Cálculo II - Grado en ingeniería informática

Parcial I - 14/3/2025

Ejercicio 1. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ el campo escalar dado por*

$$f(x,y) = \frac{\log(1+x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2+xy}} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},$$
$$f(0,0) = 0.$$

(2 puntos) *Demostrar que f es un campo continuo en $\mathbb{R}^2$.*

(2 puntos) *Se considera $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq e^{x^2+y^2} \leq 4\}$. Probar que $f(K)$ es un compacto de $\mathbb{R}$.*

a) Para ver que es continuo, comprobamos que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$.

Usamos el criterio de coordenadas polares:

$$\lim_{r\to 0} \left| \frac{\log(1+r^2)}{\sqrt{r^2(1+\cos\theta \sin\theta)}} \right| = \lim_{r\to 0} \left| \frac{\log(1+r^2)}{r} \quad \frac{1}{\sqrt{1+\cos\theta\sin\theta}} \right|$$

$$\cos\theta \sin\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta \geq -1/2$$

$$\leq \sqrt{2} \lim_{r\to 0} \frac{2r}{1+r^2} = 0$$

No depende de θ.

regla de L'Hôpital

b) Como f es continua, si probamos que K es un compacto tendremos automáticamente que $f(K)$ es un compacto.

Sea $g(x,y) = e^{x^2+y^2}$, que es continua. $K = g^{-1}([2,4])$. Como $[2,4]$ es cerrado, entonces K es cerrado.

Además, si $(x,y) \in K$, $\log 2 \leq x^2+y^2 \leq \log 4 \Rightarrow \sqrt{\log 2} \leq \|(x,y)\| \leq \sqrt{\log 4}$.

Por tanto, $\|(x,y)\| \leq \sqrt{\log 4}$ $\forall (x,y) \in K$, por lo que K es acotado y consecuentemente compacto.

Ejercicio 2. *Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por*

$$g(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + \sqrt{x^2y^2}$$

(2 puntos) *Estudiar la diferenciabilidad de g en $(0,0)$.*
(2 puntos) *Probar que $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ es un punto crítico de g y clasificarlo.*
Sugerencia: *Nótese que $g(x,y) = g(y,x) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.*

a) Para que g sea diferenciable en $(0,0)$ hace falta que exista $\nabla g(0,0)$ y que además

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x,y) - g(0,0) - \langle \nabla g(0,0), (x,y)\rangle}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(t,0)-g(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(t-1)^2+1-2}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t^2-2t}{t} = -2 \overset{\text{Por simetría}}{=} \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \Rightarrow \nabla g(0,0) = (-2,-2)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-1)^2+(y-1)^2+\sqrt{x^2y^2}-2+2x+2y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2+\sqrt{x^2y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Pasamos a coordenadas polares: No depende de θ.

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2+\rho^4|\cos\theta||\sin\theta|}{\rho} \leq \lim_{\rho\to 0} (\rho+\rho^3) = 0$$

Vemos ahora que $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ es punto crítico, probando que $\nabla g(2/3, 2/3) = (0,0)$. Calculamos $\nabla g(x,y)$:

$$\nabla g(x,y) = \left(2(x-1) + \frac{xy^2}{\sqrt{x^2y^2}},\ 2(y-1) + \frac{yx^2}{\sqrt{x^2y^2}}\right)$$, que existe para todo punto tal que $x^2y^2 \neq 0$, y en particular para $(2/3, 2/3)$.

De la fórmula se sigue que $\nabla g\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = (0,0)$.

Calculamos las entradas de la matriz Hessiana:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = 2 + \frac{y^2\sqrt{x^2y^2} - xy^2\,\frac{xy^2}{\sqrt{x^2y^2}}}{x^2y^2} = 2 + \frac{x^2y^4 - x^2y^4}{(x^2y^2)^{3/2}} = 2 \overset{\text{Por simetría}}{=} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y}(x,y) = \frac{2xy\sqrt{x^2y^2} - xy^2\,\frac{yx^2}{\sqrt{x^2y^2}}}{x^2y^2} = \frac{2x^3y^3 - x^3y^3}{(x^2y^2)^{3/2}} = \frac{x^3y^3}{(x^2y^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 g\left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}\right) = \begin{pmatrix} \overset{>0}{2} & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \left|\nabla^2 g\left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}\right)\right| = 3 > 0$$

$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ es un punto de mínimo local.

Ejercicio 3. *Sea $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un campo de clase $C^2(\mathbb{R}^2)$ cuyo polinomio de Taylor de orden 1 en $(1,-1)$ viene dado por $4 + x - y$, y sea $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ el campo vectorial*

$$G(x,y) = (e^{xy}, \sin y - \cos x)\,.$$

(2 puntos) *Utilizar la regla de la cadena para calcular el polinomio de Taylor de orden 1 de $h \circ G$ en $(0,0)$.*

El polinomio de Taylor tiene la forma:

$$P_1(h,(1,-1)) = h(1,-1) + \frac{\partial h}{\partial x}(1,-1)(x-1) + \frac{\partial h}{\partial y}(1,-1)(y+1)$$

$$= 4 + x - y.$$

De lo anterior deducimos que $h(1,-1) = 6$ y $\nabla h(1,-1) = (1,-1)$

Usando la regla de la cadena; $\nabla(h \circ G)(0,0) = \nabla h(G(0,0))\, DG(0,0)$

$$= \nabla h(1,-1) \cdot DG(0,0) = (1,-1)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0,-1)$$

$$DG(x,y) = \begin{pmatrix} ye^x & xe^y \\ -\sin x & \cos y \end{pmatrix} \Rightarrow DG(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $P_1(h\circ G, (0,0)) = h\circ G(0,0) + \langle \nabla(h\circ G)(0,0), (x,y)\rangle$

$= h(1,-1) + \langle (0,-1), (x,y)\rangle = 6-y.$