Ejercicio 1. *Se considera la función* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2+\sqrt[3]{x^2y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} & si \quad (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

(1 punto) *Estudiar la continuidad de* f *en* $(0,0)$.

(1 punto) *Estudiar la diferenciabilidad de* f *en* $(0,0)$.

a) Estudiamos el límite en polares

$$\lim_{\rho\to0}\left|\frac{\rho^3\cos\theta\sin^2\theta+\rho^{4/3}\cos^2\theta\sin^2\theta}{\rho}\right| = \lim_{\rho\to0}\Big(\rho^2\underbrace{|\cos\theta\sin^2\theta|}_{\leq 1}+\rho^{1/3}\underbrace{\cos^2\theta\sin^2\theta}_{\leq 1}\Big)$$

$$\leq \lim_{\rho\to0}\underbrace{\left(\rho^2+\rho^{1/3}\right)}_{\text{No depende de }\theta.}=0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)=0$$

$\Rightarrow$ f es continua en $(0,0)$.

b) Calculamos $\nabla f(0,0)$ usando la definición

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)&=\lim_{t\to0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{0}{t}=0.\\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)&=\lim_{t\to0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{0}{t}=0.\end{aligned}\right\}\ \nabla f(0,0)=(0,0)$$

Idénticamente 0

Para estudiar la diferenciabilidad, comprobamos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\langle\nabla f(0,0),(x,y)\rangle}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

Vemos el límite anterior en polares

$$\lim_{\rho\to0}\left|\frac{\rho^3\cos\theta\sin^2\theta+\rho^{4/3}\cos^2\theta\sin^2\theta}{\rho^2}\right| = \lim_{\rho\to0}\left(\rho\,|\cos\theta\sin^2\theta|+\frac{\cos^2\theta\sin^2\theta}{\rho^{2/3}}\right)$$

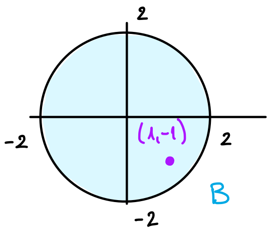
Si $\sin\theta = 0$ || $\cos\theta = 0$, el límite anterior vale 0. $\}$ depende de θ
En caso contrario, la función diverge positivamente $\}$

$$\Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\langle \nabla f(0,0),(x,y)\rangle}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow f \text{ no es diferenciable en } (0,0).$$

Ejercicio 2. *Sean* $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\}$ *y la función* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$g(x,y) = x^2 + y^2 + 2(y-x)$$

(1 punto) *Encontrar y clasificar todos los puntos críticos de* g *en* $\mathbb{R}^2$.
(0,5 puntos) *Demostrar que* g *tiene extremos absolutos en* B.
(1,5 puntos) *Calcular dichos extremos absolutos.*



a) ∇g existe en todo en $\mathbb{R}^2$.

$$\nabla g(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ 2y + 2 = 0 \end{cases} \iff (x,y) = (1,-1)$$

El único punto crítico es $(1,-1)$.

$$\nabla^2 g(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla^2 g(1,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$ Ambos autovalores son positivos, $\Rightarrow (1,-1)$ es un mínimo relativo.

b) g es una función continua y B es un compacto al ser cerrado y acotado, luego $f(B)$ es un compacto de $\mathbb{R}$. Entonces, $f(B)$ tiene mínimo y máximo absolutos (Teorema de Weierstrass).

c) Si uno de estos extremos está en B°, entonces es un punto crítico, por lo que el único candidato es $(1,-1)$

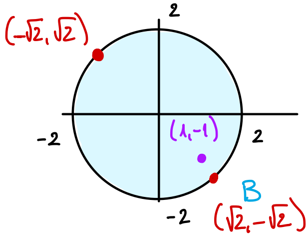
Si están en $\partial B = \{(x,y) : x^2+y^2 = 4\}$, entonces son puntos críticos del Lagrangiano $F(x,y,\lambda) = x^2+y^2+2(y-x)+\lambda(x^2+y^2-4)$

Sistema de Lagrange
$$\begin{cases} 2x - 2 + 2\lambda x = 0 \\ 2y + 2 + 2\lambda y = 0 \\ x^2+y^2 = 4 \end{cases} \begin{matrix} \overset{\cdot y}{\Rightarrow} \\ \overset{\cdot x}{\Rightarrow} \\ \Rightarrow \end{matrix} \begin{matrix} 2xy - 2y + 2\lambda xy = 0 \\ 2yx + 2x + 2\lambda xy = 0 \\ x^2+y^2 = 4 \end{matrix}$$

Restamos $1^a - 2^a$ $\Rightarrow -2y - 2x = 0 \Rightarrow x = -y$.

Usando esto en la última ecuación tenemos: $\begin{array}{l} x = -y \\ 2x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}. \end{array}$

Los puntos críticos en ∂B son $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ y $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.



Posibles extremos	Imágenes	
$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$	$4 + 4\sqrt{2}$	$\longrightarrow$ Máximo
$(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$	$4 - 4\sqrt{2}$	
$(1, -1)$	-2	$\longrightarrow$ Mínimo.

Ejercicio 3. *Se considera el recinto plano*

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, \ (x-1)^2 + y^2 \geq 1, \ x, y \geq 0\}.$$

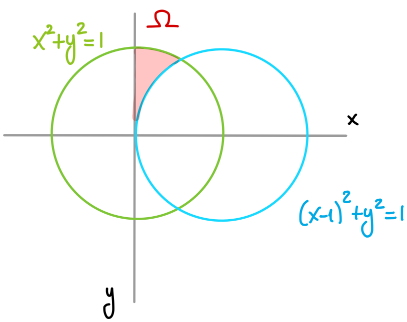
(0,5 puntos) *Esbozar el conjunto* Ω.

