Ejercicio 1. *El astroide es la curva plana Γ parametrizada por $\gamma : [0,2\pi] \to \Gamma$, con $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ para todo $t \in [0,2\pi]$.*

(2 puntos) *Calcular la ecuación de la recta tangente a Γ en $(\frac{3\sqrt{3}}{8}, \frac{1}{8})$.*

(1 punto) *Razonar si existe la recta tangente a Γ en $(1,0)$.*

(2 puntos) *Usar el teorema de Green con Γ y el campo $F(x,y) = (\frac{-y}{2}, \frac{x}{2})$ para determinar el área de su región interior.*

Indicación: $\sin^2 t \cos^2 t = \frac{1-\cos(4t)}{8}$.

b) Primero, encontramos $t_0 \in [0,2\pi]$ tal que $\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}, \frac{1}{8}\right) = (\cos^3 t_0, \sin^3 t_0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos^3 t_0 = \frac{3\sqrt{3}}{8} & \Rightarrow \cos t_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin^3 t_0 = \frac{1}{8} & \Rightarrow \sin t_0 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow t_0 = \frac{\pi}{6}.$$

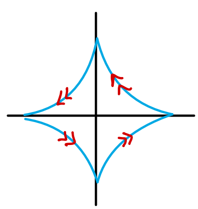
Entonces, $\gamma'(\pi/6)$ es un vector tangente en $\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}, \frac{1}{8}\right)$.

$$\gamma'(t) = \left(-3\cos^2 t \sin t,\ 3\sin^2 t \cos t\right) \Rightarrow \gamma'(\pi/6) = \left(\frac{-9}{8}, \frac{3\sqrt{3}}{8}\right)$$

La recta tangente tiene ecuaciones paramétricas $\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}, \frac{1}{8}\right) + t\left(\frac{-9}{8}, \frac{3\sqrt{3}}{8}\right)$.

b) Por otro lado, tenemos $(1,0) = \gamma(0)$, y $\gamma'(0) = (0,0)$, por tanto γ no tiene recta tangente en $(1,0)$.

c)



Γ está recorrida positivamente, por lo que el teorema de Green para F nos da:

$$\int_\Gamma F \cdot dl = \int_\Omega \operatorname{rot} F \, d(x,y) = \int_\Omega 1 \, d(x,y) = \text{área}(\Omega),$$

ya que

$$\operatorname{rot} F(x,y) = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ \frac{-y}{2} & \frac{x}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Calculamos por tanto $\int_\Gamma F \cdot dl$.

$$\int_0^{2\pi} \left\langle \left(-\frac{\sin^3 t}{2}, \frac{\cos^3 t}{2} \right), \left(-3\cos^2 t \sin t, 3 \sin^2 t \cos t \right) \right\rangle dt =$$

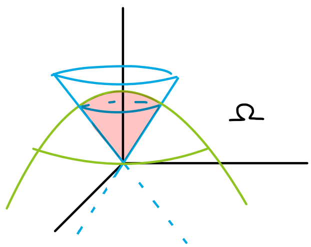
$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} \cos^2 t \sin^4 t + \frac{3}{2} \sin^2 t \cos^4 t \right) dt = \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t \, dt$$

$$= \frac{3}{16} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4t) \, dt = \frac{3\pi}{8} - \frac{1}{4} \Big[\sin 4t \Big]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{8}.$$

Ejercicio 2. **(2 puntos)** *Esbozar el conjunto*

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1 - 2(x^2 + y^2)\}$$

y calcular su volumen.



$z^2 \geq x^2 + y^2$ es la parte interior de un cono recto

$z \leq 1 - 2(x^2+y^2)$ es la parte inferior de un paraboloide invertido

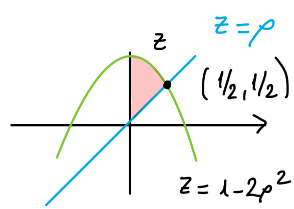
$\mathrm{Vol}(\Omega) = \int_\Omega 1 \, d(x,y,z)$. Hacemos un cambio a coordenadas cilíndricas.

