{1-z^2}}{2} \sqrt{(1-z^2)-(1-z^2)} \right) dz \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} \int_0^1 (1-z^2) \, dz = \frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

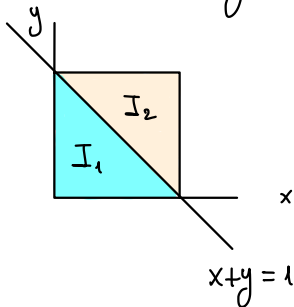
$$\left(\text{Sabíamos que } \text{Vol}_3(B(0,1)) = \frac{4}{3}\pi, \text{ y } \text{Vol}_3(\Omega) = \frac{1}{8} \text{Vol}_3(B(0,1)) = \frac{\pi}{6} \right).$$

Ejemplo Sean $I = [0,1] \times [0,1]$ y $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ el campo escalar

$$f(x,y) = \begin{cases} 1-x-y & \text{si } x+y \leq 1 \\ xy & \text{si } x+y > 1 \end{cases}$$

Demostrar que existe $\int_I f$ y calcularlo.

f es continua en $\{(x,y): x+y < 1\}$ y en $\{(x,y): x+y > 1\}$ por el carácter local de la continuidad así que, a lo sumo es discontinua en la recta $x+y=1$, que es de medida nula. Por tanto, f es integrable en I .



$$I_1 = \{(x,y) \in I: x+y \leq 1\}$$

$$I_2 = \{(x,y) \in I: x+y > 1\}$$

$$\text{Por aditividad, } \int_I f = \int_{I_1} f + \int_{I_2} f$$

$$I_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1-x\}$$

$$I_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq 1 \wedge 1-x \leq y \leq 1\}$$

$$\begin{aligned}
\int_I f &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y) dy dx + \int_0^1 \int_{1-x}^1 xy dy dx = \\
&= \int_0^1 \left[y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} dx + \int_0^1 \left[\frac{x}{2} y^2 \right]_{1-x}^1 dx \\
&= \int_0^1 \left(1-x - x(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx + \int_0^1 \left(\frac{x}{2} - \frac{x(1-x)^2}{2} \right) dx \\
&= \frac{1}{6} + \frac{5}{24} = \frac{3}{8}.
\end{aligned}$$

III.2. Fórmula del cambio de variable

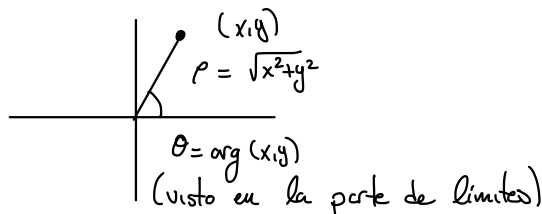
Teorema: Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $\Phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo inyectivo de clase $C^1(U)$ verificando $\det D\Phi(x) \neq 0 \forall x \in U$. Si $W \subseteq U$ es medible y $f: \Phi(W) \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable, entonces $\Phi(W)$ es medible y

$$\int_{\Phi(W)} f(y) dy = \int_W (f \circ \Phi)(x) |\det D\Phi(x)| dx$$

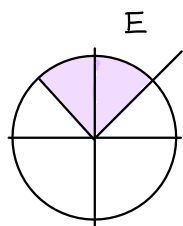
Mediante este teorema y un cambio de variable apropiado, conseguimos trasladar integrales en recintos muy complejos a integrales sobre conjuntos de los vistos anteriormente.

Cambio a coordenadas polares ($\mathbb{R}^2$)

$$\begin{aligned}
\Phi: \mathbb{R}^+ \times]-\pi, \pi[&\rightarrow \mathbb{R}^2 \\
\Phi(\rho, \theta) &= (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \\
|\det D\Phi(\rho, \theta)| &= \rho.
\end{aligned}$$



Ejemplo Calcular $\int_E f(x, y) d(x, y)$ siendo $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$, y
 $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1 \wedge |x| \leq y\}$



Empezamos representando el conjunto E :

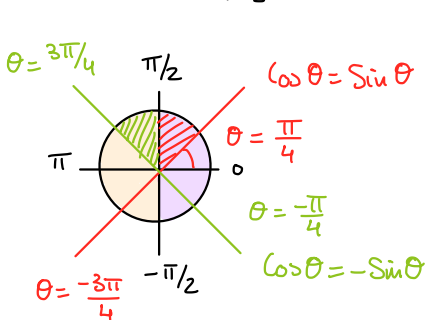
$$|x| \leq y \iff \begin{cases} x \leq y & \text{si } x \geq 0 \\ x \geq -y & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

El conjunto E que se nos da juega el papel de $\Phi(u)$ en la fórmula del cambio de variables, así que debemos encontrar u , que es equivalente a escribir E en coordenadas polares:

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge |x| \leq y\} = \{(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) : \rho^2 \leq 1 \wedge |\cos \theta| \leq \sin \theta\}$$

$$\rho^2 \leq 1 \Rightarrow \rho \in [0, 1]$$

$$|\cos \theta| \leq \sin \theta \iff \begin{cases} \cos \theta \leq \sin \theta & \text{si } \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ -\cos \theta \leq \sin \theta & \text{si } \theta \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$



$$\iff \begin{cases} \theta \in [\pi/4, \pi/2] \\ \theta \in [\pi/2, 3\pi/4] \end{cases} \iff \theta \in [\pi/4, 3\pi/4]$$

$$\begin{aligned} E &= \{(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) : \rho \in [0, 1] \wedge \theta \in [\pi/4, 3\pi/4]\} \\ &= \{\Phi(\rho, \theta) : \rho \in [0, 1] \wedge \theta \in [\pi/4, 3\pi/4]\} \\ &= \Phi([0, 1] \times [\pi/4, 3\pi/4]) \end{aligned}$$

Por la fórmula del cambio de variable,

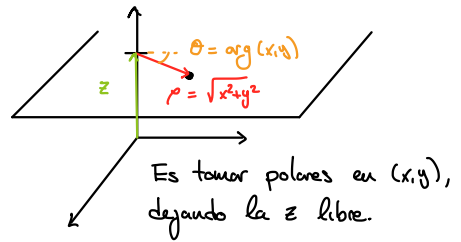
$$\begin{aligned} \int_E e^{-(x^2+y^2)} d(x, y) &= \int_{[0, 1] \times [\pi/4, 3\pi/4]} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) |\det D\Phi(\rho, \theta)| d(\rho, \theta) \\ &= \int_0^1 \int_{\pi/4}^{3\pi/4} e^{-\rho^2} \rho d\theta d\rho = \frac{\pi-1}{2} \int_0^1 -2\rho e^{-\rho^2} d\rho = \frac{-\pi}{4} [e^{-\rho^2}]_0^1 = \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{1}{e}\right). \end{aligned}$$

Cambio a coordenadas cilíndricas ($\mathbb{R}^3$)

$$\Phi: \mathbb{R}^+ \times]-\pi, \pi[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

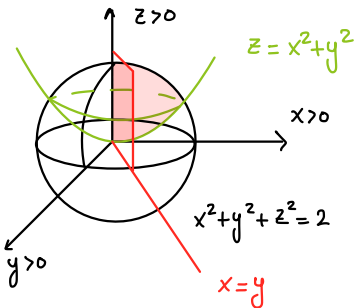
$$\Phi(\rho, \theta, z) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z)$$

$$|\det D\Phi(\rho, \theta, z)| = \rho$$



Ejemplo Calcular $\int_E yz \, d(x, y, z)$, siendo

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x, y, z \geq 0 \wedge y \leq x \wedge x^2 + y^2 \leq z \wedge x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$$



Tomamos coordenadas cilíndricas

$$x = \rho \cos \theta$$

$$\rho > 0$$

$$y = \rho \sin \theta$$

$$\theta \in [-\pi, \pi]$$

$$z = z$$

$$z \in \mathbb{R}$$

$$E = \{(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z): \rho \cos \theta \geq 0, \rho \sin \theta \geq 0, z \geq 0, \rho \sin \theta \leq \rho \cos \theta, \rho^2 \leq z, \rho^2 + z^2 \leq 2\}.$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos \theta \geq 0 \Rightarrow \theta \in [-\pi/2, \pi/2] \\ \sin \theta \geq 0 \Rightarrow \theta \in [0, \pi] \end{array} \right\} \Rightarrow \theta \in [0, \pi/2]$$

$$\sin \theta \geq 0 \Rightarrow \theta \in [0, \pi]$$

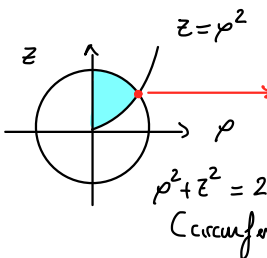
$$z \geq 0$$

$$\sin \theta \leq \cos \theta \Rightarrow \theta \in [0, \pi/4] \rightarrow \text{Variable que fijamos primero.}$$

Uso esta información

$$\left. \begin{array}{l} \rho^2 \leq z \\ \rho^2 + z^2 \leq 2 \end{array} \right\}$$

Tenemos que escribir una variable en función de la otra usando este sistema de inequaciones



$$z = \rho^2$$

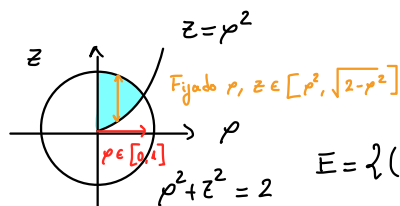
Sabemos que $z \geq 0$ y $\rho \geq 0$

Necesitamos conocer este punto

$$\begin{cases} z = \rho^2 \\ \rho^2 + z^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow z + z^2 = 2 \Rightarrow z = -2 \vee z = 1 \Rightarrow (1, 1)$$

No puede ser, porque $z \geq 0$

(circunferencia de radio $\sqrt{2}$)



Entonces, podemos escribir

$$E = \{(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) : \theta \in [0, \pi/4], \rho \in [0, 1], z \in [\rho^2, \sqrt{2-\rho^2}]\}$$

y eso nos da

$$\int_E yz \, d(x,y,z) = \int_0^{\pi/4} \int_0^1 \int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}} \rho^2 \sin \theta \, z \, dz \, d\rho \, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \sin \theta \int_0^1 \rho (2 - \rho^2 - \rho^4) \, d\rho \, d\theta = \frac{17}{105} \int_0^{\pi/4} \sin \theta \, d\theta$$

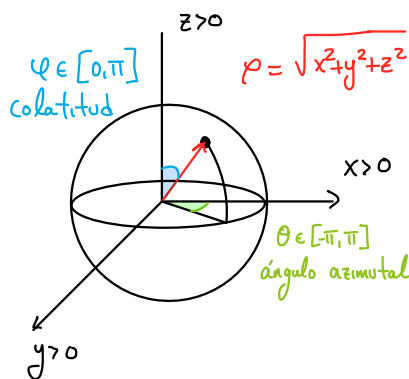
$$= \frac{17}{105} [-\cos \theta]_0^{\pi/4} = \frac{17}{105} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Cambio a coordenadas esféricas ($\mathbb{R}^3$)

$$\Phi: \mathbb{R}^+ \times]-\pi, \pi[\times]0, \pi[\longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\Phi(\rho, \theta, \varphi) = (\rho \cos \theta \sin \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \varphi)$$

$$|\det D\Phi(\rho, \theta, \varphi)| = \rho^2 \sin \varphi$$



Ejemplo: Calcular $\int_{\overline{B}((0,0,0),1)} \frac{1}{x^2 + y^2 + (z-3)^2} \, d(x,y,z)$.

