**Ejercicio 1.** *Sea* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *la función dada por*

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+2y^2} & si \quad (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

**(1 punto)** *Estudiar la continuidad de* $f$ *en* $(0,0)$.
**(1 punto)** *Estudiar la diferenciabilidad de* $f$ *en* $(0,0)$.

a) Estudiamos el límite en polares $\quad |\cos^3\theta| \leq 1$

$$\lim_{\rho\to 0}\left|f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\right| = \lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^3|\cos^3\theta|}{\rho^2(1+\sin^2\theta)} \leq \underbrace{\lim_{\rho\to 0}\rho}_{\text{No depende de }\theta} = 0 = f(0,0)$$

$f$ es continua en $(0,0)$. $\quad 1+\sin^2\theta \geq 1.$

b) Calculamos

$$\nabla f(0,0) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t},\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}\right) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{t^3/t^2}{t},0\right) = (1,0).$$

Comprobamos si $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\langle\nabla f(0,0),(x,y)\rangle}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$

Consideramos el límite anterior en coordenadas polares:

$$\lim_{\rho\to 0}\left|\frac{\dfrac{\rho^3\cos^3\theta}{\rho^2(1+\sin^2\theta)}-\rho\cos\theta}{\rho}\right| = \frac{|\cos^3\theta|}{1+\sin^2\theta}-\cos\theta.$$

El límite depende de $\theta$.

$f$ no es diferenciable en $(0,0)$.



Sergio Cruz Blázquez
Universidad Autónoma de Madrid
sergio.cruz@uam.es

**Ejercicio 2.** *Sean* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *el campo escalar dado por* $f(x,y) = x^3 - 3x + xy$, *y* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *un campo vectorial diferenciable tal que* $F(0,0) = (-1,2)$ *y*

$$DF(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

**(1 punto)** *Encontrar y clasificar todos los puntos críticos de* $f$ *en* $\mathbb{R}^2$.
**(1 punto)** *Calcular el polinomio de Taylor de orden 2 de* $f$ *centrado en* $(1,0)$.
**(1 punto)** *Determinar un vector normal a la gráfica de* $f(F)$ *en el punto* $(0,0,0)$.

Por comodidad, calculamos

$$\nabla f(x,y) = \left(3x^2 - 3 + y,\ x\right), \quad \nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) $\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} 3x^2 - 3 + y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$, $-3+y=0 \Rightarrow y = 3.$

Único punto crítico: $(0,3)$.

$\nabla^2 f(0,3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Los autovalores son las raíces de $\det\left(\nabla^2 f(0,3) - \lambda I_{2\times 2}\right)$.

$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 \to$ Raíces $\lambda = 1$, $\lambda = -1$. Es un punto de silla.

b) $P_2(f,(1,0)) = f(1,0) + \langle \nabla f(1,0), (x-1,y)\rangle + \frac{1}{2}(x-1\ \ y)\, \nabla^2 f(1,0) \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} =$

$= -2 + \langle (0,1), (x-1,y)\rangle + \frac{1}{2}(x-1\ \ y) \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} =$

$= -2 + y + \frac{1}{2}\left(6(x-1)^2 + 2y(x-1)\right) = -2 + y + 3(x-1)^2 + y(x-1)$

c) Los dos posibles vectores normales son $\pm\left(\frac{\partial f(F)}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f(F)}{\partial y}(0,0), -1\right)$.

Calculamos $\nabla f(F)(0,0)$ usando la regla de la cadena:

$\nabla f(F)(0,0) = \nabla f(F(0,0)) \cdot DF(0,0) = \nabla f(-1,2) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= (2\ -1)\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ \ -3).$$ El normal es $\pm(1,-3,-1)$.

**Ejercicio 3.** *Se considera el campo vectorial $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido como*

$$F(x,y) = \left(6x + ye^{xy},\ 6y^2 + xe^{xy}\right)$$

**(1 punto)** *Demostrar que $F$ es un campo conservativo y calcular un potencial.*

**(1 punto)** *Evaluar $\int_\Gamma F.d\ell$, siendo $\Gamma$ el arco que va desde $(0,1)$ hasta $(0,-1)$ de la circunferencia unidad de $\mathbb{R}^2$ centrada en $(0,0)$ recorrida en sentido horario.*

a) $\nabla \times F = e^{xy} + xye^{xy} - e^{xy} - yxe^{xy} = 0$ Como $\mathbb{R}^2$ es convexo, $F$ es conservativo por ser irrotacional.