$\Omega = \{(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta, z) : \rho \leq z \leq 1 - 2\rho^2 \wedge \theta \in [-\pi, \pi]\}$.

Para θ no hay restricciones; $\theta \in [-\pi, \pi]$.

Para ρ y z se tiene

$$\begin{cases} \rho \leq z \\ z \leq 1 - 2\rho^2 \end{cases}$$



En particular, $\rho \leq 1 - 2\rho^2 \Rightarrow 2\rho^2 + \rho - 1 \leq 0 \Rightarrow \rho \in [0, 1/2]$

Para $\rho \in [0, 1/2]$ y $\theta \in [-\pi, \pi]$, se tiene $z \in [\rho, 1 - 2\rho^2]$.

Entonces:

$$\mathrm{Vol}(\Omega) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{1/2} \int_\rho^{1-2\rho^2} \rho \, dz \, d\rho \, d\theta = 2\pi \int_0^{1/2} \rho (1 - 2\rho^2 - \rho) \, d\rho = \frac{5\pi}{48}$$

II

Ejercicio 3. ***(3 puntos)*** *Sean* $\Lambda = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > x^2 + y^2,\ 0 < z < 1\}$, *y* $\Sigma = \partial\Lambda$. *Se considera el campo vectorial* $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *dado por*

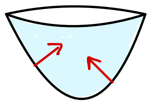
$$H(x,y,z) = (0,0,2z).$$

Sabiendo que $vol(\Lambda) = \frac{\pi}{2}$, *comprobar la veracidad del teorema de la divergencia para* Λ, Σ *y* H, *justificando cuando sea necesario la orientación escogida.*

Por un lado, $\operatorname{div} H = 0+0+2$, por lo que $\int_\Lambda \operatorname{div} H \, d(x,y,z) = 2\operatorname{Vol}(\Lambda) = \pi$.

Por otro lado, para calcular $\int_{\partial\Lambda} H.ds$, dividimos $\partial\Lambda$ en dos superficies y las parametrizamos:

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2+y^2 \wedge z \in [0,1] \} = \\ &= \{ (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z) : z = \rho^2 \wedge z \in [0,1] \} \\ &= \{ (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \rho^2) : \rho \in [0,1] \}\end{aligned}$$



Orientación negativa.

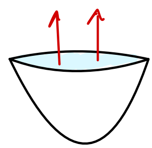
$$\varphi_1 : [0,1] \times [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\varphi_1(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \rho^2)$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\rho} \times \frac{\partial\varphi_2}{\partial\theta} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos\theta & \sin\theta & 2\rho \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (-2\rho^2\cos\theta, -2\rho^2\sin\theta, \rho)$$

Componente z positiva $\Rightarrow$ apunta al interior

$$\Sigma_2 = \{ (x,y,1) : x^2+y^2 \leq 1 \} = \{ (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, 1) : \rho^2 \leq 1 \wedge \theta \in [-\pi,\pi] \}$$

$$\varphi_2 : [0,1] \times [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\varphi_2(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, 1)$$



Orientación positiva.

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial\rho} \times \frac{\partial\varphi_2}{\partial\theta} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (0,0,\rho)$$

Componente z positiva $\Rightarrow$ apunta al exterior

Entonces $$\int_{\partial\Lambda} H.ds = -\int_{\Sigma_1} H.ds + \int_{\Sigma_2} H.ds =$$

$$= -\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1 \langle (0,0,2\rho^2), (-2\rho^2\cos\theta, -2\rho^2\sin\theta, \rho) \rangle \, d\rho\, d\theta \, +$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{1} \langle (0,0,2), (0,0,\rho) \rangle \, d\rho \, d\theta = -2\pi \int_0^1 2\rho^3 \, d\rho + 2\pi \int_0^1 2\rho \, d\rho =$$

$= -\pi + 2\pi = \pi$, como queríamos verificar.