Como $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 0 \iff (x,y,z) = (0,0,3)$ y $(0,0,3) \notin \overline{B}(\vec{0},1)$, el integrando es una función continua y por tanto la integral tiene sentido

Pasamos a coordenadas esféricas: Sea

$$E = \overline{B}((0,0,0),1) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\} \\ = \{\Phi_{\text{esf}}(\rho, \theta, \varphi) : \rho \leq 1\} = \Phi([0,1] \times [-\pi,\pi] \times [0,\pi])$$

Por la fórmula del cambio de variable:

$$\begin{aligned}
 \int_{B(\vec{0},1)} \frac{1}{x^2+y^2+(z-3)^2} d(x,y,z) &= \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\rho^2 \sin \varphi}{\rho^2 - 6\rho \cos \varphi + 9} d\varphi d\theta d\rho \\
 &= \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\frac{\rho}{6} 6\rho \sin \varphi}{\rho^2 - 6\rho \cos \varphi + 9} d\varphi d\theta d\rho = \\
 &= \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\rho}{6} \left[\log | \rho^2 - 6\rho \cos \varphi + 9 | \right]_0^{\pi} d\theta d\rho = \\
 &= \int_0^1 2\pi \frac{\rho}{6} \left(\log (\rho+3)^2 - \log (3-\rho)^2 \right) d\rho = \\
 &= \frac{2\pi}{3} \int_0^1 \rho \log (\rho+3) d\rho - \frac{2\pi}{3} \int_0^1 \rho \log (3-\rho) d\rho \stackrel{\text{Integración por partes}}{=} \frac{2\pi}{3} (3 - 4 \log 2).
 \end{aligned}$$

Ejemplo (otros cambios de variables) Calcular $\int_E xyz$, donde
 $E = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + \frac{y^2}{4} + z^4 \leq 1 \wedge z \geq 0 \}$

Inspirados por la forma de E , buscamos un cambio de variable Φ de forma que, si $\Phi(A) = E$, entonces A sea parte de la bola $B(\vec{0},1)$:

$$\begin{aligned}
 E &= \{ (x,y,z) : 2x^2 + \frac{y^2}{4} + z^4 \leq 1 \wedge z \geq 0 \} \\
 &= \{ \Phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) : \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 \leq 1 \wedge (\text{algo que veremos ahora}) \}
 \end{aligned}$$

La elección es clara:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{2}x &= \bar{x} \Rightarrow x = \frac{\bar{x}}{\sqrt{2}} \\
 \frac{y}{2} &= \bar{y} \Rightarrow y = 2\bar{y} \\
 z^2 &= \bar{z} \Rightarrow z = \sqrt{\bar{z}} \quad (\text{necesitamos } \bar{z} \geq 0 \text{ para que esté bien definido y } z \geq 0)
 \end{aligned}$$

Definimos pues, $\Phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (\frac{\bar{x}}{\sqrt{2}}, 2\bar{y}, \sqrt{\bar{z}})$ y vemos que

$$D\Phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{\bar{z}}} \end{pmatrix} \quad |\det D\Phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})| = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\bar{z}}} \neq 0$$

Entonces, $A = \{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) : \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 \leq 1 \wedge \bar{z} > 0\}$, y por la fórmula del cambio de variable:

$$\begin{aligned} \int_E xyz \, d(x, y, z) &= \int_A \frac{\bar{x}}{\sqrt{2}} 2\bar{y} \sqrt{\bar{z}} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\bar{z}}} \, d(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \\ &= \int_A \bar{x}\bar{y} \, d(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}). \end{aligned}$$

Ahora, hacemos un cambio a coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} A &= \{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) : \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 \leq 1 \wedge \bar{z} > 0\} = \{(p \cos \theta \sin \varphi, p \sin \theta \sin \varphi, p \cos \varphi) : \\ &: p^2 \leq 1 \wedge p \cos \varphi > 0\} = \{\Phi_{\text{esf}}(\rho, \theta, \varphi) : \rho \in [0, 1] \wedge \varphi \in [0, \pi/2]\} \end{aligned}$$

$$\int_A \bar{x}\bar{y} \, d(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \rho^2 \cos \theta \sin \theta \sin^2 \varphi \, \rho^2 \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta \, d\rho$$

$$= \int_0^1 \rho^4 \, d\rho \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos \theta \sin \theta \, d\theta}_{\left[\frac{1}{2} \sin^2 \theta \right]_{-\pi}^{\pi} = 0} \int_0^{\pi} \sin^3 \varphi \, d\varphi = 0$$

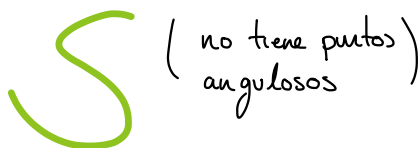
Bloques IV y V: Integrales sobre curvas y superficies

Parte I: Integral de línea Comenzamos dando sentido a la integral de una función de varias variables a lo largo de una curva. Este tipo de integrales se reducen a integrales de una sola variable, que es la que parametriza la curva.

Definición Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Una curva en $\mathbb{R}^n$ es una función continua $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. A los puntos $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$ se les llama extremos. Decimos que γ es cerrada si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Definición Decimos que γ es una curva regular si $\gamma \in C^1([a, b])$, o regular a trozos si existe una partición de $[a, b]$, $\{t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b\}$ tal que $\gamma \in C^1([t_{k-1}, t_k]) \forall k = 1, \dots, n$.

Curva regular



Curva regular a trozos



Puede tener un número finito de puntos angulosos.

Definición Una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ se dice simple si es inyectiva, es decir, si no tiene auto-intersecciones. Cuando γ es cerrada, solo exigimos que $\gamma|_{[a, b]}$ sea inyectiva para llamarla simple.



Simple



Simple



No simple



No simple



Sergio Cruz Blázquez
Universidad Autónoma de Madrid
sergio.cruz@uam.es Despacho 17-309

Definición Decimos que $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva de Jordan si es cerrada y simple.

Ejemplos notables de curvas

① Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, el segmento de extremos x e y es la curva $\gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\gamma(t) = (1-t)x + ty \quad \forall t \in [0,1]$

② Si $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, su gráfica es una curva en el plano. Basta definir $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ como

$$\gamma(t) = (t, f(t))$$

③ La circunferencia de centro $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ y radio $r > 0$ es una curva cerrada y simple de $\mathbb{R}^2$. En este caso, podemos tomar

$$\begin{aligned} \gamma: [-\pi, \pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \gamma(t) &= (a + r \cos t, b + r \sin t) \end{aligned}$$

Notemos por Γ a la imagen de una curva γ , es decir, al lugar geométrico $\Gamma = \{ \gamma(t) : t \in [a,b] \} \subseteq \mathbb{R}^n$. Desde esta perspectiva, decimos que γ parametriza a Γ , o que γ es una parametrización de Γ .

Naturalmente, dos curvas distintas pueden parametrizar el mismo conjunto Γ . Profundizamos en esa idea:

Definición Sean $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva y $\varphi: [c,d] \rightarrow [a,b]$ una biyección de clase $C^1([a,b])$. A la curva $\gamma \circ \varphi: [c,d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ se le llama reparametrización de γ .

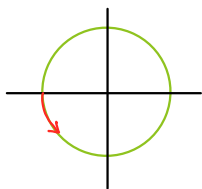
Tal función φ ha de ser estrictamente monótona, al ser continua e inyectiva en un intervalo. Si φ es estrictamente creciente, decimos que conserva la orientación, y si es estrictamente decreciente, que la invierte.

Definición La curva opuesta de γ es la reparametrización $-\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $-\gamma(t) = \gamma(a+b-t)$ (recorremos la curva al revés).

Ejemplo

$$\gamma: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

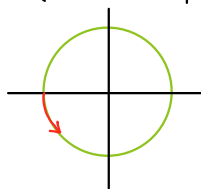


$$\psi: [0, 2\pi] \rightarrow [-\pi, \pi]$$

$$\psi(s) = s - \pi \quad (\text{creciente: } \psi'(s) = 1 > 0)$$

$$\gamma \circ \psi: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

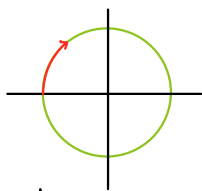
$$\gamma \circ \psi(s) = (\cos(s-\pi), \sin(s-\pi))$$



reparametrización
que preserva la
orientación

$$-\gamma: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$-\gamma(t) = \gamma(-t) = (\cos(-t), \sin(-t)) = (\cos t, -\sin t)$$



reparametrización que
invierte la orientación

Definición

Dadas dos curvas $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\varphi: [c,d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tales que $\gamma(b) = \varphi(c)$, se define la suma de γ y φ como la curva

$$\gamma + \varphi: [a, b + (d-c)] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\gamma + \varphi(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{si } t \in [a, b] \\ \varphi(t-b+c) & \text{si } t \in [b, b+(d-c)] \end{cases}$$

Si Γ y Σ son las imágenes de γ y φ , está claro que la imagen de $\gamma + \varphi$ es $\Gamma \cup \Sigma$.

