Ejercicio 1. *Sean* $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq -1\}$ *y* $f : A \to \mathbb{R}$ *el campo escalar dado por*

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{1+xy}-1}{x^2+y^2} \quad \forall (x,y) \in A \setminus \{(0,0)\},$$
$$f(0,0) = 0.$$

(1.5 puntos) *Argumentar usando funciones continuas que* A *es un cerrado de* $\mathbb{R}^2$.

(2 puntos) *Demostrar que* f *no es continua en* $(0,0)$.

a) Definimos $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mediante $g(x,y) = xy+1$, que es continua por ser polinómica. Se tiene que

$$g^{-1}([0,+\infty[) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) \geq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy+1 \geq 0\} = A,$$

siendo $[0,+\infty[$ un cerrado de $\mathbb{R}$ por ser un intervalo cerrado. Por tanto, A es un cerrado.

b) Calculemos el límite direccional según $y=x$ y veamos que no coincide con $f(0,0)=0$.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to 0 \\ y=x}} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{1+y^2}-1}{2y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{y^2}{2y^2\left(\sqrt{1+y^2}+1\right)} =$$
$$= \lim_{y\to 0} \frac{1}{2\left(\sqrt{1+y^2}+1\right)} = 1/4 \neq 0.$$

Por tanto, f no es continua es $(0,0)$.

Sergio Cruz Blázquez
Universidad Autónoma de Madrid
sergio.cruz@uam.es Despacho 17-309

Ejercicio 2. *Sea* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$g(x,y) = xy + \sqrt{x^2+y^2}.$$

(2 puntos) *Estudiar la diferenciabilidad de* g *en* $\mathbb{R}^2$.
(2 puntos) *Clasificar los puntos críticos de* g.
Sugerencia: *Nótese que* $g(x,y) = g(y,x)$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.
(0.5 puntos) *Demostrar que* g *tiene un mínimo relativo en* $(0,0)$.
Sugerencia: *Hacer un cambio a coordenadas polares.*

a) Vemos que $\nabla g(x,y) = \left(y + \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}} \, , \, x + \frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}} \right)$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$\nabla g(x,y)$ es un campo continuo en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, luego g es diferenciable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Vemos que, en $(0,0)$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{g(t,0) - g(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{t^2}}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{|t|}{t}$$

El último límite no existe, así que $\nexists \nabla g(0,0)$. Por tanto, g es diferenciable solo en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

b) Los puntos críticos son aquellos donde $\exists \nabla g$ y $\nabla g = (0,0)$, por tanto $(0,0)$ no es uno. Sea $(x,y) \neq (0,0)$

$$\nabla g(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} y + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \\ x + \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy + \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \\ xy + \dfrac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \end{cases}$$

$1^a - 2^a$

$\Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow x = y \parallel x = -y$.

Si $x = y$, $\quad x + \frac{x}{\sqrt{2x^2}} = 0 \iff x\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}|x|}\right) = 0 \iff x = 0$

$\iff (x,y) = (0,0)$, que no es punto crítico porque $\nexists \nabla g(0,0)$.

Si $x = -y$, $\quad x - \frac{x}{\sqrt{2x^2}} = 0 \iff x\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}|x|}\right) = 0 \iff x = 0 \parallel |x| = 1/\sqrt{2}$

No puede ser

$\Longleftrightarrow (x,y) = \left(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\right) \;\; || \;\; (x,y) = \left(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right).$

Como $g(x,y) = g(y,x)$, solo necesitamos clasificar uno de ellos.

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{\sqrt{x^2+y^2} - \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} \quad \overset{\text{Simetría}}{\Longrightarrow} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{\sqrt{x^2+y^2} - \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$$

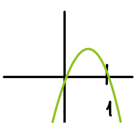
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = 1 - \frac{\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}.$$

Vemos que $\nabla^2 g\left(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right) = \nabla^2 g\left(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\right) = \begin{array}{c} >0 \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}$

$\det\left(\nabla^2 g\left(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)\right) = 1/4 - 9/4 = -2 < 0$, luego $\nabla^2 g\left(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)$ es indefinida por el criterio de Sylvester. Por tanto, g tiene dos puntos de silla en $\left(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)$ y $\left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)$.

c) Queremos demostrar que $\exists r > 0$ tal que $g(x,y) \geq g(0,0) = 0$ para $(x,y) \in B((0,0), r)$. Pasamos a polares:

$$g(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \rho^2 \underbrace{\cos\theta\sin\theta}_{\geq -1} + \rho \geq \rho - \rho^2 \geq 0 \quad \text{para } \rho \in [0,1]$$



$\rho^2 - \rho = \rho(\rho - 1)$ es ≥ 0 para $\rho \in [0,1]$.

Por tanto, podemos tomar $r = 1$.

Ejercicio 3. *Sean* $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *un campo diferenciable en* $\mathbb{R}^2$ *tal que* $h(0,0) = 3$ *y* $\nabla h(0,0) = (-1,1)$, *y* $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *el campo vectorial dado por*

$$G(x,y) = \left(xy - x, e^{x-y} - 1\right).$$

(2 puntos) Calcular la ecuación del plano tangente a la gráfica de $h \circ G$ *en* $(1,1,3)$.

Llamemos $f = h \circ G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. La ecuación del plano tangente en $(1,1,3)$ sabemos que es

$$z - f(1,1) = \langle \nabla f(1,1), (x-1, y-1) \rangle$$

Usando la regla de la cadena,

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{G} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{h} \mathbb{R}$$

$$f = h(G)$$

$$\Rightarrow \nabla f = \nabla h(G) \cdot DG$$

$$z - h(G(1,1)) = \langle \nabla h(G(1,1))\, DG(1,1), (x-1, y-1) \rangle.$$

Puesto que $G(1,1) = (0,0)$, ya conocemos que $h(G(1,1)) = h(0,0) = 3$ y $\nabla h(G(1,1)) = \nabla h(0,0) = (-1,1)$. Podemos calcular

$$DG(x,y) = \begin{pmatrix} y-1 & x \\ e^{x-y} & -e^{x-y} \end{pmatrix} \Rightarrow DG(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$z - 3 = \left\langle (-1 \;\; 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, (x-1, y-1) \right\rangle$$

$$\Rightarrow z - 3 = \langle (1,-2), (x-1, y-1) \rangle \Rightarrow z - 3 = x - 1 - 2y + 2 \Rightarrow x - 2y - z + 4 = 0.$$