(1,5 puntos) *Calcular su área.*

INDICACIONES: Describir el conjunto Ω en coordenadas polares, especificando el rango de variación de cada una de las variables.

$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}.$$

a)



b) Escribimos el conjunto en coordenadas polares:

$$\Omega = \{ (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) : \rho^2 \leq 1, \ \rho^2 - 2\cos\theta + 1 \geq 1, \ \rho\cos\theta \geq 0, \ \rho\sin\theta \geq 0 \}$$

$$\left.\begin{array}{l} \rho^2 \leq 1 \Rightarrow \rho \leq 1 \\ \rho^2 - 2\rho\cos\theta \geq 0 \Rightarrow \rho \geq 2\cos\theta \end{array}\right\} 2\cos\theta \leq \rho \leq 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta \geq 0 \Rightarrow \theta \in [-\pi, \pi/2] \\ \sin\theta \geq 0 \Rightarrow \theta \in [0, \pi] \end{array}\right\} \Rightarrow \theta \in [0, \pi/2]$$

Observamos que $2\cos\theta \leq \rho \leq 1$ implica que $2\cos\theta \leq 1 \Rightarrow \cos\theta \leq 1/2$ $\Rightarrow \theta \in [\pi/3, \pi/2]$ Por tanto,

$$\Omega = \{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) : \theta \in [\pi/3, \pi/2],\ \rho \in [2\cos\theta, 1]\}.$$

$$\text{área}(\Omega) = \int_\Omega 1\, d(x,y) = \int_{\pi/3}^{\pi/2}\int_{2\cos\theta}^{1} \rho\, d\rho\, d\theta = \int_{\pi/3}^{\pi/2}\left(\frac{1}{2} - 2\cos^2\theta\right) d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{12} - \int_{\pi/3}^{\pi/2}\left(1 + \cos(2\theta)\right) d\theta = \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{6} - \left[\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{\pi/3}^{\pi/2} = \frac{-\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Ejercicio 4. *Sea Σ la superficie de $\mathbb{R}^3$ que resulta de intersecar el cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$ con la gráfica $z = y^2$, y sea Γ su contorno. Se considera el campo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por*

$$F(x, y, z) = (-y,\ x,\ y^2 + y - z).$$

(1 punto) *Razona si F es o no un campo conservativo.*

(2 puntos) *Comprobar la veracidad del teorema de Stokes para Σ, Γ y F, justificando las orientaciones escogidas.*

a) $$\text{rot} F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -y & x & y^2+y-z \end{vmatrix} = (2y+1,\ 0,\ 2) \neq (0,0,0)$$

$\Rightarrow F$ no es conservativo.

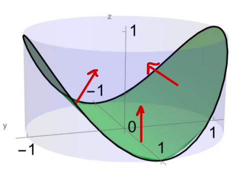
b) Parametrizamos Σ y su contorno, usando coordenadas cilíndricas:

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1,\ z = y^2\} =$$
$$= \{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z) : \rho^2 \leq 1,\ z = \rho^2\sin^2\theta,\ \theta \in [-\pi, \pi]\}$$
$$= \{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \rho^2\sin^2\theta) : \rho \in [0,1],\ \theta \in [-\pi, \pi]\}$$

Parametrización de Σ $\longrightarrow$ Normal inducido

$\varphi : [0,1] \times [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^3$

$\varphi(\rho, \theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \rho^2\sin^2\theta)$



$$\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} \times \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos\theta & \sin\theta & 2\rho\sin^2\theta \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta & 2\rho^2\sin\theta\cos\theta \end{vmatrix}$$

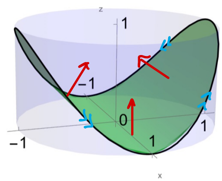
$$= (0,\ -2\rho^2\sin\theta,\ \underline{\rho})$$

Componente z positiva.

Por otro lado, el contorno de Σ tiene la parametrización

$$\Gamma = \{(x,y,z) : x^2+y^2=1 \ , \ z=y^2\}$$
$$= \{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z) : \rho^2=1 \ , \ z=\rho^2\sin^2\theta \ , \ \theta\in[-\pi,\pi]\}$$
$$= \{(\cos\theta, \sin\theta, \sin^2\theta) : \theta\in[-\pi,\pi]\}$$

Parametrización de Γ



$$\gamma : [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\gamma(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, \sin^2\theta)$$
$$\gamma'(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta, 2\sin\theta\cos\theta)$$

Se verifica la regla de la mano derecha.

Calculamos las integrales del teorema de Stokes: $\displaystyle\int_\gamma F.d\ell = \int_\Sigma \text{rot} F . ds$

$$\int_\gamma F.d\ell = \int_{-\pi}^{\pi} \langle (-\sin\theta, \cos\theta, \sin\theta), (-\sin\theta, \cos\theta, 2\sin\theta\cos\theta) \rangle \, d\theta =$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} (1+2\sin^2\theta\cos\theta)\, d\theta = \left[\theta + \frac{2}{3}\sin^3\theta\right]_{-\pi}^{\pi} = \boxed{2\pi.}$$

$$\int_\Sigma \text{rot} F . ds = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1 \langle (2\rho\sin\theta+1, 0, 2), (0, -2\rho^2\sin\theta, \rho) \rangle \, d\rho\, d\theta =$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1 2\rho \, d\rho\, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta = \boxed{2\pi.}$$

Se verifica el teorema de Stokes.