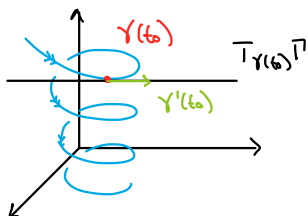
$$\gamma(b) = \varphi(c)$$



Llamaremos poligonal de vértices $P_1, \dots, P_m$ en $\mathbb{R}^n$ a la suma de los segmentos $[P_1, P_2] + [P_2, P_3] + \dots + [P_{m-1}, P_m]$.

Definición Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva derivable en $t_0 \in [a, b]$. Si $\gamma'(t_0) \neq \vec{0}$, entonces $\gamma'(t_0)$ es un vector tangente a Γ en $\gamma(t_0)$. Por tanto, la recta tangente a Γ en $\gamma(t_0)$ tiene la ecuación

$$T_{\gamma(t_0)}\Gamma = \{ \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)t : t \in \mathbb{R} \}$$



Definición Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regular. Se define la longitud de γ como

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

→ γ' podría no estar bien definida en t_0

Si γ es regular a trozos en una partición $\{t_0 = a < t_1 < \dots < t_m = b\}$, entonces la integral anterior se entiende de la siguiente forma:

$$L(\gamma) = \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\gamma'(t)\| dt$$

Definición (Integral de línea de un campo escalar) Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regular a trozos, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $\Gamma \subseteq U$ y $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar continuo. Se define la integral de línea de f a lo largo de γ como

$$\int_{\gamma} f dl = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$$

Si γ es cerrada, podemos usar la notación $\oint_{\gamma} f dl$.

Ejemplo. Calcular la integral de $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ a lo largo de la curva helicoidal

$$\gamma(t): [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

Calculamos la norma del vector velocidad:

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1) \Rightarrow \|\gamma'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Entonces,} \quad \int_{\gamma} f \, dl &= \int_0^{4\pi} f(\cos t, \sin t, t) \cdot \sqrt{2} \, dt = \\ &= \sqrt{2} \int_0^{4\pi} (1+t^2) \, dt = \sqrt{2} \left(4\pi + \frac{64\pi^3}{3} \right) \end{aligned}$$

Enumeramos las propiedades de la integral de línea, que son meras consecuencias de las de la integral en una variable:

Proposición: Sea $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regular a trozos, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $\gamma \subseteq U$, $f, g: U \rightarrow \mathbb{R}$ dos campos continuos y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$1) \quad \int_{\gamma} (\lambda f + \mu g) \, dl = \lambda \int_{\gamma} f \, dl + \mu \int_{\gamma} g \, dl \quad (\text{linealidad})$$

$$2) \quad \text{Si } \sigma \text{ es una reparametrización de } \gamma, \text{ entonces } \int_{\sigma} f \, dl = \int_{\gamma} f \, dl$$

(buena definición, el valor de la integral no depende de la parametrización escogida)

$$3) \quad \left| \int_{\gamma} f \, dl \right| \leq \max \{ |f(\gamma(t))| : t \in [a,b] \} L(\gamma) \quad (\text{continuidad})$$

$$4) \quad \text{Si } \sigma: [c,d] \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ es otra curva regular a trozos con } \sigma(c) = \gamma(b), \text{ entonces}$$

$$\int_{\gamma+V} f d\ell = \int_{\gamma} f d\ell + \int_V f d\ell \quad (\text{aditividad})$$

La última propiedad implica que, para integrar, no necesitamos usar la fórmula de la suma de curvas.

→ Campos de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ ($m=n$)

Definición (Integral de línea de un campo vectorial) Sean $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regular a trozos, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $\gamma \subseteq U$ y $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo. Se define la integral de F a lo largo de γ como

$$\int_{\gamma} F \cdot d\ell = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

Notación: Supongamos que $F = (F_1, \dots, F_n)$ y $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$. Entonces,

$$\int_{\gamma} F \cdot d\ell = \int_a^b (F_1(\gamma) \gamma_1' + \dots + F_n(\gamma) \gamma_n') dt \stackrel{\text{Notación}}{=} \int_{\gamma} F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n$$

No escribimos dx para no confundirla con la integral de línea de un campo escalar.

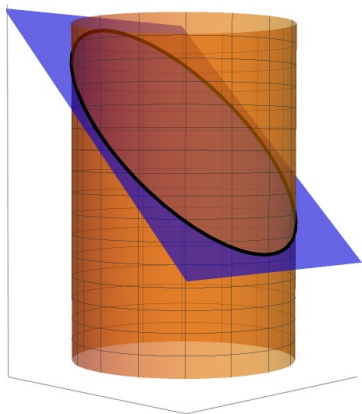
Ejemplo Sean $F(x,y,z) = (xy, 0, z)$. Calcular la integral $\int_{\gamma} F \cdot d\ell$, donde γ resultante de intersecar el cilindro

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 = 1\}$$

con el plano $\Pi: z = x + 1$.

En este caso, no nos dan una parametrización de γ , sino que nos describen su imagen γ . Vemos cómo podemos obtenerla. En este caso, es útil escribir γ en coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned} \gamma &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 = 1 \wedge z = 1 + x\} = \\ &= \{(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z): \rho^2 = 1 \wedge z = 1 + \rho \cos \theta\} \end{aligned}$$



$$= \{ (\cos \theta, \sin \theta, 1 + \cos \theta) : \theta \in [-\pi, \pi] \}$$

Entonces, una parametrización de Γ es

$$\gamma: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 1 + \cos t)$$

Por tanto, $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, -\sin t)$
y se tiene

$$\int_{\gamma} F \cdot d\ell = \int_{-\pi}^{\pi} \langle F(\cos t, \sin t, 1 + \cos t), (-\sin t, \cos t, -\sin t) \rangle dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \langle (\cos t \sin t, 0, 1 + \cos t), (-\sin t, \cos t, -\sin t) \rangle dt$$

← Intervalo simétrico respecto de 0.

$$= \int_{-\pi}^{\pi} (-\cos t \sin^2 t \underbrace{- \sin t - \sin t \cos t}_{\text{funciones impares}}) dt = - \int_{-\pi}^{\pi} \cos t \sin^2 t dt$$

$$= -\frac{1}{3} \left[\sin^3 t \right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

La integral de línea de campos vectoriales es también lineal, continua (cambiando $|f(\gamma(t))|$ por $\|F(\gamma(t))\|$) y aditiva. Respecto a las reparametrizaciones, se tiene:

Si σ es una reparametrización de γ , entonces

$$\int_{\sigma} F \cdot d\ell = \begin{cases} \int_{\gamma} F \cdot d\ell & \text{si } \sigma \text{ preserva la orientación} \\ - \int_{\gamma} F \cdot d\ell & \text{si } \sigma \text{ invierte la orientación.} \end{cases}$$

La integral de línea de un campo vectorial puede escribirse como la integral de línea de un campo escalar adecuado, siempre que el vector tangente a γ , γ' , sea no nulo en todo punto.

Proposición Sea $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regular con $\gamma'(t) \neq \vec{0} \ \forall t \in [a,b]$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $\gamma \subseteq U$ y $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo. Definimos el vector tangente unitario $T: \gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$ como

$$T(\gamma(t)) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \quad \forall t \in [a,b]$$

Esta fórmula es útil desde el punto de vista teórico, pero no la vamos a usar.

Entonces,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F \cdot d\ell &= \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \sum_{i=1}^n \int_a^b F_i(\gamma(t)) \gamma'_i(t) dt = \\ &= \sum_{i=1}^n \int_a^b F_i(\gamma(t)) \frac{\gamma'_i(t)}{\|\gamma'(t)\|} \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), T(\gamma(t)) \rangle \|\gamma'(t)\| dt \\ &\quad \leftarrow \text{Coordenada } i\text{-ésima de } T(\gamma(t)) \\ &= \int_{\gamma} \langle F, T \rangle d\ell \\ &\quad \leftarrow \text{Campo escalar.} \end{aligned}$$

Cuando F pueda escribirse como ∇f para algún campo escalar f , la integral de línea de F gozará de muchas otras propiedades interesantes.

Definición Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo. Decimos que F es conservativo si existe un campo escalar $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ de clase $C^1(U)$ tal que $\nabla f = F$. En tal caso, decimos que f es un potencial de F .

Teorema (Regla de Barrow para la integral de línea) Sea $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regular a trozos, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto tal que $\gamma \subseteq U$ y $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F = \nabla f$ un campo conservativo. Entonces,

$$\int_{\gamma} F \cdot d\ell = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

En particular, si γ es una curva cerrada, $\oint_{\gamma} F \cdot d\mathbf{l} = 0$

Por tanto, la integral de línea de un campo conservativo solo depende del valor de un potencial en los extremos. Esta propiedad, de hecho, caracteriza a los campos conservativos:

Teorema: Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo de clase $C^1(U)$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(i) F es conservativo

(ii) Para toda curva regular a trozos y cerrada γ con $\overline{\gamma} \subseteq U$, se tiene $\oint_{\gamma} F \cdot d\mathbf{l} = 0$.

(iii) Para cualquiera curvas regulares a trozos γ, ϑ con $\overline{\gamma}, \overline{\vartheta} \subseteq U$ y mismos origen y final, se tiene

$$\int_{\gamma} F \cdot d\mathbf{l} = \int_{\vartheta} F \cdot d\mathbf{l}$$

Antes de ver aplicaciones de este resultado, veamos criterios para decidir si un campo es o no conservativo y una técnica para calcular un potencial cuando lo sea.

