Ejercicio 1. ***(2 puntos)*** *El astroide es la curva plana Γ parametrizada por $\gamma : [0, 2\pi] \to \Gamma$, con $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ para todo $t \in [0, 2\pi]$. Calcular la longitud de Γ.*

Indicación: $\sin^2 t \cos^2 t = \frac{1}{4}\sin^2(2t)$. *Nótense las simetrías de Γ.*

1 Como Γ es simétrica respecto de ambos ejes, calculamos la longitud entre $(1,0)$ y $(0,1)$ y multiplicamos por 4. Es inmediato ver que $(1,0) = \gamma(0)$ y $(0,1) = \gamma(\pi/2)$, por tanto

$$\ell(\gamma) = 4\int_0^{\pi/2} \|\gamma'(t)\|\,dt = 4\int_0^{\pi/4} \|(-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t)\|\,dt$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} 3\sqrt{\sin^2 t\cos^4 t + \sin^4 t \cos^2 t}\,dt = 4\int_0^{\pi/2} \frac{3}{2}\sqrt{\sin^2(2t)(\cos^2 t + \sin^2 t)}\,dt$$

$\sin 2t > 0$ en $[0, \pi/2]$

$$= 6\int_0^{\pi/2} |\sin(2t)|\,dt = 6\left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\pi/2} = 6$$

Ejercicio 2. *Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ el campo vectorial dado por*

$$F(x,y) = \left(6xy - x + y\cos(xy), 3x^2 + x\cos(xy)\right).$$

(2 puntos) *Demostrar que F es un campo conservativo y encontrar un potencial.*

(1 punto) *Sean $\tilde{\gamma}$ el arco del astroide con $0 \le t \le \pi$, y $\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ el segmento $\sigma(t) = (1-2t, 0)$. Justificar por qué $\int_{\tilde{\gamma}} F.d\ell = \int_\sigma F.d\ell$.*

2 Vemos que $\operatorname{rot} F = 6x + \cos xy - xy\sin xy - 6x - \cos xy + xy \sin xy = 0$. Como $\mathbb{R}^2$ es convexo y $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$, entonces F es conservativo.

Buscamos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = F \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 6xy - x + y\cos xy \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 + x\cos xy \end{cases}$

Integramos la segunda ecuación respecto de y:

$$\int_0^y \frac{\partial f(x,s)}{\partial s}\,ds = \int_0^y \left(3x^2 + x\cos(xs)\right)ds$$

$$\Rightarrow f(x,y) - f(x,0) = 3x^2 y + \sin(xy) \Rightarrow f(x,y) = 3x^2 y + \sin(xy) + f(x,0).$$

Usamos ahora la información de la primera ecuación:

$$\cancel{6xy} - x + \cancel{y\cos xy} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \cancel{6xy} + \cancel{y \cos xy} + \frac{\partial f(x,0)}{\partial x} \Rightarrow$$

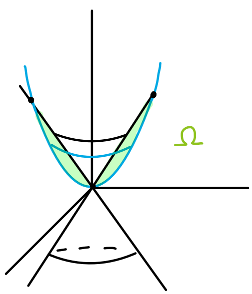
$$\Rightarrow \frac{\partial f(x,0)}{\partial x} = -x \Rightarrow f(x,0) = \frac{-x^2}{2}.$$

Finalmente, un potencial es $f(x,y) = 3x^2y + \sin(xy) - \frac{x^2}{2}$.

2b) $\tilde{\gamma}$ y σ tienen el mismo origen $\tilde{\gamma}(0) = \vec{\sigma}(0) = (1,0)$ y mismo final $\tilde{\gamma}(\pi) = \vec{\sigma}(1) = (-1,0)$. Al ser F conservativo, las integrales son iguales por la regla de Barrow.

Ejercicio 3. **(2 puntos)** *Esbozar el conjunto* $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 \leq x^2 + y^2 \leq z\}$ *y calcular su volumen.*

3)



$z^2 \leq x^2+y^2$ es el exterior de un cono.