Buscamos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = F$.

$$\begin{cases} 6x + ye^{xy} = \dfrac{\partial f}{\partial x} \overset{\text{Integrando.}}{\Rightarrow} f(x,y) = 3x^2 + e^{xy} + g(y). \\ 6y^2 + xe^{xy} = \dfrac{\partial f}{\partial y} \overset{\text{Sustituyendo}}{\Rightarrow} 6y^2 + xe^{xy} = xe^{xy} + g'(y) \Rightarrow \end{cases}$$

$\Rightarrow 6y^2 = g'(y) \Rightarrow g(y) = 2y^3 + C.$ <u>Potencial</u>: $f(x,y) = e^{xy} + 3x^2 + 2y^3 + C$

b) Por la regla de Barrow: $\int_\Gamma F.d\ell = f(0,-1) - f(0,1) = 1 - 2 - (1+2) = -4.$

Si no se ha calculado un potencial, podemos integrar a lo largo del segmento de extremos $(0,1)$ y $(0,-1)$,

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (0, 1-2t)$$

$$\int_\gamma F.d\ell = \int_0^1 \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt = \int_0^1 \langle (1-2t, 6(1-2t)^2), (0,-2)\rangle dt$$

$= -12\int_0^1 (1-2t)^2 dt = -4.$ El valor es el mismo por las propiedades de los campos conservativos.

**Ejercicio 4.** *Sea $\Omega$ el abierto acotado de $\mathbb{R}^3$ cuya superficie frontera viene dada como la unión de las gráficas $z = x^2 + y^2$ y $z = 2 - x^2 - y^2$, ambas con $x^2 + y^2 \leq 1$. Se considera el campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por*

$$F(x, y, z) = (x,\ y,\ z).$$

**(1 punto)** *Probar* ***mediante el cálculo de una integral triple*** *que $vol(\Omega) = \pi$.*

**(2 puntos)** *Comprobar la veracidad del teorema de la divergencia para $\Omega$ y $F$, justificando las orientaciones escogidas.*

a) $\Omega = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geqslant x^2+y^2 \wedge z \leqslant 2-x^2-y^2 \wedge x^2+y^2 \leq 1 \} =$ Coordenadas cilíndricas

$= \{ (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta, z) : z \geqslant \rho^2 \wedge z \leqslant 2-\rho^2 \wedge \rho^2 \leq 1 \}.$

Cambio de variable.

$$\mathrm{Vol}(\Omega) = \int_\Omega 1 = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \int_{\rho^2}^{2-\rho^2} \rho \, dz \, d\rho \, d\theta = 2\pi \int_0^1 \rho(2-2\rho^2)\, d\rho = \pi.$$

b) $\operatorname{div} F = 1+1+1 = 3$, entonces: $\displaystyle\int_{\Sigma_1} F \cdot ds + \int_{\Sigma_2} F \cdot ds = 3\,\mathrm{Vol}(\Omega) = 3\pi.$

Parametrizamos $\Sigma_1$ y $\Sigma_2$:

$\Sigma_1 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2+y^2,\ x^2+y^2 \leq 1 \} = \{ (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \rho^2) : \rho \leq 1,\ \theta \in [-\pi,\pi] \}$

$\Sigma_2 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2+y^2,\ x^2+y^2 \leq 1 \} = \{ (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, 2-\rho^2) : \rho^2 \leq 1,\ \theta \in [-\pi,\pi] \}$

$\varphi_1 : [0,1] \times [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^2$

$\varphi_1(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \rho^2)$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \rho} \times \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos\theta & \sin\theta & 2\rho \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$= (-2\rho^2\cos\theta, -2\rho^2\sin\theta, \rho)$

Coordenada $z>0$, es el normal <u>interior</u> (cambiamos signo).

$\varphi_2 : [0,1] \times [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^2$

$\varphi_2(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, 2-\rho^2)$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \rho} \times \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos\theta & \sin\theta & -2\rho \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$= (2\rho^2\cos\theta, 2\rho^2\sin\theta, \rho)$

Coordenada $z>0$, es el normal <u>exterior</u> (el que queremos).

$$-\int_{\Sigma_1} F \cdot ds + \int_{\Sigma_2} F \cdot ds =$$

$$-\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1 \langle (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \rho^2), (-2\rho^2\cos\theta, -2\rho^2\sin\theta, \rho) \rangle \, d\rho \, d\theta$$

$$+\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1 \langle (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, 2-\rho^2), (2\rho^2\cos\theta, 2\rho^2\sin\theta, \rho) \rangle \, d\rho \, d\theta$$

$$= -2\pi\int_0^1 (-2\rho^3 + \rho^3)\, d\rho + 2\pi\int_0^1 (2\rho^3 + 2\rho - \rho^3)\, d\rho =$$

$$= 2\pi\int_0^1 (2\rho^3 + 2\rho)\, d\rho = 3\pi,$$ quedando comprobado.