Teorema Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y convexo, y $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase $C^1(U)$. Entonces F es conservativo si y solo si

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x) \quad \forall x \in U \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

Ejemplo Sea $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ el campo $F(x, y) = (x^3 + xy^2, -y + x^2y)$ $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Queremos ver que es conservativo y encontrar un potencial que se anule en $(0, 1)$.

$\mathbb{R}^2$ es claramente convexo, y podemos verificar que

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = 2xy, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = 2xy,$$

por tanto, F es conservativo y existe $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = F$.
Para encontrar f , resolvemos el sistema

$$\begin{cases} F_1 = \frac{\partial f}{\partial x} \\ F_2 = \frac{\partial f}{\partial y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 + xy^2 = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ -y + x^2y = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{cases}$$

Escogemos una ecuación e integramos con respecto a la variable de derivación

$$\int_0^x (t^3 + ty^2) dt = \int_0^x \frac{\partial f}{\partial t}(t,y) dt$$

El origen de la integral indefinida es la primera coordenada del punto donde queremos que se anule

$$= \left[\frac{t^4}{4} + \frac{y^2}{2} t^2 \right]_0^x = f(x,y) - f(0,y)$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2 y^2}{2} + \underbrace{f(0,y)}$$

En vez de una constante, obtenemos una función de y , que no variamos al derivar respecto de x .

Usamos la segunda ecuación para calcular $f(0,y)$

$$-y + x^2y = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2 y^2}{2} + f(0,y) \right) = x^2y + \frac{\partial f(0,y)}{\partial y}$$

Los términos que dependen de x se anulan gracias a la condición de derivadas cruzadas

$$\frac{\partial f(0,y)}{\partial y} = -y \Rightarrow \int_1^y \frac{\partial f(0,s)}{\partial s} ds = - \int_1^y s ds = - \left[\frac{s^2}{2} \right]_1^y = \frac{1}{2} - \frac{y^2}{2}$$

$$\Rightarrow f(0,y) - \underbrace{f(0,1)}_{=0} = \frac{1}{2} - \frac{y^2}{2}$$

Finalmente, $f(x,y) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2 y^2}{2} - \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}$. Se puede comprobar fácilmente que

$$\begin{aligned}\nabla f(x,y) &= F(x,y) \\ f(0,1) &= 0.\end{aligned}$$

Si no es necesario dar un potencial específico, tomamos el origen que queramos para las integrales.

Ejemplo La hipótesis de convexidad no puede eliminarse del teorema.

Sea $F: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$.

$F \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ de forma clara, y además cumple

$$\frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} = \frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x},$$

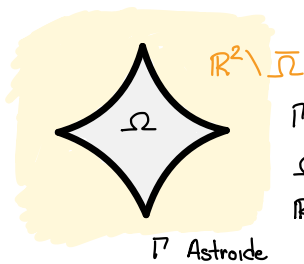
pero si tomamos la curva cerrada $\gamma: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, vemos que $\Gamma = \mathbb{S}((0,0), 1) \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, y sin embargo,

$$\int_{\gamma} F \cdot d\gamma = \int_{-\pi}^{\pi} \langle (-\sin t, \cos t), (-\sin t, \cos t) \rangle dt = \int_{-\pi}^{\pi} dt = 2\pi.$$

Como esa integral no es cero, F no es conservativo. El teorema de las derivadas cruzadas no puede usarse porque $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ no es convexo.

Cuando γ es una curva de Jordan, podemos relacionar la integral de línea a lo largo de γ con una integral múltiple en su recinto interior.

Teorema (de la curva de Jordan) Sea $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva de Jordan con imagen $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$. Entonces, $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ está formado por dos regiones disjuntas: una acotada llamada región interior a γ y otra no acotada llamada región exterior. Ambas tienen a Γ como frontera



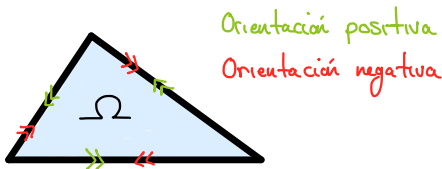
$$\Gamma = \partial\Omega = \partial(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega})$$

Ω región interior

$\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$ región exterior

Γ Astroide

Definición Decimos que γ está orientada positivamente si al recorrer Γ , dejamos el dominio interior a la izquierda (sentido antihorario), y orientada negativamente si Ω queda a la derecha.



Orientación positiva

Orientación negativa

Date cuenta: Una forma fácil de cambiar la orientación es considerar la reparametrización $-\gamma$.

Definición Sean $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un abierto y $F: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial diferenciable. Definimos el rotacional de F como el campo escalar

$$\nabla \times F = \text{rot } F: U \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{rot } F(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ F_1 & F_2 \end{vmatrix} = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y).$$

Expresión formal, es útil para recordar la definición

Observación Si $F: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ es conservativo $\Rightarrow \text{rot } F = 0$. El recíproco es cierto si U es convexo.

Teorema de Green Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva de Jordan regular a trozos, orientada positivamente y con región interior Ω . Sea $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un abierto con $\Omega \cup \Gamma \subseteq U$ y $F: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo de clase $C^1(U)$. Entonces,

$$\int_{\gamma} F \cdot d\mathbf{l} = \int_{\Omega} \nabla \times F(x, y) \, d(x, y)$$

✱ Si γ está orientada negativamente, cambiamos el signo de la primera integral, o reparametrizamos.

Aplicación: Cálculo de áreas Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^2$ tal que $\partial\Omega$ puede parametrizarse mediante una curva de Jordan γ (que suponemos que tiene orientación positiva). Entonces, si $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es cualquier campo vectorial con $\nabla \times F = 1$, se tiene:

$$\int_{\gamma} F \cdot d\ell = \int_{\Omega} \nabla \times F(x, y) d(x, y) = \int_{\Omega} 1 d(x, y) = \text{área}(\Omega)$$

Como campos F podemos tomar, por ejemplo, $F(x, y) = (0, x)$, $F(x, y) = (-y, 0)$
o $F(x, y) = \left(\frac{-y}{2}, \frac{x}{2}\right)$. Esto nos da las fórmulas

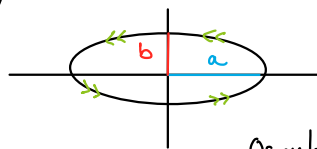
$$\text{área}(\Omega) = \int_{\gamma} x dy = - \int_{\gamma} y dx = \frac{1}{2} \int_{\gamma} (x dy - y dx)$$

Ejemplo Calcular el área de una elipse plana

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\} \quad a, b > 0.$$

Empezamos dando una parametrización de $\partial\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$. Para esto, podemos modificar la de la circunferencia:

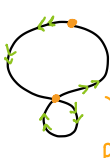
$$\begin{aligned} \gamma: [-\pi, \pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \gamma(t) &= (a \cos t, b \sin t) \end{aligned}$$

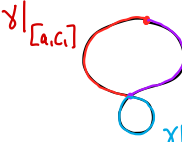


Aplicando el teorema de Green al campo $F(x, y) = \frac{1}{2}(-y, x)$, que cumple $\nabla \times F = 1$, tenemos

$$\begin{aligned} \text{área}(\Omega) &= \int_{\gamma} F \cdot d\ell = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \langle (-b \sin t, a \cos t), (-a \sin t, b \cos t) \rangle dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (ab \sin^2 t + ab \cos^2 t) dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} ab dt = ab\pi \end{aligned}$$

Observación Si queremos calcular el área de regiones interiores a curvas regulares a trozos que no sean curvas de Jordan, busquemos descomponerlas como suma de curvas de Jordan.

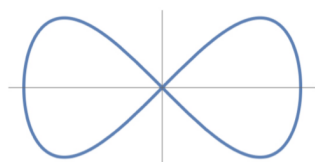

 $\gamma(a) = \gamma(b)$
 $\gamma(c_1) = \gamma(c_2)$
 para $a < c_1 < c_2 < b$
 Suponemos que esta es la orientación de γ .


 $\gamma|_{[a,c_1]}$ $\gamma|_{[c_2,b]}$ $\gamma|_{[c_1,c_2]}$

Curva de Jordan 1:
 $\gamma|_{[a,c_1]} + \gamma|_{[c_2,b]}$
 (orientación positiva)

Curva de Jordan 2: $\gamma|_{[c_1,c_2]}$
 (orientación negativa).

Ejemplo La Lemniscata de Geroni es la curva plana $\alpha: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (\sin t, \sin t \cos t)$ para todo $t \in [0, 2\pi]$.



Lemniscata de Geroni

Queremos calcular el área de su región interior.

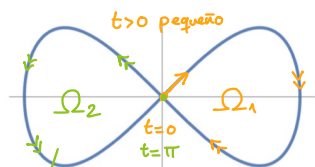
Estudiamos sus extremos y su orientación:

$$\alpha(0) = (0,0), \quad \alpha(2\pi) = (0,0)$$

Y vemos que tiene una auto-intersección en $(0,0)$, en un instante $t_0 \in [0, 2\pi]$ que pasamos a calcular:

$$\alpha(t) = (0,0) \iff \begin{cases} \sin t = 0 \\ \sin t \cos t = 0 \end{cases} \iff \sin t = 0 \iff t = 0, \pi, 2\pi.$$

Extremos
 ↗ ↘
 0, π , 2π .
 ↑
 punto medio



Lemniscata de Geroni

Orientación positiva.

Orientación negativa

Podemos dividir α en dos curvas de Jordan:

$$\alpha_1: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\alpha_2: [\pi, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\alpha_1(t) = (\sin t, \sin t \cos t)$$

$$\alpha_2(t) = (\sin t, \sin t \cos t)$$

$$\alpha'(t) = (\cos t, \cos 2t)$$

$$\begin{aligned}
\text{área}(\Omega) &= \text{área}(\Omega_1) + \text{área}(\Omega_2) = -\int_{\alpha_1} (-y, 0) \cdot d\mathbf{l} + \int_{\alpha_2} (-y, 0) \cdot d\mathbf{l} \\
&= -\int_0^\pi \langle (-\sin t \cos t, 0), (\cos t, \cos 2t) \rangle dt \\
&\quad + \int_\pi^{2\pi} \langle (-\sin t \cos t, 0), (\cos t, \cos 2t) \rangle dt \\
&= \int_0^\pi \sin t \cos^2 t dt - \int_\pi^{2\pi} \sin t \cos^2 t dt = \left[-\frac{1}{3} \cos^3 t \right]_0^\pi - \left[-\frac{1}{3} \cos^3 t \right]_\pi^{2\pi} \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

El teorema de Green también es válido para dominios con agujeros, siempre y cuando la frontera de estos pueda parametrizarse usando curvas de Jordan.