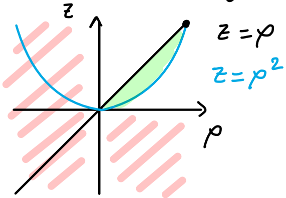
$z \geq x^2+y^2$ es la parte superior de un paraboloide

$z^2 = z \iff z=0 \parallel z=1$

Hacemos un cambio a coordenadas cilíndricas

$$\Omega = \{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z) : \rho \geq 0,\ \theta \in [-\pi,\pi],\ z^2 \leq \rho^2,\ z \geq \rho^2\}$$

Fijamos primero θ, ya que se mueve libremente en $[-\pi,\pi]$. Para ρ y z tenemos la siguiente situación:



ρ y z no pueden ser negativos

Tenemos, por ejemplo, $\rho \in [0,1]$ y $z \in [\rho^2, \rho]$.
Entonces

$$\mathrm{Vol}(\Omega) = \int_\Omega 1 \, d(x,y,z) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1\int_{\rho^2}^{\rho} \rho \, dz\, d\rho\, d\theta =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \rho(\rho - \rho^2)\, d\rho = 2\pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Ejercicio 4. ***(3 puntos)*** *Sean* $\Lambda = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > \sqrt{x^2+y^2},\ 0 < z < 1\}$, *y* $\Sigma = \partial\Lambda$. *Se considera el campo vectorial* $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dado por*

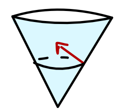
$$G(x,y,z) = (-x,-y,2z).$$

Comprobar la veracidad del teorema de la divergencia para Ω, Σ *y* G, *justificando cuando sea necesario la orientación escogida.*

4 Por un lado, $\operatorname{div} G = -1-1+2=0$, por lo que $\int_\Omega \operatorname{div} G \, d(x,y,z) = 0$.

Por otro lado, para calcular $\int_\Sigma F.ds$, dividimos Σ en dos superficies y las parametrizamos.

$$\Sigma_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2+y^2 \wedge z \in [0,1] \wedge \theta \in [-\pi,\pi]\}$$
$$= \{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z) \cdot z = \rho \wedge z \in [0,1] \wedge \theta \in [-\pi,\pi]\}$$
$$= \{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \rho) : z \in [0,1] \wedge \theta \in [-\pi,\pi]\}$$



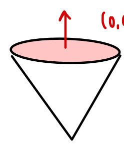
Esta normal apunta al interior

$$\varphi_1 : [0,1] \times [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^3$$
$$\varphi_1(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \rho)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \rho} \times \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos\theta & \sin\theta & 1 \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (-\rho\cos\theta, -\rho\sin\theta, \rho)$$

Componente z positiva $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ orientación <u>negativa</u>

$$\Sigma_2 = \{(x,y,z) : 1 \geq x^2+y^2 \wedge z=1\} = \{(x,y,1) : x^2+y^2 \leq 1\}$$
$$= \{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, 1) : \theta \in [-\pi,\pi] \wedge \rho^2 \leq 1\}$$



$(0,0,1)$ apunta al exterior.

$$\varphi_2 : [0,1] \times [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^3$$
$$\varphi_2(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, 1)$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial \rho} \times \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (0,0,\rho)$$

Componente $z>0$, apunta al exterior, es la <u>positiva</u>

Entonces,
$$\int_\Sigma G.ds = -\int_{\Sigma_1} G.ds + \int_{\Sigma_2} G.ds.$$

$$-\int_{\Sigma_1} G \cdot ds = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1 \langle(-\rho\cos\theta, -\rho\sin\theta, 2\rho), (-\rho\cos\theta, -\rho\sin\theta, \rho)\rangle =$$

$$= -2\pi \int_0^1 3\rho^2 \, d\rho = -2\pi .$$

$$\int_{\Sigma_2} G \cdot ds = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1 \langle (0,0,2), (-\rho\cos\theta, -\rho\sin\theta, \rho)\rangle \, d\rho \, d\theta = 2\pi \int_0^1 2\rho \, d\rho = 2\pi .$$

Por tanto, $\displaystyle\int_{\Sigma} G \cdot ds = 0 = \int_{\Omega} \operatorname{div} G \, d(x,y,z)$. ✓