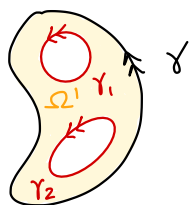
Teorema (de Green, para dominios con agujeros) Sea γ una curva de Jordan regular a trozos con orientación positiva y dominio interior Ω . Sean además $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ curvas de Jordan orientadas positivamente (respecto a su propia región interior), con regiones interiores $\Omega_1, \dots, \Omega_k$.

Supongamos que $\Omega_i \subseteq \Omega \ \forall i=1, \dots, k$ y $\overline{\Omega_i} \cap \overline{\Omega_j} = \emptyset \ \forall i, j=1, \dots, k$ (las curvas y sus regiones interiores son disjuntas dos a dos). Llamamos

$$\Omega' = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^k \Omega_i$$

y consideramos un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ con $\overline{\Omega'} \subseteq U$, y $F: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo de clase $C^1(U)$. Entonces,

$$\int_\gamma F \cdot d\mathbf{l} - \sum_{i=1}^k \int_{\gamma_i} F \cdot d\mathbf{l} = \int_{\Omega'} \nabla \times F(x, y) dx dy$$



Nótese que el recinto Ω' queda a la derecha de γ_1 y γ_2 respecto a su propia orientación positiva, lo que motiva que esas integrales lleven un signo negativo.

Si F es $C^1(\Omega)$, este teorema lo obtendremos aplicando el teorema de Green para γ y luego para $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ y restando. La diferencia es que con esta versión podemos considerar campos que no son diferenciables en puntos de Ω_i , para algún i .

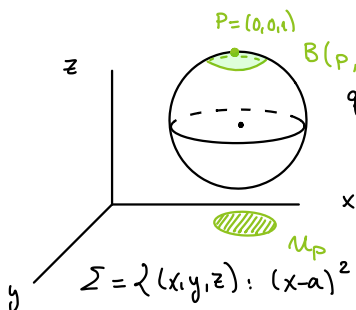
Parte II: Integral de superficie

La definición de superficie como hypersuperficie de $\mathbb{R}^3$ no es práctica para hacer integrales, así que usaremos como definición una de sus propiedades:

Definición Una superficie de $\mathbb{R}^3$ es un conjunto $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ tal que, para todo $p \in \Sigma$ existen una bola $B(p, \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$) de $\mathbb{R}^3$, un abierto $U_p \subseteq \mathbb{R}^2$ y un campo escalar $f_p: U_p \rightarrow \mathbb{R}$ de clase $C^1(U_p)$ tal que

$$\Sigma \cap B(p, \varepsilon) = \begin{cases} \{(x, y, f_p(x, y)) : (x, y) \in U_p\}, & \text{o} \\ \{(x, f_p(x, z), z) : (x, z) \in U_p\}, & \text{o} \\ \{(f_p(y, z), y, z) : (y, z) \in U_p\}. \end{cases}$$

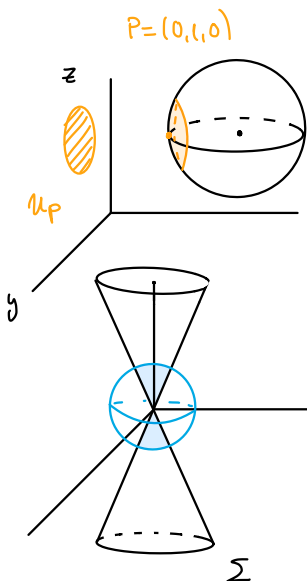
Es decir, $\Sigma \cap B(p, \varepsilon)$ es el grafo de un campo escalar definido sobre un abierto de uno de los planos cartesianos.



puede verse como el grafo de una función que depende de (x, y) :

$$z = \sqrt{r^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2} + c$$

$$\Sigma = \{(x, y, z) : (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2\}$$



$\Sigma \cap B(0,1,0), \varepsilon)$ no puede verse como un grafo sobre el plano xy , ya que habría puntos con dos imágenes, pero puede verse como un grafo sobre el plano z , tomando

$$f(y, z) = \sqrt{r^2 - (y-b)^2 - (z-c)^2} + a$$

Para que el cono sea una superficie debemos eliminar el vértice, ya que la región $\Sigma \cap B(\vec{0}, \varepsilon)$ no puede escribirse como grafo sobre ninguno de los planos.

Las superficies de $\mathbb{R}^3$ pueden venir expresadas de las siguientes formas:

Forma implícita Sea $U \subseteq \mathbb{R}^3$ y $G: U \rightarrow \mathbb{R}$ de clase $C^1(U)$. Entonces

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in U : G(x, y, z) = 0\}$$

es una superficie de $\mathbb{R}^3$ si $\nabla G(x, y, z) \neq (0, 0, 0) \quad \forall (x, y, z) \in \Sigma$.

Forma explícita, o como grafo de una función $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase $C^1(U)$:

$$\Sigma = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in U\},$$

o permutación de sus coordenadas, es decir, como grafo en x o y .

Forma paramétrica Sean $U \subseteq \mathbb{R}^2$ y $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase $C^1(U)$. Entonces $\Sigma = \varphi(U)$ es una superficie de $\mathbb{R}^3$, esto es, ^{al igual que con curvas, a veces permitiremos vértices y aristas.}

$$\Sigma = \{(\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \varphi_3(x, y)) : (x, y) \in U\}.$$

En tal caso, decimos que φ es una parametrización de Σ , y que Σ tiene ecuaciones paramétricas

$$x = \varphi_1(x, y), \quad y = \varphi_2(x, y), \quad z = \varphi_3(x, y)$$

Toda superficie en forma explícita ($z = f(x, y)$) puede pasarse a forma implícita tomando $G(x, y, z) = z - f(x, y)$ y a forma paramétrica mediante

$$\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

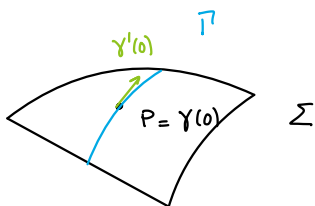
Ejemplo la esfera $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2\}$ es un ejemplo de superficie en forma implícita. Usando coordenadas esféricas, obtenemos la parametrización

$$\varphi(\theta, \varphi) = (a + r \cos \theta \sin \varphi, b + r \sin \theta \sin \varphi, c + r \cos \varphi) \quad (\theta, \varphi) \in [-\pi, \pi] \times [0, \pi].$$

En el bloque III habíamos visto cómo obtener la ecuación del plano tangente a gráficas e hipersuperficies (superficies implícitas). Ahora, damos una noción más general de plano tangente a una superficie que nos permite cubrir el caso de superficies paramétricas.

Definición Sea Σ una superficie de $\mathbb{R}^3$ y $p \in \Sigma$. Se dice que un vector $v \in \mathbb{R}^3$ es tangente a Σ en p si existe una curva regular $\gamma: [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \Sigma$ con $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = v$. ↙ $v \in T_p \Sigma$

Decimos que w es normal a Σ en p si $\langle w, v \rangle = 0$ para todo vector tangente v a Σ en p .



Calculamos la ecuación del plano tangente según venga dada la superficie.

En forma implícita Sea $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : G(x, y, z) = 0\}$, con $\nabla G(x, y, z) \neq \vec{0} \quad \forall (x, y, z) \in \Sigma$, y $(a, b, c) \in \Sigma$ (es decir $G(a, b, c) = 0$).

Sea $\gamma: [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \Sigma$ una curva regular con $\gamma(0) = (a, b, c)$. Queremos ver qué satisface $\gamma'(0)$.

Por un lado, $\gamma(0) = (\gamma_1(0), \gamma_2(0), \gamma_3(0)) = (a, b, c)$.

Por otro, $\gamma(t) \in \Sigma \quad \forall t \in [-\epsilon, \epsilon]$, luego $G(\gamma(t)) = 0$, es decir,

$$G(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)) = 0.$$

Derivamos usando la regla de la cadena:

$$0 = \nabla G \circ \gamma(t) = \nabla G(\gamma(t)) D\gamma(t) = \nabla G(\gamma(t)) \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \\ \gamma_3'(t) \end{pmatrix} = \langle \nabla G(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$$

Evalúamos en $t=0$:

$$0 = \langle \nabla G(\gamma(0)), \gamma'(0) \rangle = \langle \nabla G(a, b, c), v \rangle.$$

Por tanto, los vectores tangentes a Σ en (a, b, c) satisfacen la ecuación

$$\langle \nabla G(a, b, c), v \rangle = 0.$$

Por tanto, $\nabla G(a, b, c)$ es un vector normal a Σ en (a, b, c) , y

$$T_{(a, b, c)} \Sigma = \{ (a, b, c) + v \in \mathbb{R}^3 : \langle \nabla G(a, b, c), v \rangle = 0 \} =$$

$$\overset{\text{Escribiendo}}{v = (a+x, b+y, c+z)} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \langle \nabla G(a, b, c), (x-a, y-b, z-c) \rangle = 0 \}$$

Si Σ está en forma explícita, tomamos $G(x, y, z) = f(x, y) - z$
y $(a, b, c) = (a, b, f(a, b))$ para tener

$$T_{(a, b, f(a, b))} \Sigma = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :$$

$$\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b), -1 \right), (x-a, y-b, z-f(a, b)) \rangle = 0 \}$$

$$= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y-b) = z - f(a, b) \}.$$

Por último, si Σ viene en forma paramétrica, $\Sigma = \{ \varphi(x, y) : (x, y) \in \mathcal{U} \}$,
y tenemos $p \in \Sigma$, $p = \varphi(a, b)$ con $(a, b) \in \mathcal{U}$, entonces podemos

considerar las curvas $\alpha(t) = \varphi(a+t, b)$ y $\beta(t) = \varphi(a, b+t)$.

Claramente, $\alpha(0) = \varphi(a, b) = p = \beta(0)$, por lo que $\alpha'(0)$ y $\beta'(0)$ son vectores tangentes. Usamos la regla de la cadena:

$$\alpha'(0) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(a, b) \frac{\partial}{\partial t}(a+t) \Big|_{t=0} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(a, b) \frac{\partial}{\partial t}(b) \Big|_{t=0} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(a, b)$$

y análogamente $\beta'(0) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(a, b)$.

Por tanto, si $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(a, b) = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(a, b), \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(a, b), \frac{\partial \varphi_3}{\partial x}(a, b) \right)$ y $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(a, b)$

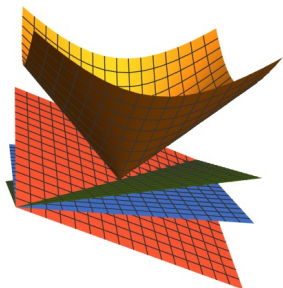
son linealmente independientes, serán un sistema de generadores del plano tangente. En definitiva,

$$T_{\varphi(a,b)} \Sigma = \left\{ \varphi(a, b) + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}(a, b) + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial y}(a, b) : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Un vector normal puede calcularse como $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(a, b) \times \frac{\partial \varphi}{\partial y}(a, b)$

Definición Una superficie se dice suave si admite plano tangente en todos sus puntos. Igualmente, una curva se dice suave si admite recta tangente en todos sus puntos.

Ejemplo Sea $\varphi: B((0,0), 1) \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$



Vemos que esta superficie no es suave, ya que en su vértice el plano tangente no está bien definido. Si calculamos los generadores, vemos que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,0) = \left(1, 0, \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{t^2}}{t} \right) \quad (\nexists)$$

Definición Sea Σ una superficie de $\mathbb{R}^3$ suave parametrizada por $\varphi: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, y sea $f: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar continuo.

Se define la integral de superficie de f sobre Σ como

$$\int_{\Sigma} f \, ds = \int_{\mathcal{U}} f(\varphi(x,y)) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) \right\| (x,y) \, d(x,y)$$

En el caso particular de una superficie en forma explícita,

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = g(x,y) \wedge (x,y) \in \mathcal{U}\}$$

la fórmula anterior se reduce a

$$\int_{\Sigma} f \, ds = \int_{\mathcal{U}} f(x,y,g(x,y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} \, d(x,y).$$

Definición Sea Σ una superficie parametrizada por una función $\varphi: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Se define el área de Σ como la integral doble:

$$\text{área}(\Sigma) = \int_{\mathcal{U}} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) \right\| \, d(x,y) = \int_{\Sigma} 1 \, ds$$

Ejemplo Área de la esfera.

Sea $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$, con $R > 0$. Conocemos la parametrización dada por las coordenadas esféricas:

$$\Phi: [-\pi, \pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\Phi(\theta, \varphi) = (R \cos \theta \sin \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \varphi)$$

$$\begin{aligned} \text{Calculamos } \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right\|: \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -R \sin \theta \sin \varphi & R \cos \theta \sin \varphi & 0 \\ R \cos \theta \cos \varphi & R \sin \theta \cos \varphi & -R \sin \varphi \end{vmatrix} \\ &= (-R^2 \cos \theta \sin^2 \varphi, -R^2 \sin \theta \sin^2 \varphi, -R^2 \sin \varphi \cos \varphi) \end{aligned}$$

$$\text{Entonces, } \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right\| = \sqrt{R^4 (\cos^2 \theta \sin^4 \varphi + \sin^2 \theta \sin^4 \varphi + \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi)}$$

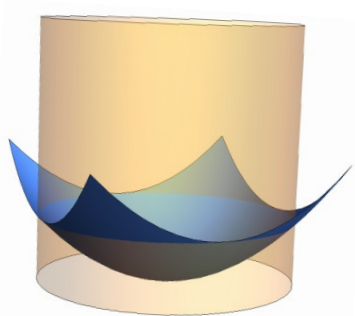
$$= R^2 \sqrt{\sin^4 \varphi + \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi} = R^2 \sqrt{\sin^2 \varphi} = R^2 |\sin \varphi| = R \sin \varphi \quad \leftarrow \varphi \in [0, \pi]$$

Se tiene por tanto

$$\begin{aligned} \text{área}(\Sigma) &= \int_{[-\pi, \pi] \times [0, \pi]} \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right\| d(\theta, \varphi) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^2 \sin \varphi \, d\theta \, d\varphi = \\ &= 2\pi R^2 \int_0^\pi \sin \varphi \, d\varphi = 4\pi R^2 \end{aligned}$$

Ejemplo

Calcular el área del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que queda dentro del cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 2$.



La superficie con la que trabajaremos es

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{z = x^2 + y^2}_{z = f(x, y)} \wedge \underbrace{x^2 + y^2 \leq 2}_{(x, y) \in U} \} \\ &= \{ (x, y, x^2 + y^2) : (x, y) \in B((0, 0), \sqrt{2}) \} \end{aligned}$$

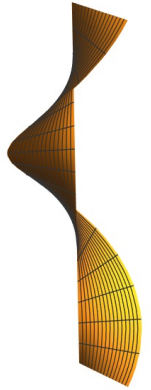
Por tanto, una parametrización es $\varphi: B((0, 0), \sqrt{2}) \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $\varphi(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$. Además, se tiene:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\| &= \left\| \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} \right\| = \left\| (-2x, -2y, 1) \right\| = \\ &= \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Finalmente, } \text{área}(\Sigma) &= \int_{B((0, 0), \sqrt{2})} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, d(x, y) \stackrel{\text{Cambio a polares}}{=} \int_0^{\sqrt{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \rho \sqrt{1 + 4\rho^2} \, d\theta \, d\rho \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{12} (1 + 4\rho^2)^{3/2} \right]_0^{\sqrt{2}} = \end{aligned}$$

Ejemplo Calcular $\int_{\Sigma} \sqrt{1+x^2+y^2} \, ds$, donde Σ es la superficie de ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = r \cos \theta & r \in [0, 1] \\ y = r \sin \theta & \theta \in [0, 2\pi] \\ z = \theta \end{cases}$$



Una parametrización de Σ es $\varphi: [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$,
con $\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, \theta)$.

Tenemos
$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} \times \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 1 \end{vmatrix} = (\sin \theta, \cos \theta, r)$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial r} \times \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right\| = \sqrt{1 + r^2}$$

Por tanto,
$$\int_{\Sigma} f \, ds = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1+r^2) \, dr \, d\theta = \frac{8\pi}{3}.$$

Proposición (Propiedades de la integral de superficie de un campo escalar) Sean Σ una superficie de $\mathbb{R}^3$ con parametrización $\varphi: U \rightarrow \Sigma$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $f, g: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ campos continuos.

(1) (Linealidad)
$$\int_{\Sigma} (\alpha f + \beta g) \, ds = \alpha \int_{\Sigma} f \, ds + \beta \int_{\Sigma} g \, ds$$

(2) (Continuidad)
$$\left| \int_{\Sigma} f \, ds \right| \leq \max \{ |f(x)| : x \in \Sigma \} \cdot \text{área}(\Sigma)$$

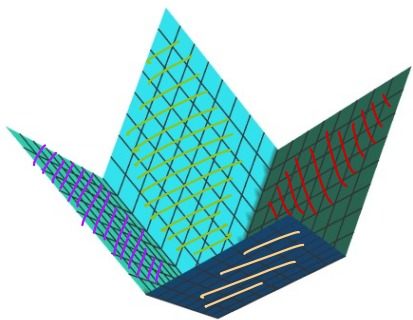
(3) (buena definición)
$$\int_{\Sigma} f \, ds \text{ no depende de la parametrización escogida para } \Sigma.$$

(4) Aditividad Si $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ con $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ de medida cero, siendo Σ_1 y Σ_2 superficies suaves, entonces

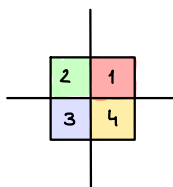
$$\int_{\Sigma} f = \int_{\Sigma_1} f + \int_{\Sigma_2} f.$$

Observación Si S no es suave sino que tiene aristas, y puede verse como unión de un número finito de superficies suaves $S = \bigcup_{i=1}^m S_i$, entonces se define la integral

$$\int_S f ds = \sum_{i=1}^m \int_{S_i} f ds$$



Ejemplo $\Sigma = \{(x, y, |x| + |y|) : x \in [-1, 1], y \in [-1, 1]\}$



la parametrización

$$\varphi: [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\varphi(x, y) = (x, y, |x| + |y|)$$

$[-1, 1] \times [-1, 1]$ no es diferenciable en los ejes, pero podemos ver que

$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_4$, donde

$$\Sigma_1 = \{(x, y, x+y) : x \in [0, 1], y \in [0, 1]\},$$

$$\Sigma_2 = \{(x, y, -x+y) : x \in [-1, 0], y \in [0, 1]\}$$

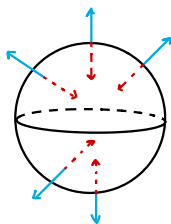
$$\Sigma_3 = \{(x, y, -x-y) : x \in [-1, 0], y \in [-1, 0]\}$$

$$\Sigma_4 = \{(x, y, x-y) : x \in [0, 1], y \in [-1, 0]\}.$$

} Superficies suaves.

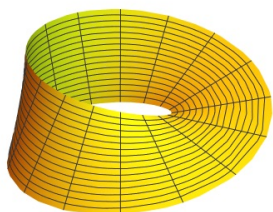
Para definir y estudiar las propiedades de la integral de superficie de campos vectoriales, necesitamos establecer que entendemos por orientación de una superficie

Definición Una superficie Σ se dice orientable si existe un campo vectorial continuo $N: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $N(p)$ es un vector normal a Σ en p con norma 1 para todo $p \in \Sigma$.



Si Σ es una superficie orientable con orientación N , entonces admite exactamente dos orientaciones: N y $-N$.

Intuitivamente, una superficie orientable es aquella que tiene dos caras.



La banda de Möbius es un ejemplo de superficie no orientable, ya que tiene una única cara.

Ninguna orientación sobre esta superficie puede ser continua.

Definición Si Σ es una superficie suave con parametrización $\varphi: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \Sigma$, una orientación viene dada por

$$N(\varphi(x,y)) = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y)}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) \right\|}$$

A esta orientación se le llama orientación inducida por la parametrización φ .

Si Σ es una superficie en forma explícita, $z = f(x,y)$, una orientación viene dada por

$$N(x,y,f(x,y)) = \frac{\left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial f}{\partial y}(x,y), 1\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2}}$$

Si Σ viene en forma implícita, $g(x,y,z) = 0$, entonces una orientación es la dada por

$$N(x,y,z) = \frac{\nabla g(x,y,z)}{\|\nabla g(x,y,z)\|}$$

Notación A una orientación $N: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ también se puede llamar una normal de Σ

Definición Sea Σ una superficie suave con parametrización $\varphi: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \Sigma$, y sea $F: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo. Se define la integral de F sobre Σ como

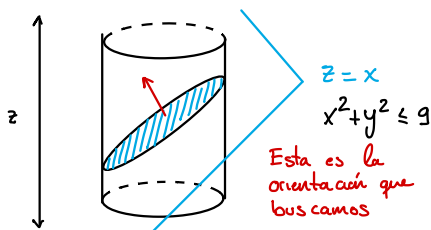
$$\int_{\Sigma} F \cdot ds = \int_U \langle F(\varphi(x,y)), \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) \rangle dx dy$$

Proposición (Propiedades de la integral de superficie) Sea Σ una superficie de $\mathbb{R}^3$ con parametrización $\varphi: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. La integral de superficie de campos vectoriales es también lineal, aditiva y continua (cambiando $|f|$ por $\|F\|$). Si $\tilde{\varphi}: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es otra parametrización de Σ , entonces

$$\int_{\Sigma(\tilde{\varphi})} F \cdot ds = \begin{cases} \int_{\Sigma \varphi} F \cdot ds & \text{si } \varphi \text{ y } \tilde{\varphi} \text{ inducen la misma orientación} \\ - \int_{\Sigma \varphi} F \cdot ds & \text{si } \varphi \text{ y } \tilde{\varphi} \text{ inducen orientaciones opuestas.} \end{cases}$$

Para denotar que integramos respecto a la parametrización $\tilde{\varphi}$

Ejemplo Sea Σ la superficie $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3: z = x \wedge x^2 + y^2 \leq 9\}$, y $F(x,y,z) = (x,y,1+z)$. Calcular $\int_{\Sigma} F \cdot ds$ respecto a la normal con coordenada $z > 0$.



Empezamos dando una parametrización para Σ :

$$\begin{aligned}\Sigma &= \{(x,y,z) : z=x \wedge x^2+y^2 \leq 9\} = \{(x,y,x) : x^2+y^2 \leq 9\} = \\ &= \{(x,y,x) : (x,y) \in \overline{B}((0,0),3)\} \quad (\text{forma explícita})\end{aligned}$$

Por tanto, una parametrización es $\varphi: \overline{B}((0,0),3) \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $\varphi(x,y) = (x,y,x)$.

Calculamos la normal inducida:

$$N(\varphi(x,y)) = N(x,y,x) = \frac{\varphi_x \times \varphi_y}{\|\varphi_x \times \varphi_y\|} = \frac{(-1,0,1)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\varphi_x \times \varphi_y(x,y) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 0, 1)$$

$\uparrow$
 La coordenada z es positiva, así que esta es la que se pide.

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma} F \cdot ds &= \int_{\overline{B}((0,0),3)} \langle (x,y,1+x), (-1,0,1) \rangle d(x,y) = \int_{\overline{B}((0,0),3)} 1 d(x,y) \\ &= \text{área}(\overline{B}((0,0),3)) = 9\pi.\end{aligned}$$

Proposición (Relación entre la integral de superficie de campos vectoriales y escalares) Sea Σ una superficie parametrizada por φ , y sea N la normal inducida. Sea $F: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo.

Entonces,

$$\int_{\Sigma} F \cdot ds = \int_{\Sigma} \underbrace{\langle F, N \rangle}_{\text{Campo escalar}} ds$$

Para concluir el curso, enunciamos los teoremas principales de análisis vectorial sobre superficies, que nos permiten relacionar la integral de superficie con la integral de línea y la integral de volumen.

Para ello, introducamos primero dos operadores diferenciales que necesitaremos.

Definición (Rotacional de $\mathbb{R}^3$) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^3$ y $F: U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F = (F_1, F_2, F_3)$ un campo vectorial diferenciable. El rotacional de F es el campo vectorial $\text{rot } F: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por

$$\text{rot } F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

truco memotécnico

Proposición Sea $f: U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar de clase $C^2(U)$. Entonces $\text{rot } \nabla f = 0$. En consecuencia, si $F: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo conservativo, $\text{rot } F = (0, 0, 0)$. Si U es convexo, el recíproco también es cierto.

Definición Sea $F: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial diferenciable. Se define la divergencia de F como el campo escalar $\text{div } F: U \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\text{div } F = \text{traza}(DF) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$$

Si $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es un campo de clase $C^2(U)$, se define su Laplaciano Δf como el campo escalar $\Delta f: U \rightarrow \mathbb{R}$,

Curiosidad,
no lo vamos
a usar.

$$\Delta f = \text{div } \nabla f = \text{traza } \nabla^2 f = \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 F_n}{\partial x_n^2}.$$

Proposición Sea $F: U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase $C^2(U)$. Entonces $\text{div}(\nabla \times F) = 0$.

El teorema de Stokes puede como una versión de $\mathbb{R}^3$ del teorema de Green. En pocas palabras, si Σ es una superficie de $\mathbb{R}^3$ con contorno Γ , esto es:

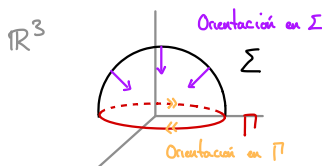
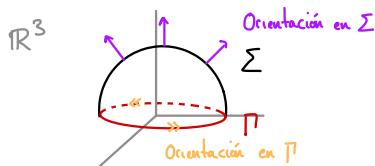


Entonces $\left| \oint_{\Gamma} F \cdot dl \right| = \left| \int_{\Sigma} \nabla \times F \cdot ds \right|$, y el signo de la igualdad

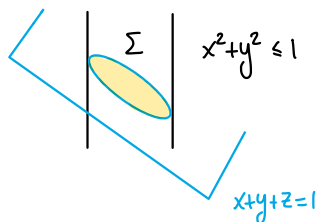
depende de las orientaciones de Γ y Σ . Fijada una orientación para Γ , la orientación que debemos tomar para Σ es la dada por la regla de la mano derecha.

Teorema de Stokes Sea Σ una superficie de $\mathbb{R}^3$ cuyo contorno Γ está parametrizado por una curva cerrada regular a trozos γ , y supongamos que la orientación de Σ viene dada por la regla de la mano derecha a partir de la orientación de γ . Sea $U \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto de $\mathbb{R}^3$ y $F: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo de clase $C^1(U)$. Entonces:

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\mathbf{l} = \int_{\Sigma} \nabla \times F \cdot d\mathbf{S}$$



Ejemplo A modo de ejemplo, verificaremos el teorema de Stokes para la superficie Σ obtenida como intersección del cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$ y el plano $x + y + z = 1$ y el campo $F(x, y, z) = (-y^3, x^3, -z^3)$.



Empezamos calculando la integral de la izquierda, para lo que necesitamos una parametrización del contorno de Σ , que es la curva de $\mathbb{R}^3$

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, x + y + z = 1\}$$

Pasamos a coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned} C &= \{(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) : \rho^2 = 1, \rho \cos \theta + \rho \sin \theta + z = 1\} \\ &= \{(\cos \theta, \sin \theta, 1 - \cos \theta - \sin \theta) : \theta \in [-\pi, \pi]\} \end{aligned}$$

Por tanto, una parametrización de C es $\gamma: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 1 - \cos \theta - \sin \theta)$. La curva se recorre en sentido antihorario en x e y , por lo que la orientación de Σ debe tener z positiva.

Usando la definición de integral de línea:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} &= \int_{-\pi}^{\pi} \langle (-\sin^3 \theta, \cos^3 \theta, (\sin \theta + \cos \theta - 1)^3), (-\sin \theta, \cos \theta, \sin \theta - \cos \theta) \rangle d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta + (\sin \theta - \cos \theta)(\sin \theta + \cos \theta - 1)^3) d\theta = \frac{3\pi}{2}\end{aligned}$$

Calculamos ahora la integral de la derecha. Podemos encontrar una parametrización de Σ pasando otra vez a cilíndricas:

$$\begin{aligned}\Sigma &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge x + y + z = 1\} = \\ &= \{(p \cos \theta, p \sin \theta, z) : p^2 \leq 1 \wedge z = 1 - p \cos \theta - p \sin \theta\} \\ &= \{(p \cos \theta, p \sin \theta, 1 - p \cos \theta - p \sin \theta) : p \in [0, 1], \theta \in [-\pi, \pi]\}\end{aligned}$$

Es decir, $\Psi: [0, 1] \times [-\pi, \pi] \rightarrow \Sigma$, $\Psi(p, \theta) = (p \cos \theta, p \sin \theta, 1 - p \cos \theta - p \sin \theta)$ es una parametrización de Σ . Calculamos la orientación y vemos que es la que buscamos:

$$\Psi_p \times \Psi_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \cos \theta & \sin \theta & -\cos \theta - \sin \theta \\ -p \sin \theta & p \cos \theta & p \sin \theta - p \cos \theta \end{vmatrix} = (p, p, p) \quad (\text{La coordenada } z \text{ es } > 0).$$

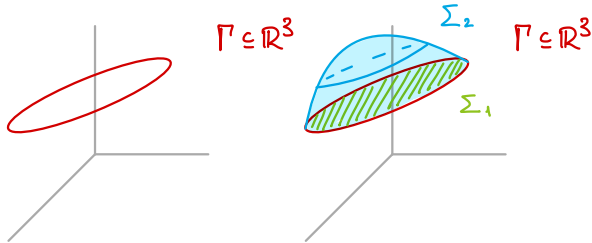
Calculamos el rotacional del campo $\mathbf{F}$:

$$\nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^3 & x^3 & -z^3 \end{vmatrix} = (0, 0, 3x^2 + 3y^2).$$

Hacemos la integral:

$$\int_{\Sigma} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{[0, 1] \times [-\pi, \pi]} \langle (0, 0, 3\rho^2), (\rho, \rho, \rho) \rangle d(\rho, \theta) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 3\rho^3 d\rho = \frac{3\pi}{2}.$$

Observación Si queremos evaluar la integral $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$ usando el teorema de Stokes, no importa qué superficie usemos, siempre y cuando Γ sea el contorno de esta.



El teorema de Stokes nos garantiza que $\int_{\Sigma_1} \nabla \times F \cdot ds$ y $\int_{\Sigma_2} \nabla \times F \cdot ds$ son iguales, podemos usar la que queramos.

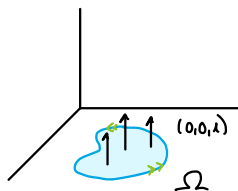
Estudiamos la familia de abertos de $\mathbb{R}^3$ donde podremos aplicar el teorema de la divergencia, que son aquellos cuya frontera es una única superficie sin contorno.

Observación El teorema Green es una consecuencia / caso particular del teorema de Stokes

En esta sección identificamos $\mathbb{R}^2$ con el plano de $\mathbb{R}^3$ $\{z=0\}$. Por tanto, un campo $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F = (F_1, F_2)$, lo entendemos como otro campo

$$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ F(x, y, z) = (F_1(x, y), F_2(x, y), 0)$$

Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow \{z=0\}$ una curva de Jordan con región interior Ω , que interpretamos como una superficie de $\mathbb{R}^3$. Si Γ está orientada positivamente, entonces el normal que debemos tomar en Ω es el $(0, 0, 1)$.



$$\text{rot}^{\mathbb{R}^3} F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1(x, y) & F_2(x, y) & 0 \end{vmatrix} = \left(0, 0, \frac{\partial F_2(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial F_1(x, y)}{\partial y} \right) \\ = (0, 0, \text{rot}^{\mathbb{R}^2} F)$$

$\Omega \subseteq \{z=0\}$, por lo tanto su normal tiene que ser el normal al plano $\{z=0\}$, que es el $(0, 0, 1)$ (teniendo en cuenta la regla de la mano derecha).

Además, una parametrización de Ω es

$$\psi: \Omega \rightarrow \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$$

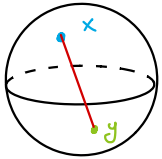
$$\psi(x, y) = (x, y, 0)$$

Por tanto, usando el teorema de Stokes:

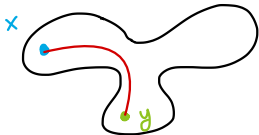
Teorema de Green en $\mathbb{R}^2$

$$\int_{\gamma} F \cdot d\ell = \int_{\Omega} \operatorname{rot}^{\mathbb{R}^3} F \cdot ds = \int_{\Omega} \langle (0,0,\operatorname{rot}^{\mathbb{R}^2} F), (0,0,1) \rangle ds = \int_{\Omega} \operatorname{rot}^{\mathbb{R}^2} F ds$$

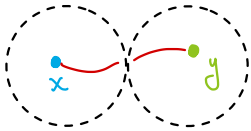
Definición Decimos que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es conexo por arcos si para cada $x, y \in \Omega$ existe una curva $\gamma: [a,b] \rightarrow \Omega$ tal que $\gamma(a) = x$ y $\gamma(b) = y$, es decir, cualesquiera dos puntos están conectados por una curva.



Las bolas abiertas y cerradas son arco-conexas, y en general cualquier conjunto convexo es conexo, ya que podemos tomar $\gamma = [x,y]$.

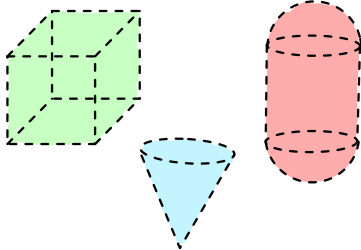


Un conjunto puede ser conexo por arcos sin ser convexo.



Ejemplo de conjunto que no es conexo por arcos.

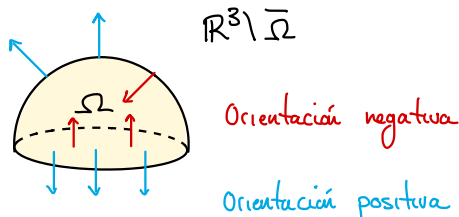
Definición Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto acotado y arco-conexo. Decimos que Ω es regular a trozos si $\partial\Omega$ es una unión finita de superficies suaves.



$\partial\Omega$ es una superficie sin contorno

Definición Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ es un abierto regular a trozos, entonces $\partial\Omega$ es una superficie suave a trozos sin contorno que divide a $\mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega$ en dos regiones: una interior acotada Ω y otra exterior no acotada $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$.

Decimos que $\partial\Omega$ está orientada positivamente si, en todo punto, la normal apunta a la región exterior.

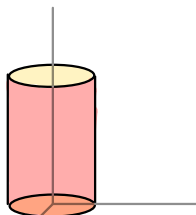


Teorema (de la divergencia, o de Gauss-Ostrogradski) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto de $\mathbb{R}^3$ regular a trozos, y supongamos que $\partial\Omega$ está orientada positivamente. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto con $\bar{\Omega} \subseteq U$ y $F: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo de clase $C^1(U)$. Entonces

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot ds = \int_{\Omega} \operatorname{div} F \, d(x,y,z)$$

Ejemplo A modo de ejemplo, verificaremos el teorema de la divergencia para $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 \leq 1, z \in [0,h]\}$, con $h > 0$, y $F(x,y,z) = (0,0,z)$.

Vemos que Ω es un cilindro de radio 1 y altura $h > 0$



Empezamos con la integral de la derecha, que es una integral de recinto de $\mathbb{R}^3$

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 1$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F \, d(x,y,z) = \int_{\Omega} d(x,y,z) = \operatorname{vol}_3(\Omega) = \pi h.$$

Vemos ahora la integral de la izquierda. Notamos que $\partial\Omega$ tiene 3 piezas:

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \{(x,y,z): x^2+y^2 \leq 1 \wedge z=h\} && \text{(tapa superior)} \\ \Sigma_2 &= \{(x,y,z): x^2+y^2=1 \wedge 0 \leq z \leq h\} && \text{(borde del cilindro)} \\ \Sigma_3 &= \{(x,y,z): x^2+y^2 \leq 1 \wedge z=0\} && \text{(tapa inferior)}\end{aligned}$$

Tomamos parametrizaciones para cada una, y estudiamos la orientación

$$\Sigma_1 = \{(x,y,h): x^2+y^2 \leq 1\} = \{(x,y,h): (x,y) \in B((0,0),1)\}.$$

por tanto una parametrización es

$$\begin{aligned}\varphi_1: B((0,0),1) &\rightarrow \mathbb{R}^3, \\ \varphi_1(x,y) &= (x,y,h).\end{aligned}$$

Análogamente, una parametrización para Σ_3 es $\varphi_3: B((0,0),1) \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\varphi_3(x,y) = (x,y,0)$.

Para el borde del cilindro, pasamos a coordenadas cilíndricas

$$\Sigma_2 = \{(x,y,z): x^2+y^2=1 \wedge z \in [0,h]\} = \{(\cos\theta, \sin\theta, z): z \in [0,h], \theta \in [-\pi, \pi]\},$$

por lo que admite la parametrización

$$\begin{aligned}\varphi_2: [-\pi, \pi] \times [0,h] &\rightarrow \Sigma_2 \\ \varphi_2(\theta, z) &= (\cos\theta, \sin\theta, z)\end{aligned}$$

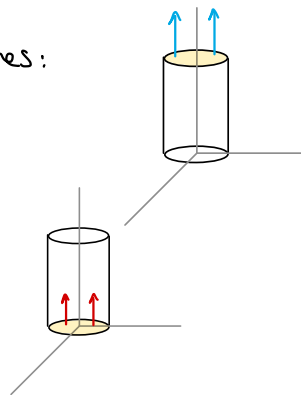
Comprobamos las orientaciones de estas parametrizaciones:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,1)$$

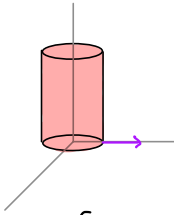
Orientación positiva

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,1)$$

Orientación negativa



$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} \times \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$$



Damos valores: $\varphi(0,0) = (1,0,0)$
 $N(\varphi(0,0)) = (1,0,0)$

orientación positiva.

$$\begin{aligned} \int_{\partial \Omega} F \cdot ds &= \int_{\Sigma_1} F \cdot ds + \int_{\Sigma_2} F_2 \cdot ds - \int_{\Sigma_3} F_3 \cdot ds = \int_{B(0,0,1)} \langle (0,0,h), (0,0,1) \rangle d(x,y) \\ &+ \int_{[-\pi,\pi] \times [0,h]} \langle (0,0,z), (\cos \theta, \sin \theta, 0) \rangle d(\theta,z) - \int_{B(0,0,1)} \langle (0,0,0), (0,0,1) \rangle d(x,y) = \\ &= h \text{ área } (B(0,0,1)) = \pi h. \end{aligned}$$

Aplicación. Como hemos visto, el teorema de la divergencia puede usarse para calcular volúmenes de sólidos de $\mathbb{R}^3$; basta usar un campo que cumpla $\text{div } F = 1$, como $(x,0,0)$, $(0,y,0)$, $(0,0,z)$, $(x/3, y/3, z/3) \dots$